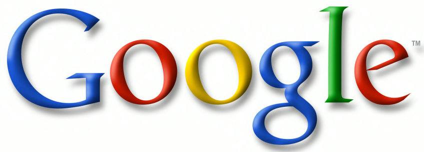
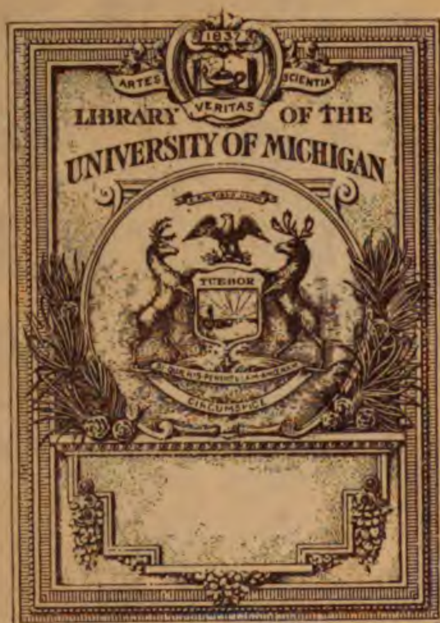



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

VERZAMELING
VAN
WISKUNDIGE VOORSTELLEN,

DOOR DE

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIGE GENOOTSCHAP,



ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.

ZESDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

H. WEIJTING, Boekverkooper, in de Warmoestraat, bij de Wijdekerksteeg, N°. 54.

1836.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van N. W. VAN NIFTERICK, te Amsterdam.

Geene Exemplaren worden voor echt erkend, dan die, welke aldus, volgens de Wet, onderteekend zijn, door

J. Nieuwlage (?)

Tweede Secretaris.

Van de vroegere Deelen dezer Verzameling van Wiskundige Voorstellen, zijn complete exemplaren of afzonderlijke stukjes, om te completeren, te bekomen, bij den Heer H. WEIJTINGA Boekhouder en Penningmeester, gelijk ook Uitgever van de Werken des Genootschaps.

NAAMLIJST

DER

LEDEN

VAN HET

WISKUNDIG GENOOTSCHAP,

ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

TE AMSTERDAM,

In den Jare *MDCCCXXXVI.*

BESTUURDERS.

C. F. JULIUS, *Voorzitter* . . . . (*) 1829

JACOB SWART, *Bestuurder en Bewaarder der Zee-Instrumenten* van Z. M. den Koning der Nederlanden, Lector, in de Wis- en Zeevaartkunde, bij het Collegie *Zeemans-Hoop*, te Amsterdam, enz., enz. 1832

H. van WESSEM, Jacobusz. 1814

D. W. HINSE. 1834

A. van der SWAN. 1818

J. van der LINDEN. 1821

J. BADON GHIJBEN, Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Medemblik, *Eerste Secretaris*. 1835

H. G. WITLAGE, *Tweede Secretaris* 1818

H. WEIJTING, *Boekhouder* en *Penningmeester*. . . . 1825

(*) *Deze jaartallen geven de eerste Verkiezing als Lid van het Bestuur te kennen.*

Buitengewone Leden van Verdienste in het Wetenschappelijke Vak.

Zijne Excellentie de Luitenant Generaal C. R. T. Baron KRAYENHOFF, Groot-Kruis der Militaire Willems-Orde, Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., te Nijmegen. . . . . (*) 1811

Jonkheer J. M. C. VAN UTENHOVE; Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., te Jutphaas. 1811

A. VAN DEN ENDE, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, Hoofd-Inspecteur van het Middelbaar en Lager Onderwijs; Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., te Haarlem. 1814

JACOB DE GELDER, Math. Mag. en Phil. Nat. Doctor, Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Faculteit aan 's Rijks Hoogeschool, enz., enz., te Leijden. 1817

KLAAS SMIT, Oud-Bestuurder, Boekhouder en Secretaris des Genootschaps, te Amsterdam. 1829

J. P. DELPRAT, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, eerste Kapitein Ingenieur, Directeur der Studiën van de Kadets der Genie aan het Koninklijk Instituut voor de Marine, te Medemblik, Correspondent der Eerste Klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, en van het Bataafsch Genootschap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, te Medemblik 1829

G. MOLL, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz., enz., Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen aan de Hoogeschool, te Utrecht. 1829

JOH.

(*) *Deze jaartallen geven de Benoeming tot Lid van Verdienste te kennen.*

JOH. BUIJS, Ridder der Orde van den Nederlandschen Leeuw, Lid van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, Oud Lector, in de Natuurkunde, in de Maatschappij: *Felix Meritis*, enz., enz., te Amsterdam 1829

J. BADON GHIJBEN, Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Medemblik, Eerste Secretaris des Genootschaps 1835

Buitengewone leden van Verdienste in het Huishoudelijke Vak.

H. VAN WESSEM, JACOBUSZ., te Amsterdam. 1817

B. VAN HEIJNINGEN, te Amsterdam. 1818

C. TERMARS, te Amsterdam. 1819

H. G. WITLAGE, te Amsterdam, Tweede Secretaris des Genootschaps. 1828

H. WEIJTING, te Amsterdam, Boekhouder en Penningmeester des Genootschaps. 1829

Leden van de Wetenschappelijke Commissie.

J. DE GELDER, (zie boven). 1813

I. P. DELPRAT, (zie boven). 1821

J. BADON GHIJBEN, (zie boven). 1830

Bibliothecaris.

J. VAN DER LINDEN, te Amsterdam. (zie boven). . . 1827

Lid van Verdienste der EERSTE KLASSE.

R. LOBATTO, Math. Mag. et Phil. Nat. Doctor, Adviseur wegens de Maten en Gewigten bij het Ministerie van Binnenlandsche zaken, enz., enz., te 's Gravenhage. 1832

Leden van Verdienste der TWEEDE KLASSE.

A. L. HECTOR, Onderwijzer, te Middelburg. 1812
A. FOCK, te Amsterdam. 1812
P. VAN EEGHEN, Chz., te Amsterdam. 1812
F. J. STAMKART, Arrondissements-IJker, te Amsterdam. 1824
R. VAN WIJK, Jacobusz., Phil. Theor. et Litt. Hum. Doctor, Rector van de Latijnsche school, te Kampen. 1824
W. TOP, Wzn., Kostschoolhouder, te Zierikzee. . . 1824
J. BASSAN, te Amsterdam. 1827
J. JONKHERT, Math. et Phil. Nat. Cand., te Amsterdam. 1827
M. VAN BLANKEN, Onderwijzer der Wiskundige Wetenschappen, te Zwolle. 1833
D. HOOLA VAN NOOTEN, Student, te Amsterdam. . 1834
B. LUBBERS, Vrederegter en Curator van het Instituut van Opvoeding en Onderwijs van wijlen zijne Excellentie den Admiraal VAN KINSBERGEN, te Elburg. . 1834

Correspondenten.

A. HARREBOMÉE, te Heemstede. 1802
J. G. ARBON, Examinator der Stuurlieden, in dienst van Z. M. den Koning der Nederlanden, te Rotterdam. 1813
A. L. HECTOR, te Middelburg. (zie boven). 1827

GEWONE LEDEN.

B. VAN HEIJNINGEN, te Amsterdam. (zie boven). (*) 1788
P. HOUTTUIN, Gz., te Hoorn. 1788
L. KOOPS, te Zwolle. 1789
W. C. BAKKER, te Ilpendam. 1789
KLAAS SMIT, te Amsterdam. (zie boven). 1790
A. VOLKERSE, Notaris, te Monnikendam. 1794
A. HARREBOMÉE, te Heemstede. (zie boven.) . . 1798

(*) *Deze jaartallen geven den aanvang van het Lidmaatschap te kennen.*

A. HORSTMAN, te Amsterdam. 1799
Jonkh. J. M. C. VAN UTENHOVE, te Jutphaas. (zie boven). 1800
J. H. NIEUWVEEN, Stads Kost- en Dag-Schoolhouder te Leijden. 1804
J. BUIJS, te Amsterdam. (zie boven) 1804
G. MOLL, Hoogleeraar, te Utrecht. (zie boven) . . . 1804
H. G. WITLAGE, te Amsterdam. (zie boven). . . . 1804
A. L. HECTOR, Onderw., te Middelburg. (zie boven). 1806
JACOB DE GELDER, Hoogleeraar, te Leijden. (zie boven). 1806
A. VAN DER SWAN, te Amsterdam. 1807
C. TERMARS, te Amsterdam. (zie boven). 1808
A. FOCK, te Amsterdam. (zie boven) 1808
L. VAN HEUSDEN, Opzigter bij de werken van 's Rijks Droogmakerijen, te Uithoorn. 1808
D. S. WATERMAN, te Gouda. 1808
P. VAN EEGHEN, CHZ., te Amsterdam. (zie boven) . 1809
J. P. BAUDET, Onderwijzer, te Vaassen. 1810
A. VAN DER SPUIJ, Architect, te 's Gravenhage. . . 1811
C. LANTZ, te Amsterdam. 1812
R. LOBATTO, te 's Gravenhage. (zie boven). 1812
J. DEELEMAN, te Deventer. 1813
A. F. DE PAUW, Wijnroeijer, te Amsterdam. 1813
S. J. MULDER, te Amsterdam. 1813
H. VAN WESSEM, JACOBUSZ., te Amsterdam. (zie boven). 1813
A. W. HUIDEKOPER, Advokaat, te Amsterdam. . . 1813
A. TOLLIUS, Architect en Landmeter, te 's Gravenhage. 1813
H. F. FIJNJE, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke werken, te Groningen. 1813
J. VAN DER LINDEN, Bibliothecaris des Genootschaps, te Amsterdam. 1813
J. G. ARBON, te Rotterdam. (zie boven). 1813
P. PREIJER, te Amsterdam. 1814
C. I. GLAVIMANS, Onder-Constructeur bij het Departement der Marine van de Maas, te Rotterdam. . . 1814
J. M. PAUW, Kapitein Ingenieur, te Geertruidenberg. 1817
J. VAN WIJK, ROELDZ., Lid van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap, enz., enz., en Hoofd-Onderwijzer aan het Stads Instituut van Opvoeding en Onderwijs, te Kampen. 1817

C. J. BOLTEN, Ingenieur van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Leeuwarden. 1818
R. VAN WIJK, JACOBUSZ., te Kampen. (zie boven) . . 1819
P. J. PRINSEN, Directeur en Onderwijzer van de Koninklijke Kweekschool voor Onderwijzers, te Haarlem. 1819
S. KLIJNSMA, Kapitein-Ingenieur, te 's Gravenhage. 1819
C. J. DE JONG, Kostschoolhouder, te Arnhem. . . 1819
A. C. PIERSON, 1e Luitenant Ingenieur, aan den Helder. 1819
J. P. DELPRAT, te Medemblik. (zie boven). 1819
W. TOP, Wz., te Zierikzee. (zie boven). 1819
C. F. JULIUS, Onderwijzer, te Amsterdam 1820
G. A. VAN KERKWIJK, Kapitein Ingenieur, te Medemblik 1820
G. VAN HEIJNSBERGEN, Art. Lib. Mag. Phil. et Med. Doctor en Eerste Hoogleeraar der Wiskunde aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik. . 1821
B. T. GRINWIS, Fungerend Hoofd-Ingenieur van den Waterstaat in de Provincie N. Holland, te Haarlem. 1822
J. CARSTEN, 1e Luitenant Ingenieur, te Delfzijl. . 1822
H. WEIJTING, Boekhand., te Amsterdam. (zie boven). 1822
B. LUBBERS, te Elburg. (zie boven) 1822
J. BASSAN, te Amsterdam. (zie boven). 1822
J. KOHLER, Kostschoolhouder, te Amsterdam. . . . 1822
J. ACQUOY, Onderwijzer, te Amsterdam. 1822
H. STROOTMAN, Leeraar der Wiskunde aan de Koninklijke Militaire Akademie, te Medemblik. 1823
F. J. STAMKART, te Amsterdam. (zie boven). . . . 1823
J. JONKHERT, te Amsterdam. (zie boven). 1823
A. VAN LEE, te Amsterdam. 1823
J. LAGERWEIJ, Kostschoolhouder, te Geertruidenberg. 1824
F. H. VAN DER MEULEN, 1e Luitenant der Artillerie, te Nijmegen. 1824
G. RAMAKERS, te Breda. 1825
F. DOORMAN, 1e Luitenant Instructeur bij het 3e Bat. Veld-Artillerie, te Maastricht. 1825
J. DOORMAN, 1e Luitenant Instructeur bij het 3e Bat. Veld-Artillerie Nat. Militie, te Delft. 1825
N. J. SINGELS, Instituteur en Kostschoolhouder, te Leeuwarden. 1825

G. H. MAASSEN, Onderwijzer, te Amsterdam. . . . 1826
P. HUIDEKOPER, te Amsterdam. 1826
G. GRAAFLAND, te 's Gravenhage. 1826
E. OLIVIER, Dz., Landmeter, te Dordrecht. . . . 1827
Jonkh. W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, 2e Luitenant bij de 9 Afdeeling Infanterie, te Woerden. . . 1827
C. van SCHAICK, Onderwijzer, te Amsterdam. . . . 1828
M. G. SNOER, Onderwijzer, te Amsterdam. 1828
M. H. GODEFROI, te Amsterdam. 1828
D. OUWERSLOOT, Kostschoolhouder, te Amsterdam. 1828
W. A. FROGER, 2e Luitenant Ingenieur, te Utrecht. 1828
M. de LEON, te Amsterdam. 1828
J. BADON GHIJBEN, te Medemblik. (zie boven). . . 1828
N. I. BARENDS, te Amsterdam. 1828
F. van HEUKELOM, te Amsterdam. 1828
J. J. GASTMAN, Onderwijzer, te Amsterdam. . . . 1829
L. J. ULMAN, Arrondissements-IJker, enz., enz., te Amsterdam. 1829
M. SALOMO, Advokaat, te Amsterdam. 1829
JACOB SWART, te Amsterdam. (zie boven). . . . 1829
ISAAC WARNSINK, te Amsterdam. 1829
M. L. GOEDE, te Amsterdam. 1829
JACOB LUGT, Direct. van de Assur. Comp., te Amsterdam. 1829
R. SPRUIT, 1e Leermeester bij de Diaconie Scholen, te Amsterdam 1829
F. SCHOTBORGH, Hzn., Student, te Utrecht . . . 1829
D. HOOLA van NOOTEN, te Amsterdam. (zie boven). 1829
A. L. A. QUACK, 2e Luitenant bij de rijdende Artillerie, te Amersfoort. 1830
J. G. W. MERKES, Kapitein Ingenieur, Lid van het Bataafsch Genootschap van Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam, te 's Hertogenbosch. 1830
J. S. SPEIJER, Onderwijzer, te Amsterdam. . . . 1830
F. H. F. BAUDET, Kostschoolhouder, te 's Graveland. 1830
H. van BLANKEN, te Zwolle. (zie boven) . . . 1830
J. KOLLEWIJN, Kostschoolhouder, te Bommel. . . 1830
A. VOS, Onderwijzer, te Amsterdam 1830
J. J. GEFKEN, Student, te Leijden. 1831
H. L. van HOOFF, 1e Luiten. Ingenieur, te 's Gravenhage 1831

A. C. BELINFANTE, te Amsterdam. 1831
J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., te Amsterdam. . . 1831
S. T. BOAS, te Amsterdam. 1831
H. W. BLOEM, te Haarlem. 1831
E. BOAS, te Amsterdam 1831
S. DIK, Cornsz., Hoofd-Onderwijzer der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen, aan het Instituut van wijlen Zijne Excell. den Admiraal van Kinsbergen, te Elburg. 1831
AGNITES VROLIK, te Amsterdam. 1831
J. J. de KONING, te Haarlem. 1831
Mr. G. W. de BRUIN KOPS, Agent van den Algem. Rijks-Kassier, te Hoorn. 1832
J. van WESSEM, te Amsterdam. 1832
J. JANSZ. ALBERDA, Onderwijzer, te Amsterdam. 1832
C. BRUNINGS, Aspirant Ingenieur van den Waterstaat, thans 1e Luitenant bij de 1e Afd. Geld. Schutterij, in Zeeland. 1832
D. van LANKEREN MATTHES, Student, te Amsterdam. 1832
B. de JONGH, Student, te Utrecht 1832
R. M. C. BELINFANTE, te Amsterdam. 1832
C. BAKKER, Jansz., te Broek in Waterland. 1832
M. RODENBURG, Onderwijzer, aan de Diemerbrug. 1832
H. A. HARTOGH, te Amsterdam. 1832
G. de WAAL, te Amsterdam. 1832
A. F. MEIJER, Onderwijzer, te Monnickendam . . . 1833
W. H. ESHUIS, Onderwijzer, te Zaandam 1833
H. A. L. BOUSQUET, 1e Kapt. Ingenieur, te Maastricht. 1833
H. C. BEGEER, Kostschoolhouder, te Hasselt. 1833
P. G. CROMBET, Ridder van het Legioen van Eer, Kapit. Luitenant ter Zee, bij het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik. 1833
T. KUIJPER, Ezn., te Haarlem. 1833
J. F. LAARMAN, Phil. Nat. & Med. Student, te Amst. 1833
F. C. RADIJS, te Amsterdam. 1833
H. KLOOS, te Amsterdam. 1833
D. W. HINSE, Onderwijzer, te Amsterdam. 1833
M. R. GIESENHUIJSEN, Amsterdam. 1833
W. G. van DELDEN, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, te Amsterdam. 1833

D. N. GEERHOED, Onderwijzer, te Amsterdam . . . 1833
J. VAN MAURIK, te Amsterdam 1833
C. J. DE LEEUW, te Amsterdam 1833
S. M. POPPERS, Beëedigd Translateur, te 's Gravenhage. 1833
H. A. VAN DER SPEK OBREEN, Onder-Constructeur der 2e Klasse, te Willemsoord. 1834
ADRIANUS HOEN, Kostschoolhouder, te Hattem. . . 1834
T. DE VET, Arrondissements-IJker, te Delft. 1834
H. W. WEIJTINGH, te Amsterdam. 1834
H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, Kadet der Genie 1834
aan het Konink. Instit. voor de Marine, te Medemblik. 1834
F. STUART, Kostschoolhouder, te Vianen 1834
G. J. KAPTEIJN, te Bodegraven 1834
M. PRUIJM, Mede-Onderwijzer aan de Latijnsche School, te Almelo. 1834
K. DEKKER, Lzn., Onderwijzer, te Nieuwendam. . 1834
S. M. EDERSHEIM, Onderw. in de Wisk., te 's Gravenhage. 1834
D. WOLFSON, te 's Gravenhage. 1834
J. C. G. VAN BENTHEM, te Hengelo, in Overijssel. . 1834
D. F. E. MEYER, Student, te Amsterdam. 1834
JACOBUS SJOENIS, Mr. Timmerman, te 's Graveland. 1834
DIRK BAS BACKER, Aspirant der Artillerie in Garnizoen, te Naarden. 1834
L. VAN DE KASTEELE, Assistent bij den Waterstaat, te 's Gravenhage. 1834
J. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, te Amsterdam. 1834
J. VAN DAM, Tz., Onderwijzer, te Hoorn. 1834
W. VAN LOON, te Amsterdam. 1834
J. R. T. ORTT, te Amsterdam. 1834
J. M. OBREEN, Onderwijzer in het Regtlijning en Zeevaartkundig Teekenen, aan het Koninklijke Instituut voor de Marine, te Medemblik. 1834
E. J. JACOBS, 2e Luitenant der Artillerie, in Garnizoen, te Bergen op Zoom. 1834
L. LIEUWES, Onderwijzer in de Wis- en Zeevaartkunde, aan de Kweekschool voor de Zeevaart, te Amsterdam. 1834
HERMAN HALLO, Instituteur, te Amsterdam. . . . 1834
B. P. G. VAN DIGGELEN, Aspirant Ingenieur van den Waterstaat, te Zwolle. 1833

GERRIT KOSTER, Onderwijzer, te Schoorldam . . . 1835
P. J. L. QUANT, Onder-Constructeur der Marine, te Amsterdam. 1835
J. G. J. VAN ROOSMALEN, te Amsterdam. 1835
E. GOEDHART, Onderwijzer in de Mathesis aan het Instituut, te Doesburg. 1835
J. VAN VARIK, Openbaar Onderwijzer, te 's Graveland. 1835
B. VAN DEN EEZE, CZN., te Weesp. 1835
.... LEVIÉ, Medicinae Doctor, te Rotterdam. . . . 1835
H. AMESHOFF, Student, te Amsterdam. 1836
H. J. BARNEKATE, Openbaar Onderwijzer, te Almelo. 1836
A. D. TEYLER VAN HALL, Aspirant der Artillerie in Garnizoen, te Naarden. 1836
K. E. ALTHEER, Sergeant Aspirant der Artillerie in Garnizoen, te Naarden. 1836
J. M. CALISCH, Onderwijzer, te Amsterdam 1836
A. A. HOLST, Onderwijzer, te Amsterdam. 1836
W. HAGENZIEKER, Onderwijzer, te Amsterdam. . . 1836
J. C. OLIVIER, te Zierikzee. 1836

WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DERZELVER

ONTBINDINGEN.

I. Voorstel.
Door U. Huguenin.

Als een gegeven cirkel, op zijnen omtrek, over eene regte lijn wordt voortgeschoven, en uit twee in deze lijn bepaalde punten A en B, aan dezen cirkel, in elk van deszelfs standen, raaklijnen AE en BE worden getrokken, die elkander in het punt E snijden, vraagt men de vergelijking der kromme lijn te vinden, in welke al de snijpunten E der aldus getrokkene raaklijnen gelegen zijn?

Opgelost *door* U. Huguenin, L. J. Ulman, H. van Blanken, I. Warnsinck, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes *en* G. de Waal.

Oplossing *van* U. Huguenin.

§ 1. Bij dit voorstel komen drie verschillende gevallen in aanmerking; de afstand namelijk, der punten A en B, kan grooter, gelijk of kleiner dan de middellijn des bewegenden cirkels zijn; wij zullen elk dezer gevallen afzonderlijk gadeslaan.

Eerste geval.

§ 2. Nemen wij de lijn XX′ (Fig. 1), waarover de cirkel wordt voortgeschoven, tot as der abscissen aan; laten A en B de bepaalde punten in die lijn zijn, waar uit de raaklijnen moeten getrokken worden; nemen wij dan voor as der ordinaten eene lijn YY′ aan, regthoekig door het midden D van AB gaande, en laat C het middelpunt van den bewegenden cirkel in eene van deszelfs standen zijn, dan zal het punt E, waarin de raaklijnen AE en BE elkander snijden, een onbepaald punt der bedoelde kromme lijn wezen.

Om derzelver vergelijking te vinden, trekke men uit C en E de lijnen CG en EF loodregt op XX′ en stelle
AD = BD = a, de straal CG = r, DF = x, EF = y, DG = z,

dan is $AG = a + z$, $BG = a - z$, $AF = a + x$, $BF = a - x$; de lijnen AC en BC getrokken hebbende, heeft men verder, uit de regthoekige driehoeken AGC en BGC,

$$Tang.\,CAG = \frac{CG}{AG} = \frac{r}{a+z} \text{ en } Tang.\,CBG = \frac{CG}{BG} = \frac{r}{a-z},$$

terwijl, omdat AC en BC de hoeken EAF en EBF midden doordeelen,

$$Tang.\,EAF = \frac{2\,Tang.\,CAG}{1 - Tang.^2\,CAG} \text{ en } Tang.\,EBF = \frac{2\,Tang.\,CBG}{1 - Tang.^2\,CBG}$$

is; hierin voor *Tang.* CAG en *Tang.* CBG hunne bovenstaande waarden schrijvende, verkrijgt men

$$Tang.\,EAF = \frac{2\,r\,(a+z)}{(a+z)^2 - r^2} \text{ en } Tang.\,EBF = \frac{2\,r\,(a-z)}{(a-z)^2 - r^2};$$

maar uit de regthoekige driehoeken EAF en EBF heeft men ook terstond

$$Tang.\,EAF = \frac{EF}{AF} = \frac{y}{a+x} \text{ en } Tang.\,EBF = \frac{EF}{BF} = \frac{y}{a-x},$$

en derhalve is

$$\frac{y}{a+x} = \frac{2\,r\,(a+z)}{(a+z)^2 - r^2} \text{ en } \frac{y}{a-x} = \frac{2\,r\,(a-z)}{(a-z)^2 - r^2};$$

uit deze vergelijkingen de breuken wegmakende en alles ontwikkelende, verkrijgt men

$$a^2y + 2ayz + yz^2 - r^2y = 2a^2r + 2arx + 2arz + 2rxz \;(1)$$

en

$$a^2y - 2ayz + yz^2 - r^2y = 2a^2r - 2arx - 2arz + 2rxz \;(2);$$

als men nu deze vergelijkingen (1) en (2) bij elkander optelt en van elkander aftrekt, de uitkomst telkens door 2 deelende, zoo komt er

$$a^2\,y + y\,z^2 - r^2\,y = 2\,a^2\,r + 2\,r\,x\,z \;\ldots\; (3)$$

en $2\,a\,y\,z = 2\,a\,r\,x + 2\,a\,r\,z \;\ldots\ldots\; (4)$;

uit (4) volgt terstond

$$z = \frac{r\,x}{y - r} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (5)$$

en deze waarde van z in (3) overbrengende, vindt men

$$a^2\,y + \frac{y\,r^2\,x^2}{(y-r)^2} - r^2\,y = 2\,a^2\,r + \frac{2\,r^2\,x^2}{y - r},$$

of na herleiding

$$r^2\,x^2\,(y - 2\,r) = \left\{(a^2 - r^2)\,y - 2\,a^2\,r\right\}(y - r)^2 \;\ldots\; (6),$$

welke laatste vergelijking die der bedoelde kromme lijn is.

§ 3. Om, door middel deser vergelijking, eenige eigenschappen onzer kromme lijn op te sporen, beginnen wij met uit dezelve te trekken

$$x = \pm \frac{y-r}{r} \sqrt{\frac{(a^2-r^2)\,y-2\,a^2\,r}{y-2\,r}} \quad . \; . \; (7),$$

dan blijkt vooreerst uit het dubbele teeken, dat deze waarde van x heeft, dat de kromme lijn ter wederzijden van de as YY′ volmaakt van denzelfden vorm is; neemt men $y = 0$, zoo vindt men $x = \mp a$, waaruit blijkt dat de kromme door de punten A en B gaat; neemt men $x = 0$, dan volgt uit (6)

$$\{(a^2-r^2)\,y-2\,a^2\,r\}\,(y-r)^2 = 0,$$

deze vergelijking heeft twee gelijke wortels $y = r$ en eene andere $y = \frac{2\,a^2\,r}{a^2-r^2} = 2\,r + \frac{2\,r^3}{a^2-r^2}$, makende dus (Fig. 2.) $DC = r$ en $DE = 2\,r + \frac{2\,r^3}{a^2-r^2}$, zoo zal de kromme lijn twee malen door het punt C gaan, terwijl E mede een punt der kromme zal wezen, dat gemakkelijk geconstrueerd wordt, indien men slechts uit C als middelpunt met CD als straal eenen cirkel beschrijft en daaraan uit A en B raaklijnen trekt, want deze raaklijnen zullen elkander in het bedoelde punt E snijden.

De teller der breuk, onder het wortelteeken in (7) voorkomende, zal positief of negatief zijn naar gelang men heeft

$$(a^2-r^2)\,y > 2\,a^2\,r \qquad \text{of } (a^2-r^2)\,y < 2\,a^2\,r$$

of, het geen hetzelfde is, naar gelang

$$y > \frac{2\,a^2\,r}{a^2-r^2} = 2\,r + \frac{2\,r^3}{a^2-r^2} \text{ of } y < \frac{2\,a^2\,r}{a^2-r^2} = 2\,r + \frac{2\,r^3}{a^2-r^2}$$

is; neemt men dus

$$y > 2\,r = DH \qquad \text{en } y < 2\,r + \frac{2\,r^3}{a^2-r^2} = DE,$$

zoo wordt de teller der genoemde breuk negatief, de noemer positief en bij gevolg x onbestaanbaar, waaruit blijkt, dat tusschen de lijnen PP′ en QQ′ respectievelijk door H en E evenwijdig met AB getrokken, geene punten der kromme lijn liggen. Neemt men echter $y > 2r + \frac{2r^3}{a^2-r^2}$, dan worden de teller en noemer beide positief; neemt men y positief en kleiner dan $2r$, of neemt men y negatief dan worden teller

en noemer der breuk beide negatief; in deze gevallen blijft x dus altijd bestaanbaar, en de waarden van y kunnen zich derhalve boven QQ′ en beneden PP′ tot in het oneindige uitbreiden.

Stellen wij $y = 2r$, zoo vindt men uit (7) $x = \pm \infty$, waaruit blijkt, dat PP′ eene asymptote der kromme is; en stellen wij $y = \pm \infty$, dan wordt volgens (7) mede $x = \pm \infty$, waaruit volgt, dat de kromme lijn, behalve de oneindige takken, waaraan PP′ asymptote is, nog vier zulke oneindig voortloopende takken heeft; namelijk ééne in elk van de vier hoeken der coördinaten-assen.

Nemen wij $x = \pm a$, waardoor wij veronderstellen, dat de bewegende cirkel in zoodanigen stand C′ (Fig. 2), is gekomen, dat eene der raaklijnen AE of BE regthoekig op AB is komen te staan, dan geeft ons de vergelijking (6)

$$r^2 a^2 (y - 2r) = \left\{(a^2 - r^2)\, y - 2a^2 r\right\} (y - r)^2$$

of, na behoorlijke ontwikkeling,

$$y^3 - \frac{2r(2a^2 - r^2)}{a^2 - r^2} y^2 + \frac{r^2(4a^2 - r^2)}{a^2 - r^2} y = 0;$$

deze vergelijking in de factoren

$$y\left\{y - \frac{r(2a - r)}{a - r}\right\} . \left\{y - \frac{r(2a + r)}{a + r}\right\} = 0$$

kunnende ontbonden worden, zoo is voor $x = \pm a$

$$y = 0\ ,\ y = 2r + \frac{r^2}{a - r} \text{ en } y = 2r - \frac{r^2}{a + r};$$

de waarde van $y = 0$ toont op nieuw aan, dat de kromme lijn door de punten A en B gaat; uit de beide andere waarden van y volgt, dat, indien men uit A en B loodlijnen AI en BI op AB oprigt en daarop $AE' = BE' = 2r + \frac{r^2}{a - r}$, $AE'' = BE'' = 2r - \frac{r^2}{a + r}$ neemt, de punten E′ en E″ alle tot onze kromme lijn zullen behooren; deze punten zijn mede gemakkelijk te construeeren, men beschrijve daartoe den bewegenden cirkel, in de vier standen C′ en C″, waarin dezelve AI en BI aanraakt, en trekke uit B en A aan die cirkels de andere raaklijnen BE′, AE′, BE″ en AE″, dan zullen deze laatste de lijnen AI en BI in de gezochte punten E′ en E″ snijden.

§ 4. Laat men den cirkel nog verder naar de zijde van X voortschuiven, dan dezelve in den stand C‴ (Fig. 2) is

voorgesteld, dan zal de hoek ABE′ stomp worden; deze stompheid zal toenemen, de hoek BAE′ zal scherper en de hoek AE′B zal kleiner worden, tot dat, de laatste gelijk nul wordende, de lijnen AE′ en BE′ in eenen evenwijdigen stand komen. In dien toestand zullen de hoeken EAF en EBF (Fig. 1.) elkanders supplementen zijn, en wij kunnen dus den stand van den bewegenden cirkel, waarbij deze evenwijdigheid der raaklijnen plaats heeft, bepalen door de vergelijking

$$\textit{Tang.}\,\mathrm{EAF} = -\,\textit{Tang.}\,\mathrm{EBF};$$

schrijven wij hierin voor *Tang.* EAF en *Tang.* EBF de waarden in § 2 gevonden, dan komt er

$$\frac{2r(a+x)}{(a+x)^2 - r^2} = -\frac{2r(a-x)}{(a-x)^2 - r^2},$$

waaruit men gemakkelijk vindt

$$x^2 = a^2 - r^2 \qquad \text{en dus } x = \pm\sqrt{(a^2 - r^2)};$$

nemende dus (Fig. 3.) DG $= \sqrt{(a^2 - r^2)}$, en stellende den cirkel C zoodanig, dat zij AB in G raakt, dan zullen de raaklijnen AM en BN uit A en B aan den cirkel getrokken evenwijdig zijn, hun snijpunt ligt dus op eenen oneindigen afstand en bijgevolg is hier de tak EE′ der kromme lijn tot in het oneindige voortgegaan. Voor $x^2 = a^2 - r^2$ heeft men dan ook, uit de vergelijking (5),

$$\frac{r^2 x^2}{(y-r)^2} = a^2 - r^2,$$

hierin de waarde van $r^2 x^2$ uit (6) overbrengende, vindt men

$$\frac{(a^2 - r^2)\,y - 2a^2 r}{y - 2r} = a^2 - r^2$$

of $a^2 y - r^2 y - 2a^2 r = a^2 y - r^2 y - 2a^2 r + 2r^3$, aan welke vergelijking alleen door $y = \pm\infty$ kan voldaan worden. Het is voorts duidelijk, dat het dubbele teeken voor de waarde van x alleen aanwijst, dat men ook DG′ $= \sqrt{(a^2 - r^2)}$ nemende, aan de andere zijde van D het punt G′ verkrijgt in allen deele met het punt G overeenkomende.

Brengt men in de vroeger gevondene waarde voor *Tang.* EAF deze waarde van x over, dan verkrijgt men

$$\textit{Tang.}\,\mathrm{MAB} = \frac{2r(a + \sqrt{(a^2 - r^2)})}{(a + \sqrt{(a^2 - r^2)})^2 - r^2} = \frac{r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}};$$

door deze formule is de rigting van de lijnen AM en BN bekend; men kan dezelve echter zonder deze formulen te gebruiken gemakkelijk construeeren, daartoe beschrijve men op AB eenen halven cirkel, en trekke eene lijn evenwijdig met AB, op eenen afstand gelijk aan den straal r, dan zal het snijpunt van laatstgenoemde lijn en halven cirkel het middelpunt zijn van den cirkel C, in dien stand geplaatst, dat de raaklijnen AM en BN, uit A en B aan denzelven getrokken, evenwijdig zijn; want CG loodregt op AB, gelijk mede CD getrokken hebbende, is $DG = \sqrt{(CD^2 - CG^2)} = \sqrt{(a^2 - r^2)}$.

§ 5. Ofschoon de lijnen AM en BN een oneindig afgelegen punt der kromme lijn doen kennen, kan men hieruit geenszins afleiden, dat deze lijnen beide of een van beide asymptoten der kromme lijn zijn zouden; om echter op de gewone wijze, door behulp der differentiaalrekening, te onderzoeken of de bedoelde oneindig voortloopende tak eene asymptote heeft, en zoo ja, die asymptote te bepalen, dit zoude hier vrij omslagtig zijn, en wij willen dus ter bereiking van dit oogmerk eenen anderen weg inslaan. Wij vinden namelijk uit de vergelijking (6)

$$r^2 x^2 = \frac{\{(a^2 - r^2)\, y - 2\, a^2\, r\}\, (y - r)^2}{y - 2\, r},$$

de teller ontwikkelende, wordt dit

$$r^2 x^2 = \frac{(a^2 - r^2)\, y^3 - 2r\, (2\, a^2 - r^2)\, y^2 + r^2\, (5a^2 - r^2) - 2\, a^2 r^3}{y - 2\, r};$$

en alsnu de aangewezene deeling werkelijk verrigtende,

$$r^2 x^2 = (a^2 - r^2)\, y^2 - 2\, a^2\, r\, y + r^2\, (a^2 - r^2) - \frac{2\, r^5}{y} \text{ enzv.};$$

stellen wij, om uit deze vergelijking den vierkantswortel te trekken.

$$\pm\, r\, x = A\, y + B + \frac{C}{y} + \frac{D}{y^2} + \text{enzv.}$$

dan vinden wij door magtsverheffing

$$r^2 x^2 = A^2\, y^2 + 2\, AB\, y + (B^2 + 2AC) + \frac{2\,(BC + AD)}{y} + \text{enz.}$$

en ter bepaling der coëfficienten A, B, C, D, enz. hebben wij alzoo de vergelijkingen

$A^2 = a^2 - r^2$; $2AB = -2a^2 r$, $B^2 + 2AC = r^2(a^2 - r^2)$,
$2(BC + AD) = -2r^5$, enz.
waaruit men vindt

$$A = \sqrt{(a^2 - r^2)}\ ,$$

$$B = -\frac{a^2 r}{A} = -\frac{a^2 r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}\ ,$$

$$C = \frac{r^2(a^2 - r^2) - B^2}{2A} = -\frac{r^4(2a^2 - r^2)}{2\sqrt{(a^2 - r^2)^3}}\ ,$$

$$D = -\frac{r^5 + BC}{A} = -\frac{r^5(4a^4 - 5a^2 r^2 + 2r^4)}{2\sqrt{(a^2 - r^2)^5}}, \text{ enz.}$$

zoo dat men heeft

$$rx = y\sqrt{(a^2 - r^2)} - \frac{a^2 r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} - \frac{r^4(2a^2 - r^2)}{2y\sqrt{(a^2 - r^2)^3}} - \frac{r^5(4a^4 - 5a^2 r^2 + 2r^4)}{2y^2\sqrt{(a^2 - r^2)^5}} \text{ enz.};$$

daar nu voor eene asymptote x en y oneindig groot moeten zijn, zoo kunnen wij al de termen, die in den noemer y of magten van y bevatten, weglaten, waardoor wij verkrijgen

$$\pm rx = y\sqrt{(a^2 - r^2)} - \frac{a^2 r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}$$

welke vergelijking tot eene regte lijn behoorende, de vergelijking van de gezochte asymptote is. (Zie J. B. Biot. *Essai de Geöm. Anal.* 6e edit. page 366.) Om de ligging dezer asymptote meer van nabij te bepalen, stelle men in de laatste vergelijking $x = o$, waardoor men vindt $y = \frac{a^2 r}{a^2 - r^2} = r + \frac{r^3}{a^2 - r^2}$; ook stelle men $y = o$, waaruit volgt $x = \mp \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}$; nemende dus (Fig. 3.) $DT = DT' = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} > a$ en $DO = r + \frac{r^3}{a^2 - r^2}$, dan zijn de lijnen, door T en O, gelijk mede door T' en O getrokken, asymptoten onzer kromme. Uit den driehoek OT'D heeft men

$$\textit{Tang.}\ OT'D = \frac{OD}{T'D} = \frac{r + \frac{r^3}{a^2 - r^2}}{\frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}} = \frac{r}{\sqrt{(a^2 - r^2)}}$$

deze waarde dezelfde zijnde als die voor *Tang.* MAB in § 4. gevonden, zoo volgt hieruit dat OT' en AM evenwijdig zijn; en $DO = r + \frac{r^3}{a^2 - r^2}$ juist de halve waarde heb-

bende der lijn DE in § 3. bepaald, zoo blijkt dat de asymptoten de lijn DE in O midden door deelen en bij gevolg terstond kunnen geconstrueerd worden, door slechts eene lijn evenwijdig aan AM door het midden van DE te trekken.

§ 6. Beweegt men den cirkel nog verder naar de zijde van X (Fig. 3.), zoodanig dat G nader bij B komt, dan zullen de verlengden AM′ en BN′ van de evenwijdige lijnen AM en BN elkander beneden de lijn AB gaan snijden; hoe meer de cirkel van G naar B geschoven wordt, des te nader zal dit snijpunt bij de lijn AB komen, tot dat, de cirkel in B gekomen zijnde, de lijn BN′ langs AB en dus het snijpunt in A valt; de kromme lijn heeft dus beneden AB een oneindige tak, waaraan OT′ asymptote is, en die door het punt A gaat; beweegt men den cirkel al verder naar de zijde van X, dan komt de lijn BN′, en dus ook haar snijpunt met AM, weder boven AB; meer en meer nadert dit snijpunt tot de lijn PP′ (Fig. 2.) maar kan nooit in dezelve vallen, weshalve de kromme lijn, na door A gegaan te zijn, weder boven AB langs PP′ als asymptote tot in het oneindige voortgaat; zijnde het uit het vroeger gezegde klaar, dat deze tak door het middelpunt C en het punt E′ gaat. Indien men den cirkel C (Fig. 2.) naar de zijde van X′ voortschuift, wordt op gelijke wijze eenen tak der kromme gevormd, die door de punten B, C en E′ loopt en de lijnen PP′ (Fig. 2.) en OT (Fig. 3.) tot asymptoten heeft.

§ 7. Om de rigting van de raaklijnen, aan onderscheidene punten onzer kromme getrokken, te bepalen, zoo mede om het bestaan van buigpunten te onderzoeken, zoude men uit de vergelijking (7) de differentiaal quotienten $\frac{\partial x}{\partial y}$ en $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ moeten opmaken. Daar dit echter op de gewone wijze eene vrij lastige bewerking zoude veroorzaken, zullen wij x, y, $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$, alle in functie van x trachten uit te drukken.

Hiertoe trekken wij uit (6)

$$\frac{(a^2 - r^2)\, y - 2\, a^2\, r}{y - 2r} = \frac{r^2 x^2}{(y - r)^2},$$

en, daar volgens (5) het tweede lid der laatste vergelijking gelijk aan z^2 is, hebben wij ook

$$\frac{(a^2-r^2)\,y-2\,a^2\,r}{y-2\,r}=z^2,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$y=\frac{2\,r\,(a^2-z^2)}{a^2-r^2-z^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ (8);$$

verder heeft men uit (5)

$$x=\frac{z\,(y-r)}{r},$$

hierin voor y de gevondene waarde (8) stellende, komt er na herleiding

$$x=\frac{z\,(a^2+r^2-z^2)}{a^2-r^2-z^2}\quad\ldots\ldots\ (9);$$

differentieert men nu de vergelijkingen (8) en (9), dan vindt men gemakkelijk

$$\delta y=\frac{4\,r^3\,z}{(a^2-r^2-z^2)^2}\,\delta z\quad\ldots\ldots\ (10)$$

en $$\delta x=\frac{(a^2-z^2)^2-r^2\,(r^2-4\,z^2)}{(a^2-r^2-z^2)^2}\,\delta z\quad\ldots\ (11),$$

waaruit volgt $$\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{(a^2-z^2)^2-r^2\,(r^2-4\,z^2)}{4\,r^3\,z}\quad(12);$$

differentieert men (12), zoo vindt men na herleiding

$$\frac{\delta^2 x}{\delta y}=-\frac{(3\,z^2+a^2+r^2)\,(a^2-r^2-z^2)}{4\,r^3\,z^2}\,\delta z,$$

en deelende deze vergelijking door (10), dan komt er

$$\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}=-\frac{(3\,z^2+a^2+r^2)\,(a^2-r^2-z^2)^3}{16\,r^6\,z^3}\quad.\ (13).$$

§ 8. Daar nu gelijk men weet de uitdrukking (12),

$$\frac{\delta x}{\delta y}=\frac{(a^2-z^2)^2-r^2\,(r^2-4\,z^2)}{4\,r^3\,z},$$

de trigonometrische Tangens van den hoek voorstelt, waar onder eene raaklijn der kromme de as YY′ snijdt, zoo vinden wij de punten, waar deze raaklijn evenwijdig met XX′ loopt, door te stellen $\frac{\delta x}{\delta y}=\infty$; hieraan kan alleen voldaan worden, door te nemen $z=0$ of $z=\infty$; waaruit blijkt, dat de raaklijn in het punt E en de asymptote PP′ (Fig. 2.) de eenige raaklijnen zijn, die evenwijdig met XX′ loopen. Om de raaklijnen te vinden, die evenwijdig met YY′ loopen, moet men $\frac{\delta x}{\delta y}=0$ nemen; hieraan kan alleen voldaan wor-

den, door te stellen

$$(a^2 - z^2)^2 - r^2 (r^2 - 4 z^2) = 0,$$

waaruit men vindt

$$z^2 = a^2 - 2 r^2 \pm r \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)};$$

hoezeer nu in het geval, met welks behandeling wij thans nog bezig zijn, $r < a$ is, kan echter $5 r^2 > 4 a^2$, en dus de waarde van z^2 bestaanbaar wezen; maar ontbindt men deze waarde van z^2 in factoren, namelijk

$$z^2 = -\tfrac{1}{4} (r \mp \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)}) (3 r \mp \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)}),$$

dan blijkt dat z^2 slechts eene negatieve waarde kan hebben; voor de benedenste teekens is zulks duidelijk; voor de bovenste teekens is het vooreerst klaar, dat $\sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)} < 3 r$ en dus de factor $3 r - \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)}$ positief is, zoude dus z^2 positief zijn, zoo moest de factor $r - \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)}$ negatief en bij gevolg $r < \sqrt{(5 r^2 - 4 a^2)}$ of $r^2 < 5 r^2 - 4 a^2$, $4 a^2 < 4 r^2$, en $a < r$ wezen; zoo lang derhalve $r < a$ is, moet z^2 negatief en z onbestaanbaar zijn, zoodat in het geval, dat wij thans behandelen, de kromme lijn geene raaklijnen evenwijdig met YY' hebben kan.

§ 9. Zullen er in onze kromme lijn buigpunten bestaan, dan moet $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = 0$ of $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = \infty$ zijn; om $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = \infty$ te hebben, zoude men volgens (13) $z = 0$ of $z = \infty$ moeten stellen, doch uit al het vorige is het klaar, dat hierdoor geen buigpunt kan aangewezen worden; om $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = 0$ te hebben, zoude men volgens (13) moeten stellen

$$3 z^2 + a^2 + r^2 = 0 \qquad \text{en} \quad a^2 - r^2 - z^2 = 0;$$

de eerste dezer vergelijkingen geeft voor z slechts eene onbestaanbare waarde, terwijl de tweede geeft $z = \pm \sqrt{(a^2 - r^2)}$; deze laatste waarde van z is dezelfde, die wij in § 4. gevonden hebben voor het oneindig afgelegen punt der kromme, op het oogenblik, dat de lijnen AM en BN (Fig. 3.) evenwijdig worden en alzoo ophielden elkander te snijden, zoodat ook deze waarde voor z geen buigpunt aanwijst; waaruit wij dus besluiten, dat onze kromme lijn geene buigpunten heeft.

§ 10. Alzoo ons nu den vorm der kromme, voor zoover het eerste geval betreft, genoegzaam bekend is geworden,

zullen wij dit eerste geval besluiten, met, bij de afbeelding in Fig. 4. voorgesteld, het onderstaand tafeltje te voegen, dat door de vergelijkingen (8), (9) en (12) is opgemaakt, en waaruit men zeer geleidelijk kan nagaan, hoe de deelen der kromme lijn achtervolgens, door het voortschuiven des cirkels, geboren worden. Men heeft namelijk *in* Fig. 4:

voor het punt E,

$$s = 0, \quad x = 0, \quad y = 2r + \frac{2r^3}{a^2 - r^2}, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \infty;$$

voor het punt F,

$$s = a - r, \quad x = a, \quad y = 2r + \frac{r^2}{a - r}, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2a - r}{r};$$

voor de oneindig afgelegen punten G,

$$s = \sqrt{(a^2 - r^2)}, \quad x = \pm\infty, \quad y = \pm\infty, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{r};$$

voor het punt A,

$$s = a, \quad x = -a, \quad y = 0, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{4a^2 - r^2}{4ar};$$

voor het punt C van den tak AC,

$$s = \sqrt{(a^2 + r^2)}, \quad x = 0, \quad y = r, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\sqrt{(a^2 + r^2)}}{r};$$

voor het punt H,

$$s = a + r, \quad x = a, \quad y = 2r - \frac{r^2}{a + r}, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2a + r}{r};$$

voor het oneindig afgelegen punt I,

$$s = \infty, \quad x = +\infty, \quad y = 2r, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \infty;$$

voor het oneindig afgelegen punt K,

$$s = -\infty, \quad x = -\infty, \quad y = 2r, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = \infty;$$

voor het punt L,

$$s = -(a + r), \quad x = -a, \quad y = 2r - \frac{r^2}{a + r}, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{2a + r}{r};$$

voor het punt C van den tak BC,

$$s = -\sqrt{(a^2 + r^2)}, \quad x = 0, \quad y = r, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{\sqrt{(a^2 + r^2)}}{r};$$

voor het punt B,

$$s = -a, \quad x = a, \quad y = 0, \quad \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{4a^2 - r^2}{4ar};$$

voor de oneindig afgelegen punten M,

$$s = -\sqrt{(a^2 - r^2)},\ x = \pm\infty,\ y = \mp\infty,\ \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{\sqrt{(a^2 - r^2)}}{r};$$

voor het punt N,

$$s = -(a - r),\ x = -a,\ y = 2r + \frac{r^2}{a - r},\ \frac{\delta x}{\delta y} = -\frac{2a - r}{r}.$$

Tweede geval.

§ 11. Wij veronderstellen thans dat de afstand der punten A en B (Fig. 5.) gelijk is aan de middellijn des bewegenden cirkels C; voor dit geval wordt de vergelijking der kromme lijn oogenblikkelijk gevonden, door in de vorige vergelijkingen (6) en (7) $a = r$ te stellen, waardoor dezelve na vereenvoudiging overgaan in

$$x^2(2r - y) = 2r(y - r)^2 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

en

$$x = \pm\frac{(y - r)\sqrt{2r}}{\sqrt{(2r - y)}} \quad \ldots\ldots \quad (15);$$

uit het dubbele teeken voor de waarde van x blijkt weder dat de as YY' de kromme lijn in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeelt; voor $y = o$ vindt men $x = \mp r$, de kromme lijn gaat dus weder door de punten A en B; stelt men in (14) $x = o$, dan verkrijgt die vergelijking weder twee gelijke wortels $y = r$, weshalve de kromme weder tweemalen door het punt C gaat; neemt men y positief en grooter dan $2r$, zoo wordt x onbestaanbaar, de kromme lijn heeft dus geene punten boven de lijn PP'; neemt men y positief kleiner dan $2r$, of neemt men y negatief, dan blijft x altijd bestaanbaar, tot dat voor $y = -\infty$ ook $x = \infty$ wordt; de kromme lijn breidt zich dus beneden PP' tot in het oneindige uit, met twee takken ter wederzijde van YY' gelegen; voor $y = 2r$ wordt $x = \pm\infty$, de lijn PP' is alzoo eene asymptote aan de beide takken der kromme lijn; stelt men in de vergelijking (14) $x = \pm r$, zoo vindt men voor y de twee waarden $y = 0$ en $y = \frac{4}{3}r$, deze eerste waarde van y toont op nieuw aan dat de kromme door de punten A en B gaat, de tweede leert dat de loodlijnen, uit A en B op AB opgerigt, door de kromme gesneden worden in de punten E en E', die zoodanig gelegen zijn dat AE = BE' = $1\frac{1}{3}r$ is.

Stelt men in de vergelijking, die wij in het eerste geval (§. 5.) voor de asymptoten OT vonden, $a = r$, zoo wordt

die vergelijking $x = \pm \infty$, welke vergelijking leert, dat die asymptoten alsnu niet meer bestaan, maar dat de takken der kromme beneden AB gelegen meer en meer tot de evenwijdigheid met YY′ naderen.

Voor de differentiaal quotienten der vergelijking (15), vindt men gemakkelijk

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{(3r - y)\sqrt{2r}}{2\sqrt{(2r-y)^3}} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{(5r - y)\sqrt{2r}}{4\sqrt{(2r-y)^5}} \quad \ldots\ldots \quad (17);$$

het eerste dezer differentiaal quotienten wordt, voor $y = 2r$, $\frac{\partial x}{\partial y} = \infty$, waardoor de asymptote PP′ wordt aangewezen; voor $y = -\infty$, wordt $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, hetwelk bevestigt dat de takken beneden AB meer en meer trachten evenwijdig met YY′ te worden; voor $y = 3r$, zoude ook wel $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ worden, maar deze waarde van y maakt x onbestaanbaar, zoodat hieruit geen nut kan getrokken worden. Het tweede der laatstgenoemde differentiaal quotienten kan geen nul of oneindig worden, dan door te nemen $y = 2r, y = -\infty$ of $y = 5r$; de twee eerste dezer waarden voor y behooren tot oneindig afgelegen punten der kromme, en de derde maakt x onbestaanbaar, waaruit weder volgt, dat ook in het tweede geval onze kromme lijn geene buigpunten heeft.

§ 12. Veronderstellen wij dat voor het tegenwoordige geval, de cirkel in den stand C (Fig. 5.) geplaatst is, dan snijden de raaklijnen AE en BE′ elkander niet; zoodra echter de cirkel naar den kant van B wordt verschoven, zullen die raaklijnen elkander beneden AB snijden en dit snijpunt zal, gedurende het voortschuiven des cirkels van D naar B, het gedeelte MA der kromme beschrijven, totdat, de cirkel in B gekomen zijnde, de kromme in A komt; en wordt de cirkel verder van B naar X tot in het oneindige voortgeschoven, dan beschrijft het snijpunt der raaklijnen het gedeelte ACE′N. Wordt de cirkel van D naar X′ tot in het oneindige verschoven, dan beschrijft het snijpunt der raaklijnen op gelijke wijze den tak der kromme M′BCEN′.

De verandering die door het nemen van $a = r$ aan de

kromme lijn van Fig. 4. is toegebragt, kan men zich aldus voorstellen, dat de elkander in O snijdende asymptoten, om derzelver oneindig afgelegen punten beneden AB, zoodanig zijn omgedraaid, dat zij evenwijdig met YY′ zijn geworden en dat daardoor hun snijpunt O, naar de zijde van Y, in het oneindige is verdwenen, tevens met den geheelen tak MNEFG der kromme.

Derde geval.

§ 13. Nemen wij eindelijk aan, dat de afstand der punten A en B (Fig. 6.) kleiner is, dan de middellijn des cirkels, dan blijven de voor het eerste geval gevondene vergelijkingen wel onveranderd, maar geenzins de daaruit afgeleide gevolgen; want, bij het opmaken dier gevolgtrekkingen, hebben wij altijd ondersteld, dat $a > r$ was, daar wij nu in tegendeel moeten in het oog houden dat $a < r$ is. Schrijven wij dus, voor dit geval de vergelijkingen (6) en (7) aldus:

$$r^2 x^2 (2r - y) = \{(r^2 - a^2) y + 2 a^2 r\} (y - r)^2 \quad . \quad (18)$$

$$x = \pm \frac{y - r}{r} \sqrt{\frac{(r^2 - a^2) y + 2 a^2 r}{2r - y}} \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

dan vinden wij, even als bij het eerste geval, dat de kromme lijn door de as YY′ in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld wordt, en dat dezelve door de punten A en B en tweemaal door het punt C gaat; de derde waarde voor y, die de vergelijking (18) voor $x = o$ oplevert, is nu echter

$$y = -\frac{2 a^2 r}{r^2 - a^2} = 2r - \frac{2 r^3}{r^2 - a^2}$$

en deze waarde, negatief zijnde, wijst het punt E der kromme aan, dat dadelijk geconstrueerd kan worden, door de raaklijnen AE en BE aan den cirkel te trekken, wanneer dezelve zich op het midden van AB bevindt

Neemt men $y > 2r$ en positief, zoo wordt volgens (19) x onbestaanbaar, de kromme lijn heeft dus geen punten boven de lijn PP′; neemt men $y = 2r$, zoo wordt $x = \infty$, de lijn PP′ is dus weder een asymptote; neemt men $y < 2r$ en positief, dan blijft x bestaanbaar; neemt men echter y negatief, dan wordt de noemer der breuk onder het worteltecken in (19) voorkomende positief en x zal in dat ge-

val alleen zoo lang bestaanbaar blijven, als ook de teller dier breuk positief blijft; hiertoe wordt nu gevorderd, dat

$$2a^2r > (r^2 - a^2)\,y \text{ of } y < \frac{2a^2r}{r^2-a^2} = \text{DE}$$

zij, neemt men dus $y > \frac{2a^2r}{r^2-a^2}$ en negatief, dan wordt x onbestaanbaar; trekt men derhalve door E een lijn QQ′ evenwijdig met AB dan heeft de kromme lijn geene punten beneden QQ′, maar tusschen PP′ en QQ′ kunnen de waarden van x, van o af tot in het oneindige aangroeijen. Daar alzoo y tusschen de grenzen $+2r$ en $-\frac{2a^2r}{r^2-a^2}$ moet besloten blijven, en $x = \infty$ niet anders dan voor $y = 2r$ kan plaats hebben, zoo heeft de kromme lijn geene andere oneindig voortloopende takken, dan die welke, PP′ tot asymptote hebben.

Voor $x = \pm a$ heeft men, even als bij het eerste geval,

$$y = o,\ y = \frac{r(2a+r)}{a+r} \text{ en } y = \frac{r(r-2a)}{r-a};$$

de eerste waarde van y behoort tot de punten A en B, de tweede is altijd positief en grooter dan r en behoort tot de punten E′, de derde is negatief of positief naar gelang $r < 2a$ of $r > 2a$ is, en behoort tot de punten E″ (Fig. 6 en 7.); deze punten E′ en E″ zijn overeenkomstig hetgeen bij het eerste *geval is aangewezen gemakkelijk* te construeren.

§ 14. Bij het eerste *geval* vonden wij, voor het oogenblik dat de raaklijnen AE en BE evenwijdig werden, $y = \mp\sqrt{(a^2 - r^2)}$; deze waarde in het tegenwoordige geval onbestaanbaar zijnde, blijkt het dat nu de raaklijnen AE en BE nimmer evenwijdig zullen worden. Ook wordt de vergelijking bij het eerste geval voor de asymptoten OT gevonden alsnu onbestaanbaar, zoodat deze asymptoten niet meer aanwezig zijn; en dit stemt overeen met het reeds opgemerkte, dat de kromme lijn geene andere oneindige takken heeft dan die, welke langs de asymptote PP′ loopen.

Stelt men het tweede differentiaal quotient (13) gelijk nul; dan verkrijgt men, $r > a$ zijnde, voor x slechts onbestaanbare waarden; voor $x = \infty$, wordt wel weder $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \infty$, maar deze waarde van x behoort tot de oneindig afgelegen

punten in de asymptote PP'; en derhalve heeft de kromme ook voor dit geval geene buigpunten.

§ 15. Uit (12) vinden wij, dat ook nu nog, voor $x = o$ en $x = \infty$, $\frac{\delta x}{\delta y} = \infty$ wordt, waaruit volgt, dat behalve de asymptote PP', ook hier de raaklijn aan het punt E der kromme loodregt op YY' is. De waarden, die wij echter in § 8. voor x vonden, door $\frac{\delta x}{\delta y} = o$ te stellen, en die wij aantoonden dat in het eerste geval onbestaanbaar waren, zijn zulks nu niet meer alle; wij hadden namelijk

$$x^2 = -\tfrac{1}{4}\left(r \mp \sqrt{(5r^2 - 4a^2)}\right)\left(3r \mp \sqrt{(5r^2 - 4a^2)}\right),$$

gebruikt men de benedenste teekens, dan wordt ook, voor $r > a$, x^2 negatief en dus x onbestaanbaar; maar gebruikt men de bovenste teekens, dan is, $r > a$ zijnde, $\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} > r$ en dus de factor $r - \sqrt{(5r^2 - 4a^2)}$ negatief, terwijl de factor $3r - \sqrt{(4r^2 - 4a^2)}$ klaarblijkelijk positief is, en het is dus duidelijk, dat x^2 positief en x bestaanbaar is, zoodat de punten der kromme, bij welke de raaklijn evenwijdig met YY' is, worden aangewezen, door de vergelijking

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\{3r - \sqrt{(5r^2 - 4a^2)}\}.\{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r\}}$$

of $\quad x^2 = a^2 - 2r^2 + r\sqrt{(5r^2 - 4a^2)}$;

voor deze punten zal men door (8) en (9) vinden

$$y = 2r - \frac{2r^2}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r} \quad \ldots \quad (20)$$

en $$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(3r - \sqrt{(5r^2 - 4a^2)})^3}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r}} \quad \ldots \quad (21),$$

waaruit blijkt, dat er ter wederzijde van YY' een zoodanig punt is. Omtrent deze waarde van y dient opgemerkt te worden, dat dezelve kleiner dan r is; dit kan men gemakkelijk aantoonen, want klaarblijkelijk is

$$\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} < r\sqrt{5},$$

dus $$\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r < r\sqrt{5} - r,$$

bij gevolg $$\frac{2r^2}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r} > \frac{2r^2}{r\sqrt{5} - r}$$

en $$y = 2r - \frac{2r^2}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r} < 2r - \frac{2r}{\sqrt{5} - 1} = 2r.\frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 1},$$

daar nu $\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-1} < \frac{1}{2}$ is, heeft men klaarblijkelijk $y < r$.

De punten waar de raaklijnen der kromme evenwijdig met YY' loopen, liggen dus tusschen de lijnen QQ', en RR' door C evenwijdig met AB getrokken; brengt men nu hiermede in verband, dat de raaklijn der kromme in E loodregt op YY' is, dat de kromme geene buigpunten heeft, dat er geen oneindige takken zijn, behalve die langs de asymptote PP' loopende, en eindelijk dat de kromme tweemalen door het punt C gaat, dan is het klaar, dat er tusschen RR' en QQ' een knoop gevormd wordt.

§ 16. Het gedeelte CE der as YY', dat men de grootste hoogte van dien knoop kan noemen, wordt gemakkelijk gevonden, wanneer men bij de vroeger gevondene waarde van $DE = \frac{2a^2 r}{r^2 - a^2}$ slechts $CD = r$ optelt, waardoor men verkrijgt,

$$CE = r + \frac{2a^2 r}{r^2 - a^2} = \frac{r(r^2 + a^2)}{r^2 - a^2};$$

begeerde men de grootste breedte van dien knoop MN te kennen, zoo is het genoegzaam de waarde van x in (21) gevonden, zonder op het teeken acht te slaan, te verdubbelen; dus is (Fig. 6 en 7.)

$$MN = \sqrt{\frac{(3r - \sqrt{(5r^2 - 4a^2)})^3}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r}} \quad . \quad . \quad (22);$$

of deze grootste breedte boven of beneden AB zal plaats hebben, hangt daarvan af, of de waarde van y in (20) uitgedrukt positief of negatief is; dezelve zal positief zijn, zoo lang men heeft

$$2r > \frac{2r^2}{\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r},$$

of achtervolgens $\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} - r > r$,

$$\sqrt{(5r^2 - 4a^2)} > 2r,$$

$$5r^2 - 4a^2 > 4r^2,$$

$$r^2 > 4a^2,$$

en eindelijk $r > 2a$;

dewijl dus de genoemde waarde van y positief, nul of negatief wordt, naar gelang men heeft $r > 2a$, $r = 2a$ of $r < 2a$, zal ook, naar gelang daarvan MN boven, in, of beneden AB vallen. Voor $r = 2a$ vindt men dan ook,

door (22) MN $= r = 2a$; terwijl alsdan tevens de laatste waarde van y, in § 13 vermeld, nul wordt, zoodat voor $r = 2a$ de punten M en N, E′ en E″, A en B respectievelijk in elkander vallen.

§ 17. Voor het nu afgehandelde derde geval, is de vorming der kromme lijn, door de beweging van den cirkel, wederom zeer gemakkelijk na te gaan; bevindt de cirkel zich in D, (Fig. 6.) dan is E het tot dien stand des cirkels behoorende punt der kromme; verschuift men nu den cirkel naar de zijde van X, dan beschrijft het snijpunt E der raaklijnen AE en BE den tak EMACE′, hebbende de doorgang door het punt A plaats, op het oogenblik dat de cirkel in B is gekomen; verschuift men daarentegen den cirkel uit D naar de zijde van X′, dan wordt op gelijke wijze den tak ENBCE′ beschreven, waarbij de doorgang door het punt B plaats heeft, als de cirkel zich in A bevindt.

De verandering, die, door het nemen van $a < r$, aan de kromme lijn van Fig. 5 is toegebragt, bestaat alleen daarin, dat de oneindige takken AM en BM′, die aldaar meer en meer neigden om evenwijdig met YY′ te worden, zich met elkander tot het vormen van eenen knoop vereenigd hebben.

Aanmerking, *uit eenige andere oplossingen.* Men kan, tot de vergelijking der behandelde kromme lijn, ook op de volgende wijs geraken. Uit Fig. 1 is klaarblijkelijk

$$AE = \sqrt{(AF^2 + EF^2)} = \sqrt{\{(a+x)^2 + y^2\}},$$

$$BE = \sqrt{(BF^2 + EF^2)} = \sqrt{\{(a-x)^2 + y^2\}},$$

$$\textit{Omtrek.drieh.}\,ABE = 2a + \sqrt{\{(a+x)^2+y^2\}} + \sqrt{\{(a-x)^2+y^2\}}, \text{ en}$$

$$\textit{Inhoud. drieh.}\,ABE = ar + \tfrac{1}{2}r\sqrt{\{(a+x)^2+y^2\}} + \tfrac{1}{2}r\sqrt{\{(a+x)^2+y^2\}};$$

maar men heeft ook

$$\textit{Inhoud. drieh.}\,ABE = AB \times \tfrac{1}{2}EF = ay$$

en hieruit volgt de vergelijking

$$ay = ar + \tfrac{1}{2}r\sqrt{\{(a+x)^2+y^2\}} + \tfrac{1}{2}r\sqrt{\{(a-x)^2+y^2\}},$$

welke van wortelteekens bevrijd wordende, juist dezelfde zal zijn als de vergelijking (6), die hiervoren gevonden is.

II. Voorstel.

Door F. J. Stamkart.

Wanneer een stoffelijk punt zich, op eenen afstand a van een vast middelpunt van aantrekking, in rust bevindt, en,

door de aantrekking van dit laatste, uit den staat van rust gebragt wordt, dan zal, als de afstand met a — x *verminderd is, de snelheid van het stoffelijk punt evenredig zijn met* $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$; *in de onderstelling, dat de aantrekkingskracht in de omgekeerde reden van de vierkanten der afstanden werkt. Deze uitdrukking* $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$ *onbestaanbaar wordende, wanneer men* x *negatief onderstelt, zoo schijnt hieruit te moeten volgen, dat het stoffelijk punt zich* niet verder *dan het middelpunt van aantrekking zal kunnen bewegen* (*) *en aldaar in rust zal moeten blijven; terwijl echter uit andere gronden volgt, dat het stoffelijk punt, in dit geval, door het middelpunt van aantrekking zal heensnellen, en vervolgens, aan de andere zijde tot op eenen afstand* a *gekomen zijnde, weder zal terugkeeren, enz. Men vraagt deze schijnbare tegenstrijdigheid op te lossen?*

Opgelost *door* H. van Blanken *en* F. J. Stamkart.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat het stoffelijk punt van A (Fig. 8.) naar B bewogen worden, zoodat de afstand AM = a, van het punt A tot aan het middelpunt M van aantrekking, overga in BM = x. Stelt men nu de versnelling der aantrekking in de punten A en B respectievelijk door g en G voor, dan is, omdat de aantrekking werkt in de omgekeerde reden van de vierkanten der afstanden,

$$a^2 : x^2 = G : g \text{ en dus } G = \frac{a^2 g}{x^2}.$$

Voorts is, indien men de snelheid in eenig punt der baan V, en de doorgeloopene ruimte S noemt, in het algemeen (zie J. H. Schmidt, *Beginselen der Dynamica*, pag. 169.)

$$V^2 = 4 \int G \, \partial S;$$

men zal dus, hierin $G = \frac{a^2 g}{x^2}$ en $S = a - x$ substituerende,

---

(*) Men zie: *Correspondance Mathématique et Physique*, publiée par A. Quetelet, Tom. VI, pag. 286. waar dit besluit door den Heer Pagani werkelijk getrokken wordt.

verkrijgen. $V^2 = -4a^2 g \int \frac{\delta x}{x^2}$

of integrerende $V^2 = \frac{4a^2 g}{x} + C$;

omdat zich het stoffelijk punt in A in rust bevindt, moet voor $x = a$, $V = 0$ worden; dus is $C = -\frac{4a^2 g}{a}$, en hierdoor vindt men voor de snelheid van het stoffelijk punt in B

$$V = 2a\sqrt{g}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right).$$

Men zou nu ligt kunnen denken, dat door deze formule ook nog de snelheid uitgedrukt wordt, nadat het stoffelijk punt door het middelpunt M van aantrekking is gegaan; men kan zich echter gemakkelijk overtuigen, dat alleen voor positieve waarden van x de snelheid V door bovenstaande formule wordt uitgedrukt. Is namelijk het stoffelijk punt in B', aan de andere zijde van het punt M, en bijgevolg x negatief, dan vermindert de aantrekking de snelheid in plaats van die te vermeerderen, zij komt dus als eene vertragende kracht in aanmerking, en de versnelling G moet bijgevolg negatief genomen worden. Dit geval nu kan in de bovenstaande uitdrukking voor V niet opgesloten liggen, daar dezelve uit de formule $G = \frac{a^2 g}{x^2}$ is afgeleid, waarin, voor alle waarden van x, de versnelling G positief blijft, hetgeen niet met de waarheid overeenkomstig is.

Men mag dus de bovenstaande formule voor V alleen gebruiken tot aan $x = 0$; en de snelheid V zal dus, alleen voor positieve waarden van x, evenredig zijn met $\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)}$.

De juistheid dezer verklaring kan men nog bevestigen, door te berekenen, met welke aanvankelijke snelheid men uit M een ligchaam moet opwerpen, opdat het op den afstand a eene snelheid gelijk nul hebbe, of dat het ligchaam nog juist den afstand a bereike; want blijkt hieruit, dat die aanvankelijke snelheid juist die gene is, welke het ligchaam verkregen heeft, door langs den afstand a te vallen, dan is het gestelde bewezen.

Nu heeft men bij eene vertragende kracht

$$V^2 = -4 \int G \, \delta S,$$

waarin $G = \frac{a^2 g}{x^2}$ en $S = x$ is,

dus $$V^2 = -4\, a^2 g \int \frac{\delta x}{x^2} = \frac{4\, a^2 g}{x} + C;$$

voor $x = a$ moet $V = o$ zijn, derhalve $C = -4\, a\, g$ en alzoo

$$V = 2\, a \sqrt{g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)};$$

stelt men hierin $x = o$, om de aanvankelijke snelheid te hebben, dan vindt men juist dezelfde waarde, als de verkregene snelheid in M, wanneer het ligchaam door de ruimte a is gevallen.

Aanmerking van F. J. Stamkart. Wanneer het stoffelijk punt, in stede van in het punt A in rust te zijn geweest, aldaar eene zijdelingsche beweging, regthoekig op AM, gehad had, dan zoude het punt geene regte lijn, maar eene der kegelsneden, om M als brandpunt, beschrijven, zoo als overvloediglijk is bewezen geworden; zie onder anderen: J. R. Schmidt, *Beginselen der Dynamica*, pag. 274. Was nu deze zijdelingsche beweging zeer gering, dan zoude het stoffelijk punt eene zeer langwerpige ellips beschrijven, waarvan A het verst van M gelegen toppunt zoude wezen, zoo dat het bewegende punt, zeer digt en met eene groote snelheid, achter M zoude omgaan, daarna weder tot in A klimmen, enz. Hoe geringer de aanvankelijke zijdelingsche beweging bij A wordt, des te platter zal de ellips zijn en des te nader zal het punt langs M omgaan, en met des te meer snelheid, doch altijd zal het punt weder tot A klimmen. Onderstelt men eindelijk eene naauwlijks noemenswaardige zijdelingsche beweging, dan zal de ellips genoegzaam met hare groote as overeenstemmen, en het bewegende punt zal rakelings achter M omgaan, zoodat deszelfs beweging alsdan zeer veel overeenkomst zal hebben, met een gedurig vallen en rijzen van A naar M en van M weder naar A. Zoodra echter de zijdelingsche beweging volstrekt *nul* wordt, gaat de beweging van het stoffelijk punt plotselings over in een rijzen en dalen, aan weerskanten van M; dat is, in een gaan en komen, van A naar A' en van A' naar A, enz.

In het eerste deel der *Mécanique Céleste*, heeft La Place opgemerkt, dat de geringste zijdelingsche snelheid zulk eene verschillende beweging kan veroorzaken.

III. Voorstel.

Door J. de Hoop.

Men vraagt naar het meetkunstig bewijs van de evenredigheid

$$Sin.\,x : Sin.\,(90° - \tfrac{2}{3}x) + Sin.\,30° = Sin.\,\tfrac{1}{3}x : Sin.\,30°.$$

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. de Hoop, J. Acquoy, H. van Blanken, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, I. Warnsinck *en* B. de Jongh.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Zij AB (Fig. 9.) de middellijn van eenen cirkel, wanneer dan, uit een punt C in derzelver verlengde, eene snijlijn CDE zoodanig getrokken is, dat het afgesneden stuk CD gelijk is aan den straal des cirkels, zoo zal, gelijk bekend is, *hoek* MCD $= \tfrac{1}{3}$ *hoek* EMB zijn (*). Laten wij nu uit D en E loodlijnen op AB vallen, nemen wij den straal des cirkels voor eenheid aan en stellen wij *hoek* EMB $= x$, dan is, omdat CD $=$ DM is, *hoek* DMC $=$ *hoek* DCM $= \tfrac{1}{3}x$, EG $= Sin.\,x$, DF $= Sin.\,\tfrac{1}{3}x$; voorts is *hoek* DME $=$ 180° $-$ *hoek* DMC $-$ *hoek* EMD $= 180° - \tfrac{4}{3}x$ en denhalve $\tfrac{1}{2}$ ED $= Sin.\,\tfrac{1}{2}$ *hoek* DME $= Sin.\,(90° - \tfrac{2}{3}x)$, terwijl CD gelijk aan den straal des cirkels zijnde, $\tfrac{1}{2}$ CD $= Sin.\,30°$ is. Nu hebben wij uit de gelijkvormigheid der driehoeken CEG en CDF

EG : EC = DF : CD

of EG : $\tfrac{1}{2}$ EC = DF : $\tfrac{1}{2}$ CD,

dat is EG : $\tfrac{1}{2}$ ED + $\tfrac{1}{2}$ CD = DF : $\tfrac{1}{2}$ CD,

en hierin voor de lijnen bovenstaande waarden stellende, verkrijgen wij de evenredigheid

$$Sin.\,x : Sin.\,(90° - \tfrac{2}{3}x) + Sin.\,30° = Sin.\,\tfrac{1}{3}x : Sin.\,30°.$$

Aanmerking *van* J. de Hoop. Indien men uit C eene andere snijlijn trekt, zoodanig dat *hoek* MCD′ $=$ *hoek* MCD is, dan zal vooreerst DE $=$ D′E′ zijn; en ten andere zal

---

(*) Men heeft namelijk *hoek* EMB = *hoek* DEM + *hoek* DCM, maar ook is *hoek* DEM = *hoek* EDM = *hoek* DCM + *hoek* DMC = 2 *hoek* DCM, en bijgevolg *hoek* EMB = 3 *hoek* DCM.

de middellijn DMH evenwijdig met CD'E' zijn, omdat, hoek EDM = 2 hoek DCM en hoek DCD' = 2 hoek DCM zijnde, hoek EDM = hoek DCD' is; hieruit volgt: *Wanneer uit het uiteinde D van de middellijn eens cirkels, eene koorde DE, en evenwijdig aan die middellijn eene gelijke koorde D'E' in de andere helft des cirkels wordt getrokken, en men deze koorden verlengt, tot zij elkander in een punt C snijden, dan zullen de verlengden CD en CD' dezer koorden, begrepen tusschen den omtrek des cirkels en het genoemde snijpunt C, ieder in het bijzonder gelijk zijn aan deze koorden.*

IV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar een vierkant getal van vier cijfers, dat de volgende eigenschappen heeft: 1°. Wanneer men het cijfer der duizendtallen er van wegneemt, blijft er een vierkant getal over, welks wortel het cijfer der eenheden is; 2°. wanneer men het cijfer der honderdtallen wegneemt, en dus de duizenden voor honderden neemt, bekomt men mede een vierkant getal, welks wortel een driehoekig getal is, dat het cijfer der eenheden tot driehoekigen wortel heeft; 3°. wanneer men de cijfers der duizend- en honderd-tallen beide wegneemt, behoudt men alweder een vierkant getal, welks wortel gelijk is aan den wortel van het laatstgenoemde driehoekige getal; en 4°. de vierkantswortel uit het getal zelf, de vierkantswortel in de tweede voorwaarde bedoeld, en die in de derde voorwaarde aangegeven, vormen eene meetkunstige reeks, tot gemeene reden hebbende den vierkantswortel uit de som der cijfers van het getal.

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, MR. W. G. DE BRUIJN KOPS, B. LUBBERS, L. J. ULMAN, M. G. SNOER, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, S. DIK CORNZ., M. L. GORDE, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, J. S. SPEIJER, A. VOLKERSE, A. VOS, G. DE WAAL, I. WARNSINCK en C. VAN SCHAICK.

1. OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Daar een vierkant getal, waarvan de wortel uit een enkele cijfer bestaat, noodwendig slechts uit twee cijfers bestaan kan, volgt uit de eerste der opgegevene voorwaarden terstond,

dat het cijfer der honderdtallen eene nul moet zijn. Men stelle dus de cijfers der duizendtallen, tientallen en eenheden respectievelijk door x, y en z voor, dan is volgens de eerste voorwaarde

$$10\,y + z = z^2$$

en volgens de tweede

$$100\,x + 10\,y + z = \tfrac{1}{4}\,z^2\,(z+1)^2,$$

het verschil dezer vergelijkingen geeft

$$100\,x = \tfrac{1}{4}\,z^2\,(z+1)^2 - z^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

terwijl men uit de eerste heeft

$$10\,y = z^2 - z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

daar nu het gevraagde getal zelf door $1000\,x + 10\,y + z$ wordt voorgesteld, verkrijgt men voor dit getal, door substitutie der bovenstaande waarden van $100\,x$ en $10\,y$,

$$2\tfrac{1}{2}\,z^2\,(z+1)^2 - 10\,z^2 + z^2 - z + z = 2\tfrac{1}{2}\,z^2\,(z+1)^2 - 9\,z^2$$

en dus voor deszelfs vierkantswortel

$$z\sqrt{\{2\tfrac{1}{2}\,(z+1)^2 - 9\}};$$

voorts is de vierkantswortel in de tweede voorwaarde bedoeld klaarblijkelijk $\tfrac{1}{2}\,z\,(z+1)$

en die, in de derde voorwaarde aangegeven, is, om dat het cijfer der honderdtallen nul is, dezelfde als die in de eerste voorwaarde genoemd en dus gelijk aan z;

daar nu, volgens de vierde voorwaarde, deze drie vierkantswortels eene meetkunstige reeks moeten uitmaken, is

$$z^2\sqrt{\{2\tfrac{1}{2}\,(z+1)^2 - 9\}} = \tfrac{1}{4}\,z^2\,(z+1)^2$$

of, door z^2 deelende en in het vierkant brengende,

$$2\tfrac{1}{2}\,(z+1)^2 - 9 = \tfrac{1}{16}\,(z+1)^4,$$

dat is $(z+1)^4 - 40\,(z+1)^2 = -144$,

waaruit men vindt

$$(z+1)^2 = 36 \text{ of } 4,$$
$$(z+1) = 6 \text{ of } 2,$$

en $z = 5 \text{ of } 1;$

voor deze waarden van z vindt men, door de vergelijkingen (1) en (2), $x = 2 \text{ of } 0$

en $y = 2 \text{ of } 0$,

weshalve men voor het gevraagde getal verkrijgt

2025 of 0001,

die beiden aan de opgegevene voorwaarden voldoen.

AANMERKING. Uit deze oplossing blijkt, dat men de derde voorwaarde en het laatste gedeelte der vierde als overtollig kan aanmerken.

II. OPLOSSING van MR. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Stellen wij het gevraagde getal door $(a, b, c, d,)$ en dus de vier cijfers respectievelijk door elk dezer letters voor, dan moet volgens de eerste voorwaarde $(b, c, d,)$ het vierkant van d zijn; daar nu het vierkant van een getal van eene cijfer hoogstens uit twee cijfers bestaan kan, zoo volgt daaruit, dat $b = 0$ is; de derde voorwaarde hetzelfde zeggende had dus kunnen wegvallen. Daar $(b, c, d,)$ en $(c, d,)$ beiden het vierkant van d zijn, en 1, 5 en 6 de eenigste cijfers zijn, waarvan het vierkant op de plaats der eenheden een cijfer heeft gelijk aan zijnen wortel, zoo kan $(b, c, d,)$ niet anders zijn dan 001, 025 of 036. De eerste waarde van $(b, c, d,)$ vervalt, omdat geen vierkant getal, dat eigenlijk uit vier cijfers bestaat, op 001 kan uitgaan; men kan dus voor d geene andere waarde dan 5 of 6 hebben. Nu moet $(a, c, d,)$ een vierkant zijn, tot wortel hebbende $\frac{1}{2}(d^2 + d)$; nemen wij $d = 5$, zoo wordt die wortel 15 en dus moet $(a, c, d,)$ dan 225 zijn; nemen wij $d = 6$, zoo wordt die wortel 21, waardoor $(a, c, d,)$ zou worden 441; alleen de eerste waarde voor (a, c, d) kan met een der waarden voor $(b, c, d,)$ aangewezen overeenstemmen, waardoor wij vinden:

voor het begeerde getal $(a, b, c, d,)$ $2025 = (45)^2$,
voor $(a, c, d,)$ $225 = (15)^2$,
voor $(c, d,)$ $25 = (5)^2$,

makende de wortels dezer getallen eene meetkunstige reeks, waarvan $3 = \sqrt{9}$ de reden is.

AANMERKING. Ter bepaling van het gevraagde getal de vierde voorwaarde ongebruikt gebleven zijnde, blijkt het, dat dezelve als geheel overtollig kan beschouwd worden.

V. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men begeert drie zevenhoekige getallen te vinden, die eene rekenkunstige reeks uitmaken; zoodanig, dat hunne som en de som hunner zevenhoekige wortels beide vijfhoekige getallen zijn?

Ontvangen door I. Acquoy, C. J. Bolten, G. Bruinsma, S. Dirk Coenen, D. Hoola van Nooten, E. de Jonge, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, M. G. Snoek en L. Warnsinck.

Oplossing van J. Acquoy.

Stel voor de wortels der driehoekige getallen

$$x, \; y \text{ en } z,$$

dan zijn die getallen zelve

$$\tfrac{1}{2}(5x^2-3x), \quad \tfrac{1}{2}(5y^2-3y) \text{ en } \tfrac{1}{2}(5z^2-3z)$$

en daar deze eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, is

$\tfrac{1}{2}(5x^2-3x)-\tfrac{1}{2}(5y^2-3y)=\tfrac{1}{2}(5y^2-3y)-\tfrac{1}{2}(5z^2-3z)$

of $5(x^2-y^2)-3(x-y)=5(y^2-z^2)-3(y-z)$

en dus $(x-y)(5x+5y-3)=(y-z)(5y+5z-3)$.

Aan deze vergelijking kan nu voldaan worden, door elk der factoren van het eerste lid gelijk aan een der factoren van het tweede lid te nemen; stelde men hiertoe

$$x-y=y-z \text{ en } 5x+5y-3=5y+5z-3,$$

dan zou hier uit volgen

$$x+z=2y \text{ en } x=z$$

en dus $$x=y=z,$$

hetgeen aan de bedoeling des voorstels niet voldoen kan; men stelle derhalve

$$x-y=5y+5z-3 \text{ en } 5x+5y-3=y-z,$$

dan is $x=6y+5z-3$ en $x=\tfrac{1}{5}(-4y-z+3)$

en dus $6y+5z-3=\tfrac{1}{5}(-4y-z+3)$,

waaruit men, door x af te zonderen, vindt

$$z=\frac{9-17y}{13};$$

omdat nu z een geheel getal zijn moet, neme men y van vorm $13p-1$, dan vindt men $z=\dfrac{9-17y}{13}=2-17p$ en $x=6y+5z-3=1-7p$, zoodat indien men

$$x=1-7p, \; y=13p-1, \text{ en } z=2-17p$$

neemt, de zevenhoekige getallen worden

$\tfrac{1}{2}(245p^2-49p+2)$, $\tfrac{1}{2}(845p^2-169p+8)$ en $\tfrac{1}{2}(1445p^2-289p+14)$, welke nu indedaad eene rekenkunstige reeks uitmaken.

Er blijft nu nog over, om de som dezer zevenhoekige getallen $\tfrac{1}{2}(2535p^2-507p+24)$

en de som $x+y+z$ van derzelver wortels, dat is

$$2-11p,$$

bepaald tot vijfhoekige getallen, te maken; om hiertoe te geraken, merke men op, dat uit den algemeenen vorm der vijfhoekige getallen $\frac{1}{2}(3x^2 - x)$ blijkt, dat het vierentwintig-voud van een vijfhoekig getal, met één vermeerderd wordende, of $24 \times \frac{1}{2}(3x^2 - x) + 1$, juist een vierkant $(6x - 1)^2$ oplevert; zullen dus de bovenstaande uitdrukkingen vijfhoekige getallen worden, dan moeten

$$24 \times \tfrac{1}{2}(2535p^2 - 507p + 24) + 1 = 30420p^2 - 6084p + 289$$

en $$24 \times (2 - 11p) + 1 = 49 - 264p$$

volkomen vierkanten wezen, waaraan terstond voldaan wordt, door $p = 0$ te nemen; hierdoor vindt men oogenblikkelijk $x = 1 - 7p = 1$, $y = 13p - 1 = -1$, en $z = 2 - 17p = 2$ en $\frac{1}{2}(5x^2 - 3x) = 1$, $\frac{1}{2}(5y^2 - 3y) = 4$, en $\frac{1}{2}(5z^2 - 3z) = 7$.

De begeerde zevenhoekige getallen zijn dus 1, 4 en 7, waarvan de som 12 een vijfhoekig getal is, dat 3 tot wortel heeft; terwijl de wortels dezer zevenhoekige getallen zijn 1, −1 en 2, waarvan de som 2 almede een vijfhoekig getal is, −1 tot vijfhoekigen wortel hebbende.

VI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt de onderscheidene waarden van x, uit de vergelijking $x^5 = a^5$ te vinden?

OPGELOST door: B. LUBBERS, C. F. JULIUS, J. ACQUOY, C. J. BOLMAN, L. J. DIEMAN, S. T. BOAS, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, S. DEN GOEDEN, I. WARNSINCK en J. BASSAM.

OPLOSSING van B. LUBBERS.

Daar al dadelijk $x = a$ aan de opgegevene vergelijking voldoet, kunnen wij, dezelve in gedaante $x^5 - a^5 = 0$ schrijvende, het eerste lid door $x - a$ deelen; als wanneer de komende vergelijking

$$x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

de overige waarden van x zal bevatten. Stellen wij nu de tweede magts factoren, waarin het eerste lid dezer vergelijking ontbindbaar moet zijn, door $x^2 + max + a^2$ en $x^2 + nax + a^2$ voor, dan geeft derzelver product

$$x^4 + (m + n)ax^3 + (mn + 2)a^2x^2 + (m + n)a^3x + a^4$$

en daar dit product met het eerste lid der vergelijking (A)

identiek moet wezen, vinden wij, door vergelijking der coëfficiënten,

$$m + n = 1 \quad \text{en} \quad mn + 2 = 1,$$

waaruit gevonden wordt

$$m = \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{en} \quad n = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5};$$

wij verkrijgen hierdoor, in plaats van de vergelijking (A), de twee tweedemagts-vergelijkingen

$$x^2 + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})\, ax + a^2 = 0 \text{ en } x^2 + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})\, ax + a^2 = 0,$$

waaruit wij vinden

$$x = \tfrac{1}{4}\, a\{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}\},$$
$$x = \tfrac{1}{4}\, a\{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}\},$$
$$x = \tfrac{1}{4}\, a\{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}\},$$
$$x = \tfrac{1}{4}\, a\{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}\},$$

die met $x = a$

de vijf waarden zijn, die x in de opgegevene vergelijking kan hebben.

Aanmerking van C. F. Julius en J. Acquoy. Om de vergelijking (A) op te lossen, kan men bij elk van derzelver leden $1\tfrac{1}{4}\, a^2\, x$ optellen, waardoor men verkrijgt

$$x^4 + ax^3 + 2\tfrac{1}{4}\, a^2\, x^2 + a^3\, x + a^4 = 1\tfrac{1}{4}\, a^2\, x^2;$$

het eerste lid dezer vergelijking een volkomen vierkant zijnde, vindt men door worteltrekking

$$x^2 + \tfrac{1}{2}\, ax + a^2 = \pm\, \tfrac{1}{2}\, ax\sqrt{5}$$

of $\quad x^2 + (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5})\, ax + a^2 = 0,$

hetwelk dezelfde tweedemagts-vergelijkingen zijn, als in bovenstaande oplossing gevonden worden.

Aanmerking van C. J. Boltzen. Daar de meergemelde vergelijking (A) tot de wederkeerige vergelijkingen behoort, kan men dezelve ook oplossen, door de gewone leerwijze, die voor die soort van vergelijkingen bekend is; men deele namelijk de vergelijking door x^2, dan komt er na verplaatsing der termen

$$x^2 + \frac{a^4}{x^2} + a\left(x + \frac{a^2}{x}\right) + a^2 = 0;$$

stelt men nu $\quad x + \dfrac{a^2}{x} = y,$

dan is $\quad \left(x + \dfrac{a^2}{x}\right)^2 = y^2.$

en $$x^2 + \frac{a^4}{x^2} = y^2 - 2a^2;$$

door substitutie van deze waarden, gaat de vergelijking over in

$$y^2 + ay - a^2 = 0,$$

waaruit volgt $$y = -\tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5});$$

men heeft dus

$$x + \frac{a^2}{x} = -\tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{5})$$

of $$x^2 + (\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5})ax + a^2 = 0,$$

even als boven gevonden is.

VII. VOORSTEL.

Door B. DE JONGH.

De waarde van x, y en z te vinden, uit de vergelijkingen $(x-z)^2 - y(x-y) = a^2$, $z(x+2y) = a^2$ en $x(y+z) = a^2$?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. ACQUOY, L. J. ULMAN, C. J. BOLTEN, D. HOOLA VAN NOOTEN, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK CORNZ., H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. VOS, G. DE WAAL, I. WARNSINCK, B. LUBBERS *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

De gegevene vergelijkingen zijn de ontwikkeling

$$z^2 - 2xz + x^2 - xy + y^2 = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$xz + 2yz = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

en $$xy + xz = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

het verschil der vergelijkingen (2) en (3) geeft

$$2yz - xy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

de som der vergelijkingen (1) en (4), na daaruit den vierkantswortel getrokken te hebben, geeft

$$x - y - z = \pm a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

terwijl uit de vergelijking (4) volgt $y = 0$ of $2z - x = 0$.

In het *eerste* geval, namelijk van $y = 0$, heeft men uit (5) $$x - z = \pm a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

en uit (3) $$xz = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

telt men voorts het viervoud van (7) bij het vierkant van (6) op, dan verkrijgt men door het trekken van den vierkantswortel uit de som

$$x + z = \pm a\sqrt{5} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8);$$

door eindelijk (6) en (8) op alle mogelijke wijzen met elkander te verbinden, verkrijgt men in dit eerste geval, behalve $y = 0$, de vier volgende waarden voor x en z:

$$x = \tfrac{1}{2} a (1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad z = \tfrac{1}{2} a (-1 + \sqrt{5}),$$
$$x = \tfrac{1}{2} a (-1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad z = \tfrac{1}{2} a (1 + \sqrt{5}),$$
$$x = -\tfrac{1}{2} a (-1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad z = -\tfrac{1}{2} a (1 + \sqrt{5})$$
$$\text{en } x = -\tfrac{1}{2} a (1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad z = -\tfrac{1}{2} a (-1 + \sqrt{5}).$$

In het *tweede* geval, namelijk van $2z - x = 0$, of $x = 2z$, heeft men uit de vergelijkingen (5) en (2)

$$z - y = \pm a \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9),$$
en
$$2z^2 + 2yz = a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

trekt men nu uit (9) $z = y \pm a$ en brengt men deze waarde van z in (10) over, dan verkrijgt men na herleiding

$$4y^2 \pm 6ay = -a^2,$$

uit welke vierkants vergelijking men vindt

$$y = \tfrac{1}{4} a (-3 \pm \sqrt{5}) \quad \text{of} \quad y = \tfrac{1}{4} a (3 \pm \sqrt{5});$$

daar nu deze waarden van y respectievelijk zijn afgeleid uit het nemen van

$$z = y + a \quad \text{en} \quad z = y - a,$$

zoo stemt met dezelve overeen

$$z = \tfrac{1}{4} a (1 \pm \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad z = \tfrac{1}{4} a (-1 \pm \sqrt{5})$$

en dus, omdat $x = 2z$ is,

$$x = \tfrac{1}{2} a (1 \pm \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2} a (-1 \pm \sqrt{5}).$$

Het blijkt dus, dat de opgegevene vergelijkingen *acht* verschillende waarden voor de onbekenden toelaten.

VIII. Voorstel.

Door S. T. Boas.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen in geheele getallen te vinden, zoodanig, dat de som der reeks eene derde magt zij en dat het verschil der uiterste termen tot de som der reeks in reden zij als 1 tot 12?

Opgelost door M. G. Snoek, J. Acquoy, J. Bassant, H. W. Bloem, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Bruinings, S. Dik Cornz., M. L. Goudé, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, B. Lubbers, F. C. Radijs, C. van Schaick, J. S. Speijer, L. J. Ulman, A. Vorsselman, A. Vos en L. Warnsinck.

OPLOSSING van M. G. SNOEK.

Men stelle voor de reeks

$$\tfrac{1}{3}\,x^3 - y,\quad \tfrac{1}{3}\,x^3 \text{ en } \tfrac{1}{3}\,x^3 + y,$$

dan is aan de voorwaarde voldaan, dat de som der reeks eene derde magt moet wezen; voorts moet nog

$$2\,y : x^3 = 1 : 12$$

zijn, of $$x^3 = 24\,y,$$

derhalve moet $24\,y$ eene derde magt zijn; men stelle daartoe

$$y = 9\,p^3,$$

dan wordt $$x^3 = 24\,y = 216\,p^3,$$

waardoor men voor de reeks verkrijgt

$$63\,p^3,\quad 72\,p^3 \text{ en } 81\,p^3$$

kunnende hierin voor p een willekeurig geheel getal genomen worden.

IX. VOORSTEL.

Door MR. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Er wordt gevraagd vier volkomen vierkanten in geheele getallen te vinden, waarvan de som insgelijks een volkomen vierkant zij?

OPGELOST door J. BADON GHIJBEN, A. VOLMERSE, L. J. ULMAN, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BROHM, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK CORNZ, M. L. GOEDE, H. A. HARTOCH, H. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, G. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, A. VOS, I. WARNSINCK en M. DE LEON.

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN

Wij zullen ons algemeener voorstellen een aantal van n vierkanten in geheele getallen te vinden, waarvan de som insgelijks een vierkant is. Indien wij hiertoe $n - 1$ dezer vierkanten willekeurig aannemen en de som dezer $n - 1$ vierkanten S noemen, indien wij verder den wortel uit het nog daarbij te vinden $n$de vierkant gelijk x, en den wortel uit de som van de n vierkanten gelijk y stellen, dan moeten wij voldoen aan de vergelijking

$$S + x^2 = y^2,$$

dat is $$y^2 - x^2 = S$$

of $$(y + x)\,(y - x) = S.$$

Hieruit blijkt dat het getal S in twee ongelijke factoren,

waarvan de som $2y$ en het verschil $2x$ evene getallen moeten zijn, ontbonden moet kunnen worden; is S oneven, zoo is dit altijd mogelijk, want, behalve de andere wijzen waarop die ontbinding mogt kunnen geschieden, kan men voor den kleinsten factor de eenheid nemen, de grootste factor zal dan een oneven getal, en bij gevolg derzelver som en verschil even zijn; is S even, zonder door 4 deelbaar te zijn, dan is de ontbinding in twee factoren, die een even verschil hebben, onmogelijk, want in dit geval zouden de factoren noodzakelijk een van beide even en een van beide oneven moeten zijn, dus hunne som en hun verschil oneven; is echter S door 4 deelbaar, dan kan men behalve de andere mogelijke ontbindings-wijzen, altijd voor den kleinsten factor het getal 2 nemen, de grootste factor zal dan even, en bijgevolg ook de som en het verschil der factoren even worden.

Men neme dus $n - 1$ vierkanten willekeurig aan, alleen onder die voorwaarde, dat hunne som of oneven, of door 4 deelbaar zij; deze som ontbinde men in twee ongelijke factoren, wier som en verschil even is; dan zal het halve verschil dier factoren de wortel van het n^{de} vierkant, en de halve som dier factoren de wortel van de som der n vierkanten zijn.

Om dus vier vierkanten te vinden, waarvan de som een vierkant is, neme men voor de drie eerste vierkanten willekeurig de getallen 4, 9, 16 aan, die nu echter aan de voorwaarde voldoen, dat hunne som 29 niet van den vorm $4n + 2$ is; deze som ontbinde men in de factoren 1×29, dan is het halve verschil 14 dier factoren de wortel van het vierde vierkant, zoodat nu

$$4 + 9 + 16 + 196 = 225$$

aan het gevraagde voldoen.

X. Voorstel.

Door E. Boas.

Een zeker getal is in drie deelen verdeeld, die eene afdalende rekenkunstige reeks vormen, waarvan het verschil gelijk is aan een tiende deel van het geheele getal; voorts is tweemaal het vierkant van den laatsten term gelijk aan

het product der beide eerste termen, verminderd met het getal 903168. *Men vraagt naar dit getal en deszelfs deelen?*

OPGELOST *door* H. KLOOS, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, A. VOS, L. J. UILMAN, en I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* H. KLOOS.

Daar de middelste term der reeks een derde gedeelte, en het verschil der reeks een tiende gedeelte van het geheele getal moet wezen, zoo stellen wij voor dat getal, ter vermijding van breuken, $30x$, dan zijn deszelfs deelen, $13x$, $10x$ en $7x$; nu geeft de verdere voorwaarde des voorstels de vergelijking

$$98x^2 = 130x^2 - 903168$$

of

$$32x^2 = 903168,$$

dat is

$$x^2 = 28224$$

en

$$x = 168;$$

men heeft dus voor het geheele getal

$$30x = 5040$$

en voor deszelfs deelen

$$13x = 2184,\quad 10x = 1680 \text{ en } 7x = 1176.$$

XI. VOORSTEL.

Door J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz.

Twee getallen te vinden, onder voorwaarde, dat de som van hunne vierkanten weder een vierkant zij, en dat hunne som vermenigvuldigd met het vierkant van een der getallen gelijk is aan hun viervoudig product?

OPGELOST *door* J. TEIXEIRA DE MATTOS, Bz., J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, MR. G. W. DE BRUIJN KOPS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, B. LUBBERS, J. S. SPEIJER, L. J. UILMAN, I. WARNSINCK, D. HOOLA VAN NOOTEN en A. VOS.

Oplossing van J. Teixeira de Mattos Bz.

Men stelle voor de gevraagde getallen x en y, dan heeft men, volgens de tweede voorwaarde des voorstels,

$$(x+y)\,x^2 = 4\,x\,y,$$

en dus
$$y = \frac{x^2}{4-x};$$

volgens de eerste voorwaarde moet nu x^2+y^2, dat is:

$$x^2+\frac{x^4}{(4-x)^2}$$

een volkomen vierkant zijn; schrijven wij deze uitdrukking in de gedaante $\frac{x^2}{(4-x)^2}.\left\{(4-x)^2+x^2\right\}$, dan moet blijkbaar nog alleen de laatste factor tot een vierkant gemaakt worden, stellen wij hiertoe

$$(4-x)^2+x^2 = (px-4)^2,$$

dan is $16-8x+2x^2 = p^2x^2-8px+16$

of, de gelijke termen weglatende en door x deelende,

$$-8+2x = p^2x-8p,$$

waaruit men terstond vindt

$$x=\frac{8(p-1)}{p^2-2},$$

terwijl door substitutie dezer waarde van x, in de bovengevondene uitdrukking voor y, na herleiding verkregen wordt

$$y=\frac{16(p-1)^2}{p(p-2)(p^2-2)};$$

neemt men nu $p=\frac{1}{2}$, of $p=3$, zoo vindt men voor de gevraagde getallen $x=2\frac{2}{7}$ en $y=3\frac{1}{21}$.

XII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Zoek eene rekenkunstige reeks van vier termen, waarvan gegeven is, dat het product der beide middelste termen twee meer is, dan het dubbel van den laatsten term; en dat de som der beide laatste termen gelijk is aan het drievoud van den tweeden?

Opgelost *door* A. C. Belinfante, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem; E. Boas, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, B. de Jongh, C. F.

Julius, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, B. Lubbers, F. C. Radijs, J. S. Speijer, L. J. Ulman, A. Vos, I. Warnsinck, M. L. Goede, G. Graafland, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, H. Kloos, C. van Schaick en M. G. Snoer.

Oplossing van A. C. Belinfante.

Men stelle vóor de reeks

$$x, \quad x+y, \quad x+2y \quad \text{en} \quad x+3y,$$

dan geven de voorwaarden des voorstels de vergelijkingen

$$(x+y)(x+2y) = 2(x+3y)+2$$

en $$x+2y+x+3y = 3(x+y);$$

uit de tweede dezer vergelijkingen, vindt men terstond

$$x = 2y$$

en, deze waarde voor x in de eerste substituerende, verkrijgt men $$12y^2 = 10y + 2$$

of $$y^2 - \frac{5}{6}y = \frac{1}{6},$$

waaruit $$y = 1 \quad \text{of} \quad y = -\frac{1}{6},$$

dus is $$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -\frac{2}{6};$$

de eerste waarden voor x en y gebruikende, vindt men voor de reeks 2, 3, 4 en 5;

de andere waarden zouden voor de gevraagde reeks geven

$$-\frac{2}{6}, -\frac{3}{6}, -\frac{4}{6} \text{ en } -\frac{5}{6}.$$

XIII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Zoek wederom eene rekenkunstige reeks van vier termen, waarvan bekend is, dat het product der beide eerste termen één meer dan de vierde, en de som der beide eerste termen één meer dan de derde is?

Opgelost *door* A. C. Belinfante, J. Acquoy, J. Bakman, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brünings, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, B. Lubbers, J. S. Speijer, L. J. Ulman, I. Warnsinck, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, G. Graafland, H. A. Hartogh, H. Kloos, M. de Leon, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoer en A. Vos.

Oplossing van A. C. Belinfante.

Laat de reeks wederom voorgesteld worden door

$$x, \; x + y, \; x + 2y \text{ en } x + 3y,$$

dan moet volgens de opgaaf

$$x(x + y) = x + 3y + 1$$

en

$$x + x + y = x + 2y + 1$$

zijn; uit de laatste vergelijking volgt terstond

$$x = y + 1,$$

hierdoor verandert de eerste in

$$(y + 1)(2y + 1) = 4y + 2,$$

dat is: $(y + 1)(2y + 1) - 2(2y + 1) = 0$

of $(y - 1)(2y + 1) = 0$;

aan deze vergelijking wordt voldaan, door te stellen

$$y - 1 = 0, \text{ of } y = 1$$

en

$$2y + 1 = 0, \text{ of } y = -\tfrac{1}{2};$$

nam men $y = -\frac{1}{2}$, dan zou $x = \frac{1}{2}$, en bijgevolg de tweede term der reeks nul worden; wij nemen dus $y = 1$, dan is $x = 2$, en wij verkrijgen alzoo voor de gevraagde reeks

$$2, \; 3, \; 4 \text{ en } 5.$$

XIV. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Men begeert twee getallen te vinden, zoodanig dat de halve som opgeteld bij den vierkantswortel uit het product $1\frac{1}{2}$ *minder zij dan het eerste getal; en dat de halve som verminderd met den wortel uit het product het dubbel zij van het tweede getal?*

Opgelost *door* A. Vos, J. Acquoy, L. J. Ulman, J. Bassan, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, C. J. Borten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornsz., M. L. Goede, G. Graafland, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, B. Lubbers, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoek, J. S. Speijer *en* I. Warnsinck.

Oplossing van A. Vos.

Men stelle voor de getallen $x + y$ en $x - y$, dan heeft men

$$x + \sqrt{(x^2 - y^2)} + 1\tfrac{1}{2} = x + y$$

en

$$x - \sqrt{(x^2 - y^2)} = 2x - 2y;$$

door optelling dezer beide vergelijkingen verkrijgt men

$$2x + 1\tfrac{1}{2} = 3x - y,$$
waaruit men dadelijk vindt
$$x = y + 1\tfrac{1}{2};$$
deze waarde voor x in de eerste vergelijking overbrengende, bekomt men $y + 1\tfrac{1}{2} + \sqrt{(3y + 2\tfrac{1}{4})} = 2y,$
of
$$\sqrt{(3y + 2\tfrac{1}{4})} = y - 1\tfrac{1}{2},$$
deze laatste vergelijking tot de tweede magt verheffende en de gelijke termen weglatende, vindt men, na verplaatsing der termen, $y^2 - 6y = 0,$
waaruit volgt $y = 6$ of $y = 0;$
daar $x = y + 1\tfrac{1}{2}$ gevonden is, wordt hierdoor
$$x = 7\tfrac{1}{2} \quad \text{of} \quad x = 1\tfrac{1}{2},$$
en de gevraagde getallen zijn dus $13\tfrac{1}{2}$ en $1\tfrac{1}{2}$, of dezelve zijn beide $1\tfrac{1}{2}$. De eerste waarden voldoen onmiddelijk aan het voorstel; de laatsten voldoen daaraan insgelijks, mits men slechts den vierkantswortel uit het product der getallen negatief neme.

XV. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

Drie geheele vierkante getallen te vinden, zoodanig dat het verschil der beide eerste gelijk zij aan het verschil van de beide laatste?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, J. ACQUOY, J. BASSAN, . W. BLOEM, C. J. BOLTEN, Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, . HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. LOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, B. LUBERS, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. MAN, A. VOS, S. T. BOAS, C. VAN SCHAICK en A. LKERSE.

OPLOSSING *van* I. WARNSINCK.

Men stelle voor de getallen
$$(x - y)^2, \quad x^2 + y^2 \quad \text{en} \quad (x + y)^2,$$
n zijn de gevraagde verschillen gelijk en bovendien is het ste en laatste getal een vierkant; om nu ook het tweede l tot een vierkant te maken, kan men, zoo als algemeen end is, $x = p^2 - q^2$ en $y = 2pq$ stellen, dan gaan gestelde vormen voor de gevraagde getallen over in
$$(p^2 - 2pq - q^2)^2, \quad (p^2 + q^2)^2 \quad \text{en} \quad (p^2 + 2pq - q^2)^2,$$

waarin men voor p en q alle mogelijke geheele getallen kan nemen. Neemt men $p = 1$ en $q = 2$, dan verkrijgt men voor de begeerde getallen 49, 25 en 1.

XVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornz.

De naam mijner geboorteplaats wordt met tien letters geschreven; deze letters voorstellende, door de getallen die hunne plaats in het alphabet aanwijzen, zullen: de 7*de*, 1*ste*, *en het viervoud van één meer dan de* 5*de; de* 2*de*, 3*de*, *en de* 7*de min één; de* 4*de*, 6*de en* 1*ste; de* 8*ste*, *de* 4*de min één, en de* 3*de plus één; en eindelijk de* 9*de*, *de* 4*de plus één, en de* 1*ste; vijf opklimmende rekenkunstige reeksen uitmaken, welker verschillen, in dezelfde orde genomen als deze reeksen genoemd zijn, mede eene opklimmende rekenkunstige reeks vormen, waarvan het verschil één meer is dan dat der eerste reeks; voorts is de som der* 3*de en* 7*de letters twee meer dan de som der* 1*ste en* 2*de*, *en daarenboven zijn de* 3*de*, 6*de en* 10*de letter, als ook de* 5*de*, 8*ste en* 9*de letter gelijk. Welke is deze plaats?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, E. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, S. Dik Cornz., M. L. Goede, H. A. Hartogh, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, B. Lubbers, F. C. Radijs, M. G. Snoek, J. S. Speijer, A. Vos, I. Warnsinck, *en* G. de Waal.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stellen wij voor de onbekende getallen als volgt:

het eerste (of wel het tot de eerste letter behoorende) $= u$;
» tweede . . . . $= v$,
» derde . . . . $= w$,
» vierde . . . . $= x$,
» vijfde . . . . $= y$,
» zesde, even als het derde, ... $= w$,
» zevende . . . . $= z$,
» achtste, even als het vijfde, ... $= y$,
» negende, mede even als het vijfde, ... $= y$,
» tiende, even als het derde, ... $= w$,

dan moeten z, u, $4y + 4$;
v, w, $z - 1$;
x, w, u;
y, $x - 1$, $w + 1$;
en y, $x + 1$, u;
rekenkunstige reeksen zijn, waaruit men de volgende vergelijkingen heeft:

$$z + 4y + 4 = 2u \quad \ldots\ldots \quad (1),$$
$$v + z - 1 = 2w \quad \ldots\ldots \quad (2),$$
$$x + u = 2w \quad \ldots\ldots \quad (3),$$
$$y + w + 1 = 2x - 2 \quad \ldots \quad (4)$$
en
$$y + u = 2x + 2 \quad \ldots \quad (5);$$

voorts moet volgens het laatste gedeelte der opgave

$$w + z = u + v + 2 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

zijn, zoodat wij nu ter bepaling der zes onbekenden, ook zes vergelijkingen hebben, en dus al de overige bepalingen, nopens de verschillen der vijf eerstgenoemde reeksen, overtollig zijn.

Uit (2) volgt $v = 2w - z + 1 \quad \ldots\ldots \quad (7)$,
deze waarde van v in (6) gesteld, geeft na vereenvoudiging

$$u = 2z - w - 3 \quad \ldots\ldots \quad (8);$$

uit (3) volgt $x = 2w - u \quad \ldots\ldots \quad (9)$;
deze waarde van x in (4) en (5) overgebragt, geeft

$$y = 3w - 2u - 3 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$
en
$$y = 4w - 3u + 2 \quad \ldots\ldots \quad (11);$$

uit (1) is verder $z = 2u - 4y - 4 \quad \ldots\ldots \quad (12)$,
deze waarde van z in (8) gesteld, bekomt men

$$w = 3u - 8y - 11 \quad \ldots\ldots \quad (13);$$

trekt men de vergelijkingen (10) en (11) van elkander af, zoo vindt men $u = w + 5 \quad \ldots\ldots \quad (14)$
en brengt men de waarde van y, uit (10), in (13) over, dan komt er $19u = 25w - 13 \quad \ldots\ldots \quad (15)$;
indien men dan eindelijk 19 maal de vergelijking (14) van (15) aftrekt, vindt men $6w - 108 = 0$,
waaruit volgt: $w = 18$, overeenkomende met de letter R,
dus is door (14) $u = 23$, » » » W,
» (10) $y = 5$, » » » E,
» (9) $x = 13$, » » » M,
» (12) $z = 22$, » » » V,
en z (7) $v = 15$, » » » O;
de bedoelde plaats is dus WORMERVEER.

XVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornz.

Welke is de betrekking tusschen den inhoud van eenen bol en den inhoud van den grootsten cilinder, die uit dien bol kan gesneden worden. (*)

Opgelost *door* S. Dik Cornz., L. J. Ulman, J. Aocquoy, C. J. Bolten; M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, I. Warnsinck *en* S. T. Boas.

Oplossing *van* S. Dik, Cornz.

Men stelle de hoogte des cilinders door $2x$, den straal van deszelfs grondvlak door y, en den straal des bols door r voor, dan is $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ en men heeft derhalve

$$\text{Inh. Cil.} = 2x \times \pi y^2 = 2\pi x\ (r^2 - x^2);$$

deze inhoud zal een maximum worden, zoodra slechts de functie $u = x\ (r^2 - x^2)$ een maximum is; door deze functie te differentieren, vindt men

$$\frac{\partial u}{\partial x} = r^2 - 3x^2$$

en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6x;$$

stelt men nu het eerste differentiaal quotient gelijk nul, dan verkrijgt men $3x^2 = r^2$ of $x = r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ en daar deze waarde van x het tweede differentiaal quotient negatief maakt, blijkt het, dat voor $x = r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$ de functie u, en dus ook de inhoud des cilinders, een maximum is. Door substitutie van deze waarde voor x, vindt men

$$\text{Inh. Cil.} = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

en daar gelijk algemeen bekend is

$$\text{Inh. Bol} = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

is, zoo heeft men voor de gevraagde betrekking

$$\text{Inh. Bol} : \text{Inh. Cil.} = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \sqrt{3} : 1 = 3 : \sqrt{3}.$$

Aanmerking *van* L. J. Ulman. De gevondene waarde voor x kan zeer gemakkelijk geconstrueerd worden; indien namelijk ABCD (Fig. 10) eenen grooten cirkel des bols voorstelt, waarin de middellijnen AC en BD regthoekig door elkander

(*) Vergel. I. R. Schmidt, *Diff.* en *Int. Rek.* bl. 185. gelijk mede *Kunstoefeningen* des Genootschaps. Ie Deel. Voorstel 199.

zijn getrokken, deele men den straal MC in drie gelijke deelen en uit het naast bij M gelegene deelpunt L, beschrijve men met LC een boogje, MB in N snijdende, dan is MN de bedoelde waarde van x; want men heeft klaarblijkelijk $MN = \sqrt{(LN^2 - LM^2)} = \sqrt{(LC^2 - LM^2)} = \sqrt{(\frac{4}{9}r^2 - \frac{1}{9}r^2)} = r\sqrt{\frac{1}{3}}$. Trekt men dus door N eene koorde EF evenwijdig met AC en uit E en F koorden EG en FH loodregt door AC, dan zal de vierhoek EFGH de doorsnede van den cilinder, met een vlak door deszelfs as gaande, voorstellen.

XVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn: de tophoek en de verschillen van elk der opstaande zijden met de loodlijn, die uit den tophoek op de basis valt?

OPGELOST *door* C. BRUNINGS, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. F. JULIUS, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. VOS, H. W. BLOEM, M. L. GOEDE, B. DE JONGH *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. BRUNINGS.

Laat ABC (Fig. 11.) den driehoek voorstellen, waarin gegeven is

hoek BAC $= 2\alpha$, $AC - AD = a$, $AB - AD = b$;

men stelle voor de loodlijn en de deelen des tophoeks

AD $= x$, *hoek* CAD $= \alpha + \phi$, *hoek* BAD $= \alpha - \phi$,

dan is $AC = a + x$, $AB = b + x$.

Uit de regthoekige driehoeken CAD en BAD heeft men

$$AD = AC \times Cos.\ CAD$$

en

$$AD = AB \times Cos.\ BAD$$

of, voor de lijnen en hoeken derzelver gestelde waarden schrijvende

$$x = (a + x)\ Cos.\ (\alpha + \phi)$$

en

$$x = (b + x)\ Cos.\ (\alpha - \phi);$$

uit elk dezer vergelijkingen x afzonderende, vindt men

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a\ Cos.\ (\alpha + \phi)}{1 - Cos.\ (\alpha + \phi)} \\ \text{en} \quad x = \dfrac{b\ Cos.\ (\alpha - \phi)}{1 - Cos.\ (\alpha - \phi)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (A);$$

en door deze waarden van x aan elkander gelijk te stellen, verkrijgt men de vergelijking

$$\frac{a\ Cos.\ (\alpha + \phi)}{1 - Cos.\ (\alpha + \phi)} = \frac{b\ Cos.\ (\alpha - \phi)}{1 - Cos.\ (\alpha - \phi)},$$

hieruit de noemers verdrijvende en daarna de termen verplaatsende, komt er

$$a\ Cos.\ (x+\phi) - b\ Cos.\ (x-\phi) = (a-b)\ Cos.\ (x+\phi)\ Cos.\ (x-\phi);$$

daar nu in het algemeen $Cos.\ (x+\phi)\ Cos.\ (x-\phi) = Cos.^2 x - Sin.^2 \phi$ is, gaat deze vergelijking, door tevens $Cos.\ (x+\phi)$ en $Cos.\ (x-\phi)$ te ontwikkelen, over in

$$(a-b)\ Cos.\ x\ Cos.\ \phi - (a+b)\ Sin.\ x\ Sin.\ \phi = (a-b)\ (Cos.^2 x - Sin.^2 \phi)$$

deelen wij deze vergelijking door $a-b$ en stellen wij kortheidshalve $\frac{a+b}{a-b} = m$, ... (B),

dan komt er $$Cos.\ x\ Cos.\ \phi = Cos.^2 x + m\ Sin.\ x\ Sin.\ \phi - Sin.^2 \phi;$$

indien wij nu deze vergelijking tot de tweede magt verheffen, daarna $1 - Sin.^2 \phi$ in plaats van $Cos.^2 \phi$ schrijven en de termen behoorlijk rangschikken en vereenigen, komt er

$$Sin.^4 \phi - 2m\ Sin.\ x\ Sin.^3 \phi + (m^2\ Sin.^2 x - Cos.^2 x)\ Sin.^2 \phi + 2m\ Sin.\ x\ Cos.^2 x\ Sin.\ \phi + Cos.^2 x\ Sin.^2 x = 0;$$

uit deze vierdemagtsvergelijking, waarin m door de vergelijking (B) gegeven is, wordt $Sin.\ \phi$ en dus ook ϕ bekend; alsdan wordt door eene der vergelijkingen (A) ook x gevonden, zoodat dan ook de geheele driehoek door de beiden zijden AB en AC met den ingesloten hoek BAC bekend is.

XIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert eenen driehoek te berekenen, als gegeven zijn: de lijn die, uit den tophoek getrokken, de basis in de uiterste en middelste reden deelt, benevens de deelen waarin die lijn den tophoek verdeelt?

Opgelost *door* C. F. Julius, A. Vos, I. Warnsinck, H. W. Bloem, L. J. Ulman, J. Acquoy, D. Hoola van Nooten, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, J. Bassan, C. Brunings, B. de Jongh, M. de Leon en M. L. Goede.

I. Oplossing van C. F. Junius.

Laat in den driehoek ABC (Fig. 12) de lijn CD zoodanig getrokken zijn, dat zij de basis AB in de uiterste en middelste reden deelt, dan zijn gegeven

$$CD = a,\ hoek\ ACD = \alpha\ en\ hoek\ BCD = \beta;$$

daar AD het kleinste en BD het grootste stuk is, van eene lijn AB, die in de uiterste en middelste reden is gedeeld, hebben wij zoo als bekend is

$$AD : BD = 1 : \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5});$$

indien wij dus het kleinste stuk x noemen en gemakshalve $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) = m$ stellen, hebben wij

$$AD = x\ en\ BD = mx.$$

Daar wij verder de evenredigheid hebben

$$Inh.\ drieh.\ ACD : Inh.\ drieh.\ BCD = AD : BD,$$

dat is $\frac{1}{2} AC \times CD \times Sin.\alpha : \frac{1}{2} BC \times CD \times Sin.\beta = x : mx$

of $AC\ Sin.\ \alpha : BC\ Sin.\ \beta = 1 : m,$

zoo is $$AC = \frac{BC\ Sin.\beta}{m\ Sin.\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

voorts is

$$Inh.\ drieh.\ ACB = Inh.\ drieh.\ ACD + Inh.\ drieh.\ BCD$$

en dus

$$AC \times BC \times Sin.(\alpha+\beta) = AC \times CD \times Sin.\alpha + BC \times CD \times Sin.\beta,$$

hierin voor AC de bovengevondene en voor CD de gegevene waarde stellende, komt er

$$BC^2 \frac{Sin.(\alpha+\beta)\ Sin.\beta}{m\ Sin.\alpha} = BC\frac{a\ Sin.\beta}{m} + BC \times a\ Sin.\beta;$$

deze vergelijking door $BC \times Sin.\ \beta$ deelende en met $m\ Sin.\ \alpha$ vermenigvuldigende, verkrijgen wij

$$BC \times Sin.(\alpha+\beta) = a\ Sin.\alpha + am\ Sin.\alpha$$

en dus $$BC = \frac{(1+m)\ a\ Sin.\alpha}{Sin.(\alpha+\beta)},$$

terwijl wij alsdan door (1) vinden

$$AC = \frac{(1+m)\ a\ Sin.\beta}{m\ Sin.(\alpha+\beta)};$$

hierdoor de opstaande zijden des driehoeks gevonden zijnde is alzoo de geheele driehoek bekend.

Om den begeerden driehoek te *construeren*, nemen wij eene willekeurige lijn A′B′ en deelen die in de uiterste en middelste reden in D′; voorts beschrijven wij op A′D′ en

B'D' cirkelsegmenten, respectievelijk de gegevene hoeken α en β bevattende, trekken uit het snijpunt C dier cirkelboogen de lijn CD', nemen op dezelve een stuk CD = a, trekken door het punt D eene lijn evenwijdig met A'B', gelijk mede uit C door A' en B' de lijnen CA en CB, dan zal ABC de begeerde driehoek wezen.

II. Oplossing van A. Vos.

Voor de bekenden en onbekenden dezelfde letters als in de voorgaande oplossing gebruikende, nemen wij uit de driehoeken ACD en BCD de evenredigheden

$$AD : CD = Sin.\ \alpha : Sin.\ A$$

en

$$BD : CD = Sin.\ \beta : Sin.\ B$$

of

$$x : a = Sin.\ \alpha : Sin.\ A$$

en

$$mx : a = Sin.\ \beta : Sin.\ B;$$

door op te merken, dat wij voor de eerste van die evenredigheden ook $mx : a = m\ Sin.\ \alpha : Sin.\ A$ schrijven kunnen, verschaft het verband van dezelve ons de nieuwe evenredigheid

$$m\ Sin.\ \alpha : Sin.\ A = Sin.\ \beta : Sin.\ B$$

en uit deze volgt weder

$$m\ Sin.\ \alpha - Sin.\ \beta : m\ Sin.\ \alpha + Sin.\ \beta = Sin.\ A - Sin.\ B : Sin.\ A + Sin.\ B;$$

maar in het algemeen is

$$Sin.\ A - Sin.\ B : Sin.\ A + Sin.\ B = Tang.\tfrac{1}{2}(A-B) : Tang.\tfrac{1}{2}(A+B),$$

dus is ook

$$m\ Sin.\ \alpha - Sin.\ \beta : m\ Sin.\ \alpha + Sin.\ \beta = Tang.\tfrac{1}{2}(A-B) : Tang.\tfrac{1}{2}(A+B),$$

waaruit wij vinden,

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{m\ Sin.\ \alpha - Sin.\ \beta}{m\ Sin.\ \alpha + Sin.\ \beta}\ Tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B);$$

omdat verder $A + B = 180° - (\alpha + \beta)$,

$$\tfrac{1}{2}(A + B) = 90° - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

en dus $Tang.\ \tfrac{1}{2}(A + B) = Cot.\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$

is, verandert onze laatste vergelijking in

$$Tang.\ \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{m\ Sin.\ \alpha - Sin.\ \beta}{m\ Sin.\ \alpha + Sin.\ \beta}\ Cot.\ \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta);$$

daar hierdoor $\tfrac{1}{2}(A - B)$ gevonden wordt, terwijl $\tfrac{1}{2}(A + B)$ bekend is, worden ook de hoeken A en B bekend, zoodat nu in elk der driehoeken ACD en BCD eene zijde en twee hoeken bekend zijn, weshalve al het overige, door de gewone regels der driehoeksmeting, onmiddelijk kan berekend worden.

III. Oplossing van I. Warnsinck.

Stellen wij *hoek* BCD $= \phi$, overigens wederom dezelfde letters als in de vorige oplossingen gebruikende, dan is

$$A = \phi - \alpha \quad \text{en} \quad B = 180^\circ - (\phi + \beta)$$

en dus *Sin.* $A =$ *Sin.* $(\phi - \alpha)$ en *Sin.* $B. = (\phi + \beta)$;

wij hebben dus,

uit den driehoek ACD, $AD = \frac{a\, Sin.\, \alpha}{Sin.(\phi - \alpha)}$

en, uit den driehoek BCD, $BD = \frac{a\, Sin.\, \beta}{Sin.(\phi + \beta)}$,

waaruit, omdat $BD = m \times AD$ is, volgt:

$$\frac{Sin.\, \beta}{Sin.(\phi + \beta)} = \frac{m\, Sin.\, \alpha}{Sin.(\phi - \alpha)}$$

of

$$\frac{Sin.(\phi - \alpha)}{Sin.(\phi + \beta)} = \frac{m\, Sin.\, \alpha}{Sin.\, \beta};$$

indien nu wij nu *Sin.* $(\phi - \alpha)$ en *Sin.* $(\phi + \beta)$ ontwikkelen en vervolgens teller en noemer door *Cos.* ϕ deelen, komt er:

$$\frac{Tang.\, \phi\, Cos.\, \alpha - Sin.\, \alpha}{Tang.\, \phi\, Cos.\, \beta + Sin.\, \beta} = \frac{m\, Sin.\, \alpha}{Sin.\, \beta},$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$\frac{Tang.\, \phi\, Cot.\, \alpha - 1}{Tang.\, \phi\, Cot.\, \beta + 1} = m$$

en waaruit dan terstond gevonden wordt

$$Tang.\, \phi = \frac{1 + m}{Cot.\, \alpha - m\, Cot.\, \beta},$$

hierdoor de hoek ϕ bekend zijnde, kan wederom al het overige langs den gewonen weg berekend worden.

Aanmerking van H. W. Bloem. Indien men

$$\frac{m\, Sin.\, \alpha}{Sin.\, \beta} = p$$

stelt, verkrijgt de waarde van *Tang.* ϕ, uit de laatste oplossing, de regelmatige gedaante

$$Tang.\, \phi = \frac{Sin.\, \alpha + p\, Sin.\, \beta}{Cos.\, \alpha - p\, Cos.\, \beta}.$$

XX. Voorstel.

Door B. Lubberts.

Men vraagt naar twee positieve getallen, welker som gelijk is aan de som hunner derdemagtswortels? (*)

(*) Zie S. Parson, *Mathem. Rariteitkamer*, pag. 148. No. 47.

Opgelost door B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, J. C. Bolten, Mr. W. G. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoek, J. S. Spruijer, L. J. Ulman, A. Volkersee, A. Vos, I. Warnsinck en B. de Jongh.

Oplossing van B. Lubbers.

Laat de wortels der gevraagde derdemagtsgetallen zijn $x + y$ en $x - y$, dan is de som van deze wortels $2x$, terwijl men voor de som van de getallen zelve vindt $2x^3 + 6xy^2$; volgens het voorstel moet dus

$$2x^3 + 6xy^2 = 2x$$

of $$x^2 + 3y^2 = 1$$

en bijgevolg $$x^2 = 1 - 3y^2$$

zijn, derhalve moet $1 - 3y^2$ een volkomen vierkant wezen; stellen wij hiertoe dat $1 - ay$ de wortel van dat vierkant is, dan hebben wij

$$1 - 3y^2 = 1 - 2ay + a^2y^2,$$

waaruit volgt $$y = \frac{2a}{3 + a^2},$$

dus is $$x = \sqrt{(1 - 3y^2)} = \frac{3 - a^2}{3 + a^2},$$

waardoor de wortels der gevraagde getallen worden

$$x + y = \frac{3 + 2a - a^2}{3 + a^2} \text{ en } x - y = \frac{3 - 2a - a^2}{3 + a^2};$$

nemende hierin $a = \frac{1}{3}$, zoo vinden wij voor die wortels $\frac{8}{7}$ en $\frac{5}{7}$, waardoor dan de begeerde getallen zijn $\frac{512}{343}$ en $\frac{125}{343}$.

XXI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt twee positieve getallen, welker verschil gelijk is aan het verschil hunner derdemagtswortels? (*)

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, J. C. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, S. Dik, Cornz., D. Hoola van Nooten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoek,

(*) Zie S. Panser, *Mathem. Rariteitkamer*, pag. 148, No. 46.

J. S. Speijer, L. J. Ulman, A. Vos, L. Warmenhoek, M. L. Goede en B. de Jongh.

Oplossing van B. Lubbers.

Laat, even als in de oplossing van het voorgaande voorstel; de wortel door $x+y$ en $x-y$ voorgesteld worden; dan is het verschil dezer wortels $2y$, terwijl men voor het verschil der getallen zelve vindt $6x^2y+2y^3$; derhalve moet men hebben

hebben $\qquad 6x^2y+2y^3=2y$

of $\qquad 3x^2+y^2=1,$

dus moet $\qquad y^2=1-3x^2$

een volkomen vierkant zijn; blijkens de oplossing van het vorige voorstel, neme men hiertoe

$$x=\frac{2a}{3+a^2},$$

dan wordt $\qquad y=\sqrt{(1-3x^2)}=\frac{3-a^2}{3+a^2}$

en dus $\quad x+y=\frac{3+2a-a^2}{3+a^2}$ en $x-y=\frac{a^2+2a-3}{a^2+3}$;

nemende nu $a=2$, zoo verkrijgt men voor de wortels $\frac{5}{7}$ en $\frac{3}{7}$, weshalve dan $\frac{125}{343}$ en $\frac{27}{343}$ de begeerde getallen zijn.

XXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar twee achthoekige getallen, waarvan het eene tweemaal zoo groot is als het andere, en waarvan de achthoekige wortels beide geheele positieve getallen zijn?

Opgelost door B. Lubbers, J. Aconof, J. Bakker, H. W. Bloem, C. J. Bolten, C. Brunings, S. Dijk Cornelisz, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, C. F. Jullens, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, M. Geb. Snoek, J. S. Speijer, L. J. Ulman, A. Vos, I. Warmelinck en C. van Schaick.

I. Oplossing van B. Lubbers.

Stellen wij voor den wortel van het kleinste der twee achthoekige getallen x, dan is, volgens den algemeenen vorm der achthoekige getallen, het kleinste achthoekige getal zelve $3x^2-2x$; het grootste achthoekige getal moet het dubbel hier van en dus $6x^2-4x$ zijn. Daar nu elk achthoekig

getal de eigenschap heeft, dat men bij deszelfs twaalfvoud 4 optellende, een volkomen vierkant verkrijgt, zoo zal

$$12\,(6x^2 - 4x) + 4 = 4\,(18x^2 - 12x + 1)$$

en dus ook $18x^2 - 12x + 1$ een vierkant moeten wezen; stellen wij hiertoe

$$18x^2 - 12x + 1 = (ax + 1)^2,$$

dan vinden wij hieruit gemakkelijk

$$x = \frac{12 + 2a}{18 - a^2};$$

om nu voor x een geheel getal te verkrijgen, ziet men dadelijk in, dat $a = 4$ kan genomen worden; alsdan is $x = 10$, het kleinste achthoekige getal is bijgevolg 280 en het grootste 560.

II. Oplossing van J. Acquoy.

Hoewel dit voorstel op verschillende meer gewone wijzen kan opgelost worden, zullen wij eene oplossingswijze verkiezen, waardoor de oneindigheid van antwoorden, die zich reeds uit den aard van het voorstel laat bevroeden, gelijk mede derzelver orde van opvolging, in een duidelijk licht wordt gesteld.

Men stelle voor de wortels der achthoekige getallen

$$\tfrac{1}{3}(x + 1) \text{ en } \tfrac{1}{3}(y + 1),$$

dan vindt men voor die getallen zelve

$$\tfrac{1}{3}(x^2 - 1) \text{ en } \tfrac{1}{3}(y^2 - 1)$$

en dus zal

$$\tfrac{1}{3}(x^2 - 1) = \tfrac{2}{3}(y^2 - 1)$$

moeten zijn, uit welke vergelijking terstond volgt

$$x^2 = 2y^2 - 1;$$

dus zal $2y^2 - 1$ een volkomen vierkant moeten zijn. Maakt men nu $2y^2 - 1$ rationaal (volgens de leerwijze opgegeven bij Euler, *Algebra*, 2e Deel. bl. 328. en verv.) dan vindt men voor de waarden van y de volgende reeks:

1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461, enz.

met welke waarden van y, omdat $x = \sqrt{(2y^2 - 1)}$ is, de volgende waarden van x respectievelijk overeenstemmen:

1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, enz.

in welke beide reeksen elke term gevonden wordt, als men het zesvoud van den voorgaanden met den daaraan voorafgaanden vermindert.

Om nu voor de wortels geheele positieve getallen te ver-

krijgen, neme men uit de bovenstaande reeksen twee overeenkomstige termen, die met 1 vermeerderd door 3 deelbaar zijn, zoo als $y = 29$ en $x = 41$, of $y = 33461$ en $x = 47321$; de wortels der achthoekige getallen $\frac{1}{3}(x+1)$ en $\frac{1}{3}(y+1)$ zijn dan 14 en 10, of 15774 en 11154 en de getallen zelve 560 en 280 of 746425680 en 373212840.

Begeert men nog meerdere getallen, zoo merke men op, dat van de beide reeksen de 3de, 7de, 11de, 15de, enz. termen aan het vereischte zullen voldoen, van met 1 vermeerderd deelbaar te zijn door 3; hetgeen duidelijk volgt, uit de wijze, waarop die reeksen voortgezet worden.

XXIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, als gegeven zijn de bazis, de hoogte en de tophoek?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, I. WARNSINCK, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. BRÜNINGS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. L. GOEDE, D. HOOLA VAN NOOTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN *en* G. DE WAAL.

I. OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Om den gevraagden driehoek te construeren, beschrijve men op de gegevene bazis AB (Fig. 13) een cirkelsegment, dat den gegevenen tophoek bevat, trekke verder eene lijn evenwijdig aan AB en daarvan op eenen afstand gelijk aan de gegevene hoogte verwijderd, en vereenige vervolgens de punten C en C′ waarin deze lijn den cirkelboog snijdt, met de punten A en B, dan verkrijgt men twee driehoeken ABC en ABC′, die bij tegenoverstelling aan elkander gelijk zijn en aan het voorstel voldoen.

Om het voorstel door berekening optelossen, stellen wij de bazis $AB = a$, de hoogte $CD = h$, de tophoek $ACB = 2\alpha$ en voorts nog

$$\text{hoek } A + \text{hoek } B = 180° - 2\alpha = 2\beta,$$
$$\text{hoek } A - \text{hoek } B = 2\phi$$

dan is $\quad \text{hoek } A = \beta + \phi$ en $\text{hoek } B = \beta - \phi$.

Nu is $\quad AD = CD.\,Cot.\,A = h\,Cot.\,(\beta + \phi)$

en $\quad BD = CD.\,Cot.\,B = h\,Cot.\,(\beta - \phi)$

waaruit door optelling volgt, om dat AD + BD = AB = a is,

$$a = h\,(Cot.\,(\beta + \phi) + h\,Cot.\,(\beta - \phi))$$

of

$$\frac{a}{h} = \frac{Cos.\,(\beta + \phi)}{Sin.\,(\beta + \phi)} + \frac{Cos.\,(\beta - \phi)}{Sin.\,(\beta - \phi)},$$

deze vergelijking herleidt men achtervolgens tot

$$\frac{a}{h} = \frac{Cos.\,(\beta + \phi)\,Sin.\,(\beta - \phi) + Cos.\,(\beta - \phi)\,Sin.\,(\beta + \phi)}{Sin.\,(\beta + \phi)\,Sin.\,(\beta - \phi)},$$

$$\frac{a}{h} = \frac{Sin.\,2\beta}{\frac{1}{2}\,Cos.\,2\phi - \frac{1}{2}\,Cos.\,2\beta},$$

$$a\,Cos.\,2\phi - a\,Cos.\,2\beta = 2h\,Sin.\,2\beta;$$

waaruit men vindt

$$Cos.\,2\phi = \frac{2h}{a}\,Sin.\,2\beta + Cos.\,2\beta.$$

Om deze formule voor de berekening geschikter te maken, stellen wij $\frac{2h}{a} = Cot.\,\gamma = \frac{Cos.\,\gamma}{Sin.\,\gamma}$,

dan wordt $Cos.\,2\phi = \frac{Cos.\,\gamma}{Sin.\,\gamma}\,Sin.\,2\beta + Cos.\,2\beta$,

$$= \frac{Cos.\,\gamma\,Sin.\,2\beta + Cos.\,2\beta\,Sin.\,\gamma}{Sin.\,\gamma},$$

$$= \frac{Sin.\,(2\beta + \gamma)}{Sin.\,\gamma},$$

De hoek ϕ bekend zijnde, zijn de hoeken A en B en bijgevolg de geheele driehoek bepaald; wij hebben dus het volgend stelsel formules ter berekening:

1°. $\beta = 90° - \alpha$;

2°. $Cot.\,\gamma = \frac{2h}{a}$;

3°. $Cos.\,2\phi = \frac{Sin.\,(2\beta + \gamma)}{Sin.\,\gamma}$;

4°. hoek $A = \beta + \phi$; 5°. hoek $B = \beta - \phi$;

6°. $AC = \frac{a\,Sin.\,B}{Sin.\,2\alpha}$; 7°. $BC = \frac{a\,Sin.\,A}{Sin.\,2\alpha}$.

Aanmerking. De bestaanbaarheid van het voorstel hangt af van de voorwaarde

$$Sin.\,\gamma > Sin.\,(2\beta + \gamma),$$

daar anders $Cos\,2\phi > 1$ en ϕ onbestaanbaar zou worden. Deze voorwaarde kan men achtervolgens herleiden tot

$$Sin.\ \gamma > Sin.\ 2\beta\ Cos.\ \gamma + Cos.\ 2\beta\ Sin.\ \gamma$$

$$1 > Sin.\ 2\beta\ Cot.\ \gamma + Cos.\ 2\beta$$

$$\frac{1 - Cos.\ 2\beta}{Sin.\ 2\beta} > Cot.\ \gamma$$

$$\frac{2\, Sin.^2 \beta}{2\, Sin.\ \beta\ Cos.\ \beta} > Cot.\ \gamma$$

$$Tang.\ \beta > Cot.\ \gamma$$

of eindelijk $Cot.\ \alpha > \frac{2h}{a}$;

deze voorwaarde is ook duidelijk uit de gegevene constructie op te maken, want de grootste hoogte die men aan den driehoek geven kan, is hoogte EF van het cirkelsegment, daar anders de evenwijdige lijn CC′ geheel buiten dat segment zou vallen, nu is $Cot.\ AEF = \frac{EF}{AF}$

of, daar $AEF = \alpha$ en $AF = \frac{1}{2} a$ is,

$$Cot.\ \alpha = \frac{2.\ EF}{a}$$

en dewijl h kleiner dan EF moet zijn volgt hieruit

$$Cot.\ \alpha > \frac{2h}{a}$$

II. Oplossing *door berekening van* I. Warnsinck.

Voor de gegevens dezelfde letters als in de vorige oplossing gebruikende, stellen wij

$$AD = \tfrac{1}{2} a + x \quad \text{en} \quad BD = \tfrac{1}{2} a - x,$$

dan is, uit de driehoeken ABD en CBD,

$$Tang.\ ABD = \frac{\frac{1}{2} a + x}{h} \quad \text{en} \quad Tang.\ CBD = \frac{\frac{1}{2} a - x}{h};$$

maar men heeft gelijk bekend is

$$Tang.\ 2\alpha = Tang.\ ABC = \frac{Tang.\ ABD + Tang.\ CBD}{1 - Tang.\ ABD\ Tang.\ CBD}$$

hierin voor Tang. ABD en Tang. CBD bovenstaande waarden schrijvende, komt er, na herleiding,

$$Tang.\ 2\alpha = \frac{4ah}{4h^2 - a^2 + 4x^2}$$

waaruit volgt

$$4x^2 = a^2 - 4h^2 + 4ah\ Cot.\ 2\alpha$$

en $x = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4h^2 + 4ah\ Cot.\ 2\alpha)}$;

hierdoor de deelen AD en CD van de basis bekend wordende, kan bijgevolg de geheele driehoek berekend worden.

Aanmerking. De voorwaarde voor de bestaanbaarheid des voorstels is hier klaarblijkelijk

$$a^2 + 4ah \, Cot. \, 2\alpha > 4h^2,$$

stelt men hierin $Cot. \, 2\alpha = \frac{Cot.^2\alpha - 1}{2 \, Cot. \, \alpha}$,

dan verkrijgt men achtervolgens

$$a^2 + \frac{2ah \, (Cot.^2\alpha - 1)}{Cot. \, \alpha} > 4h^2,$$

$$2ah \, Cot.^2\alpha + (a^2 - 4h^2) \, Cot. \, \alpha > 2ah;$$

$$Cot.^2\alpha + \frac{a^2 - 4h^2}{2ah} \, Cot. \, \alpha > 1,$$

$$Cot.^2\alpha + \frac{a^2 - 4h^2}{2ah} \, Cot. \, \alpha + \frac{(a^2 - 4h^2)^2}{16a^2h^2} > \frac{(a^2 + 4h^2)^2}{16a^2h^2},$$

$$Cot. \, \alpha + \frac{a^2 - 4h^2}{4ah} > \frac{a^2 + 4h^2}{4ah},$$

en eindelijk $Cot. \, \alpha > \frac{2h}{a}$,

even als in de eerste oplossing gevonden is.

XXIV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, als gegeven zijn de omtrek, de tophoek en de straal des omgeschreven cirkels?

Opgelost door J. Acquoy, J. Bassan, C. F. Julius, J. S. Speijer, L. J. Ulman, C. J. Bolten, C. Brunings, W. J. C. Rammelman Elsevier, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes en I. Warnsinck.

Oplossing van J. Acquoy.

Zij ABC (Fig. 14) de begeerde driehoek, waarvan gegeven is de omtrek p, de tophoek C en de straal van den omgeschreven cirkel R, dan is volgens eene bekende formule

$$AB = 2 \, R \, Sin. \, C$$

en dus $AC + BC = p - 2 \, R \, Sin. \, C$;

verlengt men nu AC tot dat CD = BC zij, dan verkrijgt men door BD te trekken eenen gelijkbeenigen driehoek BCD,

dus is *hoek* CDB $=$ *hoek* CBD $= \frac{1}{2}$ *hoek* ACB $= \frac{1}{2}$ C;
voorts is uit den driehoek ABD

$$AB : AD = Sin.\ ADB : Sin.\ ABD$$

of $\quad 2 R\ Sin.\ C : p - 2 R\ Sin.\ C = Sin.\ \frac{1}{2} C : Sin.\ ABD,$

hieruit vindt men

$$Sin.\ ABD = \frac{p - 2 R\ Sin.\ C}{2 R\ Sin.\ C}\ Sin.\ \tfrac{1}{2} C = \frac{p - 2 R\ Sin.\ C}{4 R\ Cos.\ \frac{1}{2} C};$$

alzoo de hoek ABD gevonden hebbende, is ook *hoek* ABC $=$ *hoek* ABD $- \frac{1}{2}$ C bekend en dus de geheele driehoek, waarvan men nu behalve de zijde AB alle de hoeken kent, bepaald.

Daar echter de hoek ABD slechts door zijnen Sinus bepaald is, zal die hoek twee waarden μ en $180° - \mu$ kunnen hebben; men verkrijgt hierdoor twee driehoeken, die beide aan het voorstel beantwoorden, doch deze driehoeken verschillen slechts in stand, want is *hoek* ABD $= \mu$, dan is
hoek ABC $= \mu - \frac{1}{2}$ C en *hoek* BAC $= 180° - \mu - \frac{1}{2}$ C,
is echter *hoek* ABD $= 180° - \mu$, dan is
hoek ABC $= 180° - \mu - \frac{1}{2}$ C en *hoek* BAC $= \mu - \frac{1}{2}$ C.

Deze beide driehoeken zal men ook verkrijgen door de volgende *constructie:* men neme een' hoek AMB $=$ 2 C, beschrijve uit M met den gegeven straal R eenen cirkel, dan is de koorde AB klaarblijkelijk de bazis van den begeerden driehoek; daar nu de omtrek p gegeven is, is ook de som der opstaande zijden $p -$ AB bekend. Beschrijft men nu op AB eenen gelijkbeenigen driehoek ATB, waarvan de top T in den omtrek des cirkels ligt, dan is *hoek* ATB $=$ C. Voorts beschrijve men uit T als middelpunt, met AT als straal, eenen cirkel ABDRD′, en vervolgens uit A als middelpunt, met de som der opstaande zijden $p -$ AB als straal, eenen boog PQ, die den cirkel ABDRD′ in D en D′ snijdt, men trekke verder de lijnen AD en AD′, die den cirkel ABTA in C en C′ snijden en vereenige de punten C en C′ met de punten A en B, dan zal ABC of ABC′ de begeerde driehoek zijn; want trekt men nog BD en BD′, dan is

hoek ACB $=$ *hoek* ATB $=$ C

en $\quad$ *hoek* CDB $+$ *hoek* CBD $=$ *hoek* ACB $=$ C,

maar door de constructie is

hoek CDB $= \frac{1}{2}$ *hoek* ATB $= \frac{1}{2}$ C

en deze vergelijking van de voorgaande aftrekkende, vindt

men ook hoek CDB $=\frac{1}{2}$ C;
derhalve is hoek CDB = hoek CBD,
bijgevolg BC = CD
en AC + BC = AC + CD = AD = p — AB;
even zoo bewijst men dat de driehoek AC′B aan de vereischten voldoet.

AANMERKINGEN. 1°. Uit deze constructie blijkt, dat de oplossing onmogelijk wordt, zoodra p— AB grooter is dan de middellijn AR van den cirkel ABDRD′, want dan zou de boog PQ met dezen cirkel geen punt gemeen hebben. Is p— AB = AR en raakt dus de boog PQ den cirkel in R, dan verkrijgt men den gelijkbeenigen driehoek ATB, die de grootstmogelijke is, waarvan C de tophoek en R de straal des omgeschreven cirkels is. Men moet dus hebben

$$p - AB < \text{ of } = AR,$$

dat is $$p < \text{ of } = AB + AR$$

of, omdat $AB = 2\,R\,Sin.\,C$ en $AR = \dfrac{AB}{Sin.\,ARB} = \dfrac{2\,R\,Sin.\,C}{Sin.\,\frac{1}{2}C}$

is, $$p < \text{ of } = 2\,R\,Sin.\,C + \frac{2\,R\,Sin.\,C}{Sin.\,\frac{1}{2}C}$$

en $$p < \text{ of } = 2\,R\,Sin.\,C\,(1 + Cosec.\,\tfrac{1}{2}C);$$

voorts moet, omdat in elken driehoek de som van twee zijden grooter dan de derde moet wezen,

$$p - AB > AB$$

of $$p > 2\,AB,$$

dat is $$p > 4\,R\,Sin.\,C$$

zijn; zal dus de begeerde driehoek bestaan kunnen, dan moeten de gegevens zoodanig zijn, dat $p > 4\,R\,Sin.\,C$ en tevens $p <$ of $= 2\,R\,Sin.\,C\,(1 + Cosec.\,\frac{1}{2}C)$ is.

2°. Daar van elk punt eener ellips de som der voerstralen gelijk is aan de groote as, zoo zullen de punten C en C′ moeten gelegen zijn in den omtrek eener ellips, waarvan A en B de brandpunten en p — AB de groote as zijn, construeert men dus eene ellips A en B tot brandpunten en VW = p — AB tot groote as hebbende, dan zullen de punten C en C′, welke de omtrek dezer ellips met den cirkel ABTA gemeen heeft, insgelijks den top des begeerden driehoeks bepalen.

XXV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Eenen regthoekigen driehoek te berekenen en te construeren, wanneer de hypothenusa en de middellijn des ingeschreven cirkels gegeven zijn?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. Brunings, C. F. Julius, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, L. J. Ulman, J. Bassan, D. Hoola van Nooten, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, I. Warnsinck, M. de Leon *en* G. de Waal.

I. Oplossing *van* J. Acquoy.

Zij a de gegevene hypothenusa en m de gegevene middellijn des ingeschreven cirkels, dan is $a + m$ de som der regthoekszijden (*); hierdoor wordt dit voorstel teruggebragt tot een bijzonder geval van het voorgaande, waarin men heeft $p = 2a + m$, $C = 90°$ en $R = \frac{1}{2} a$; brengt men deze waarden in de formule

$$Sin.\ ABD = \frac{p - 2R\ Sin.\ C}{4R.\ Cos.\ \frac{1}{2}C},$$

dan verkrijgt men voor dit geval (Fig. 15)

$$Sin.\ ABD = \frac{a + m}{2a} \sqrt{2},$$

waardoor de begeerde driehoek bepaald is.

Deze driehoek wordt even als in het voorgaande voorstel geconstrueerd, door namelijk op de gegevene hypothenusa AB. (Fig. 15) eenen halven cirkel te beschrijven, deszelfs omtrek in T midden door te deelen, en uit T als middelpunt met TA als straal eenen cirkel ABDD′, en uit A als middelpunt met $a + m$ als straal eenen boog DD′ te beschrijven; indien men dan, uit de snijpunten D en D′ van laatstgenoemden boog en cirkel, lijnen naar A trekt, zal een der snijpunten C en C′ van deze lijnen met den halven cirkelomtrek ATB, het tegen over de hypothenusa liggende hoekpunt des driehoeks zijn.

Aanmerking. Volgens de eerste aanmerking op het voorgaande voorstel, stellen de voorwaarden op, dat de driehoek

(*) Men zie het bewijs hiervan onder anderen in het XL. Voorstel van het III. Deel dezer *Verzameling*.

bestaan kan, en die aldaar waren

$p > 4 R\ Sin.\ C$ en $p <$ of $= 2 R\ Sin.\ C\ (1 + Cosec.\ \frac{1}{2} C)$,

voor dit bijzonder geval overgaan in

$2a + m > 2a$ en $2a + m <$ of $= a\ (1 + \sqrt{2})$;

aan de eerste voldoen de gegevens van zelve; de tweede, die dus alleen nog in aanmerking komt, kan korter aldus worden uitgedrukt

$$m < \text{of} = a\ (-1 + \sqrt{2}).$$

Is dus $m > a\ (-1 + \sqrt{2})$ zoo kan de driehoek niet bestaan; is echter $m = a\ (-1 + \sqrt{2})$, dan verkrijgt men eenen gelijkbeenigen regthoekigen driehoek, welke de grootste is van alle regthoekige driehoeken, die a tot hypothenusa hebben.

II. Oplossing, *door constructie, van* C. Brunings.

Zij ABC (Fig. 16) de begeerde driehoek, AB tot hypothenusa hebbende, en waarin een cirkel van gegeven middellijn beschreven staat, indien wij dan naar het middelpunt O van dien cirkel de lijnen AO en BO trekken, deelen die lijnen de hoeken A en B des driehoeks midden door; de som dezer hoeken A en B 90° zijnde, is de som van de helften dier hoeken 45° en dus *hoek* AOB = 135°; het punt O moet dus liggen op den omtrek van een cirkelsegment, dat, op AB a's koorde beschreven, eenen hoek van 135° bevat; ten andere moet het punt O op den afstand $\frac{1}{2} m$ (m de gegevene middellijn voorstellende) van AB verwijderd zijn; en hieruit volgt dat men den begeerden driehoek aldus construeren kan: beschrijf op de gegevene hypothenusa een cirkelsegment AOB, dat een hoek van 135° bevat, trek evenwijdig met die hypothenusa, en op den afstand $\frac{1}{2} m$ van dezelve, eene lijn HI, beschrijf uit het punt O, waar deze lijn het cirkelsegment snijdt, met $\frac{1}{2} m$ als straal eenen cirkel, en trek daar aan uit A en B raaklijnen, dan zullen deze raaklijnen de regthoekszijden des begeerden driehoeks zijn.

Daar de lijn HI het cirkelsegment in twee punten O en O, snijdt, zal men, door elk dezer snijpunten te gebruiken, de twee gelijke doch in stand verschillende driehoeken verkrijgen, die aan het voorstel beantwoorden.

XXVI. VOORSTEL.

Door M. H. Godefroy.

Iemand heeft een zakje met schellingen en zesthalven en bevindt: 1°. *dat het verschil, in centen, van hunne waarden voor en na de reductie dier geldspecien tot kwartguldens, een even groot getal is, als de tweede magt van het halve getal zesthalven;* en 2°. *dat als men de getallen, die hunne voormalige en tegenwoordige waarden in guldens uitdrukken, met elkander vermenigvuldigt, dit product een vierde gedeelte is van het getal centen, dat zij te voren waardig waren. Men vraagt hoe vele schellingen en zesthalven er zijn?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, S. Dik, Cornz., G. Graafland, M. H. Godefroy, M. L. Goede, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoer, A. Vos, G. de Waal, I. Warnsinck *en* W. G. van Delden.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stel het getal schellingen door x, en het getal zesthalven door y voor,

dan is derzelver voormalige waarde in centen $30\,x + 27\frac{1}{2}\,y$,
derzelver tegenwoordige waarde is in centen $25\,x + 25\,y$,
dus het verschil dezer waarden . . . . . $5\,x + 2\frac{1}{2}\,y$,
en wij hebben dus door de eerste voorwaarde

$$5\,x + 2\tfrac{1}{2}\,y = (\tfrac{1}{2}\,y)^2$$

of

$$20\,x + 10\,y = y^2 \quad \ldots\ldots \quad (1);$$

stellen wij gemakshalve de voormalige waarde der schellingen en zesthalven in guldens door p voor, dan is, daar hunne tegenwoordige waarde in guldens klaarblijkelijk $\frac{x+y}{4}$ is, volgens de tweede voorwaarde

$$p \times \frac{x+y}{4} = \tfrac{1}{4}\,p \times 100,$$

waaruit volgt $x + y = 100 \quad \ldots\ldots \quad (2);$
indien wij nu uit (2) trekken $20\,x = 2000 - 20\,y$ en dit in (1) overbrengen, verkrijgen wij

$$y^2 + 10\,y = 2000,$$

waaruit men vindt $y = -5 \pm \sqrt{2025} = 40$ of -50;

daar alleen de positieve waarde van y aan de bedoeling van het voorstel kan beantwoorden, hebben wij, door $y = 40$ te nemen, uit (2) $x = 60$ en er waren dus 60 schellingen en 40 zesthalven.

XXVII. Voorstel.

Door S. T. Boas.

Twee getallen te vinden, zoodanig dat hun product gelijk is aan driemalen hunne som; en dat de som hunner vierkanten tot hun verschil in reden staat, als 20 tot 1?

Opgelost *door* S. T. Boas, J. Acquoy, J. Bassan, C. F. Julius, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, H. W. Bloem, E. Boas, C. Brunings, W. G. van Delden, S. Dik, Cornz., M. L. Goede, G. Graafland, H. A. Hartogh, B. de Jongh, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, C. van Schaick, M. G. Snoek, G. de Waal, I. Warnsinck *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* S. T. Boas.

Laat x de som der getallen zijn, dan is hun product $3x$ en de som hunner vierkanten $x^2 - 6x$; volgens de opgave is nu $20 : 1 = x^2 - 6x$: *het verschil der getallen*, het verschil der getallen is dus $\frac{x^2 - 6x}{20}$ en daar hunne som x is, zijn de getallen zelve

$$\tfrac{1}{2}\left(x + \frac{x^2 - 6x}{20}\right) = \frac{14x + x^2}{40}$$

en

$$\tfrac{1}{2}\left(x - \frac{x^2 - 6x}{20}\right) = \frac{26x - x^2}{40};$$

het product der getallen moet $3x$ zijn, dus hebben wij de vergelijking

$$\frac{14x + x^2}{40} \times \frac{26x - x^2}{40} = 3x,$$

welke na herleiding overgaat in

$$x^4 - 12x^3 - 364x^2 + 4800x = 0;$$

de eenige wortel dezer vergelijking, die meetbare waarden voor de begeerde getallen geven kan, is $x = 16$; hierdoor vinden wij voor het verschil der getallen $\frac{x^2 - 6x}{20} = 8$, en die getallen zelve zijn bijgevolg 12 en 4.

XXVIII. VOORSTEL.

Door B. DE JONGH.

Men vraagt naar drie contra-harmonische getallen, waarvan de som 14 en het gedurig product 90 is?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, A. VOS, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, I. WARNSINCK *en* F. C. RADIJS.

I. OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Stellende voor de getallen x, y en z, dan geeft het voorstel aanleiding tot de vergelijkingen

$$x + y + z = 14 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$x\,y\,z = 90 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2);$$

en daar volgens de eigenschap der contra-harmonische getallen (Zie J. H. VAN SWINDEN, *Meetkunde*, III. Boek, III. Afd., laatste aanm.)

$$x - y : y - z = z : x$$

moet zijn, heeft men ook nog

$$x^2 - x\,y = z\,y - z^2 \quad \ldots\ldots \quad (3);$$

schrijft men nu de laatste vergelijking onder den vorm

$$(x + z)^2 - 2\,x\,z = y\,(x + z)$$

en stelt men hierin $x + z = 14 - y$, zoo als uit (1), en $x\,z = \frac{90}{y}$, zoo als uit (2) volgt, dan verkrijgt men

$$(14 - y)^2 - \frac{180}{y} = y\,(14 - y)$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$y^3 - 21\,y^2 + 98\,y - 90 = 0;$$

volgens de gewone handelwijze vindt men voor de drie wortels dezer vergelijking

$$y = 5 \quad \text{en} \quad y = 8 \pm \sqrt{46};$$

de eerste waarde van y in (1) en (2) stellende, wordt

$$x + z = 9 \quad \text{en} \quad x\,z = 18,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt

$$x = 6 \ \text{en} \ z = 3 \quad \text{of} \quad x = 3 \ \text{en} \ z = 6,$$

zoodat men dan voor de gevraagde getallen heeft 3, 5 en 6.

Indien men de andere waarden van y in (1) en (2) stelde, zoude men voor x en z slechts onbestaanbare waarden verkrijgen.

II. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Daar de som der getallen 14 en hun product 90 moet zijn, is het klaar, dat, indien men een antwoord in geheele positieve getallen verlangt, de begeerde getallen deelers van 90 en kleiner dan 14 moeten zijn. De deelers nu van 90, kleiner dan 14, zijn

$$1, 2, 3, 5, 6, 9 \text{ en } 10;$$

neemt men uit deze getallen alle mogelijke combinatien van drie getallen wier som 14 is, zoo vindt men alleen

$$1+3+10=14,\ 2+3+9=14 \text{ en } 3+5+6=14;$$

en toetst men nu elk dezer combinatien aan de voorwaarde, dat het product der getallen 90 moet wezen, zoo vindt men dat alleen de laatste voldoen kan, de getallen 3, 5 en 6 zijn alzoo de eenigste geheele getallen wier som 14 en wier product 90 is en daar dezelve tevens voldoen aan de voorwaarde, dat zij contra-harmonisch zijn, zoo zijn het de begeerde.

XXIX. Voorstel.

Door H. A. Hartogh.

Welke waarden moet men aan x geven, om de uitdrukking $7x^2 + 4x + 5$ tot een volkomen vierkant te maken?

Opgelost *door* H. A. Hartogh, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, C. J. Bolten, S. Dik Cornz., C. F. Julius, H. Kroos, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, C. Bruning, W. G. van Delden, M. L. Goede, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, M. G. Snoek, *en* I. Warnsinck.

Oplossing *van* H. A. Hartogh.

Daar al dadelijk in het oog valt, dat, door $x = 1$ te te nemen, de opgegevene uitdrukking 16 en dus een volkomen vierkant wordt, stellen wij om in het algemeen alle andere antwoorden te bekomen $x = 1 + y$, dan gaat de opgegevene uitdrukking over in $16 + 18y + 7y^2$; dit nu een vierkant moetende zijn, zoo stellen wij voor deszelfs wortel $4 + my$, dan hebben wij

$$16 + 18y + 7y^2 = (4 + my)^2,$$

waaruit na ontwikkeling gevonden wordt

$$y = \frac{18-8m}{m^2-7},$$

zoodat $x = 1 + y = \dfrac{m^2 - 8m + 11}{m^2 - 7}$

genomen wordende, de opgegevene uitdrukking voor alle geheele of gebrokene waarden van m, een vierkant zal worden. Voor $m = 2$, is $x = \frac{1}{3}$ en $7x^2 + 4x + 5 = (\frac{7}{3})^2$; voor $m = -3$, is $x = 22$ en $7x^2 + 4x + 5 = (59)^2$; enz.

XXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men verlangt eene meetkunstige reeks van vier termen te vinden, zoo dat de sommen der beide eerste en der beide laatste termen vierkanten zijn, en dat de som der beide middelste termen eene derde magt zij?

OPGELOST *door* H. A. HARTOGH, J. ACQUOY, H. W. BLOEM, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN, A. VOS, J. BASSAN, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, I. CORNSZ., B. DE JONGH, M. DE LEON, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK en I. WARNSINCK.

OPLOSSING van H. A. HARTOGH.

Stel voor de reeks x^2, $x^2 y$, $x^2 y^2$ en $x^2 y^3$, dan moeten $x^2 + x^2 y = x^2(1+y)$ en $x^2 y^2 + x^2 y^3 = x^2 y^2 (1+y)$ vierkanten zijn, waaraan alleen kan voldaan worden, door te stellen $y = p^2 - 1$,

voorts moet $x^2 y + x^2 y^2$ eene derde magt zijn, waartoe men stellen kan $x^2 y + x^2 y^2 = x^3 q^3$,

hierdoor wordt $x = \dfrac{y^2 + y}{q^3}$

of, de waarde $y = p^2 - 1$ hierin overbrengende,

$$x = \frac{p^2(p^2-1)}{q^3};$$

neemt men nu voor p en q willekeurige waarden, dan zal men voor x en y getallen verkrijgen, die eene aan al de gevraagde voorwaarden voldoende reeks aanwijzen; begeert men die reeks in geheele getallen, dan kan men, na eerst voor p eenig geheel getal genomen te hebben, q zoodanig

aannemen, dat $p^2(p^2-1)$ door q^3 deelbaar zij, hetwelk, daar men ook $q=1$ nemen kan, altijd mogelijk is.

Men neme b. v. $p=2$, dan is $p^2(p^2-1)=12$; men neme dus verder $q=1$, dan wordt $y=3$, $x=12$ en bijgevolg de verlangde reeks

144, 432, 1296 en 3888.

XXXI. VOORSTEL.

Door J. Bassan.

Twee geheele vierkante getallen te vinden, onder voorwaarde, dat de som en het verschil van hunne wortels driehoekige getallen zijn?

Opgelost *door* M. G. Snoer, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, C. Brunings, H. A. Hartogh, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, C. F. Julius, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, L. J. Ulman, A. Vos, I. Warnsinck, S. Dik, Cornz., B. de Jongh en E. C. Badijs.

Oplossing *van* M. G. Snoer.

Laten x^2 en y^2 de gevraagde getallen voorstellen, dan moeten $x+y$ en $x-y$ driehoekige getallen zijn; zij daartoe

$$x+y=\tfrac{1}{2}p(p+1)$$

en

$$x-y=\tfrac{1}{2}q(q+1),$$

dan vinden wij, door de halve som en het halve verschil dezer vergelijkingen te nemen,

$$x=\frac{p(p+1)+q(q+1)}{4}$$

en

$$y=\frac{p(p+1)-q(q+1)}{4};$$

hierin kan men nu, om voor x en y geheele getallen te bekomen, voor p en q veelvouden van 4, en, om y positief te hebben, $p>q$ nemen; bijv. $p=8$ en $q=4$ nemende, vindt men voor de gevraagde getallen $x^2=529$ en $y^2=169$; ook kan men voor p en q of voor een van beide *één* minder dan een veelvoud van 4 nemen; bijv. $p=4$ en $q=3$ nemende, vindt men voor de begeerde getallen $x^2=64$ en $y^2=4$.

XXXII. VOORSTEL.

Door Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Indien van eene harmonische evenredigheid de eerste term gegeven is, verlangt men de beide andere termen zoodanig te bepalen, dat de producten der termen twee aan twee volkomen vierkanten zijn?

OPGELOST *door* Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS, S. T. BOAS, J. ADOLPH, J. BASSAN, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNSZ., C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, Mr. G. SNOEK, L. J. ULMAN, A. VOS, I. WARNSINCK en C. VAN SCHAICK.

I. OPLOSSING van Mr. G. W. DE BRUIJN KOPS.

Laat a de gegevene eerste term zijn en stellen wij voor den tweeden $a x^2$, dan is, volgens de eigenschap der harmonische evenredigheden, de derde term $\frac{a x^2}{2-x^2}$; de producten dezer termen twee aan twee zijn

$$a^2.x^2, \frac{a^2 x^2}{2-x^2} \text{ en } \frac{a^2 x^4}{2-x^2};$$

om dezelve tot volkomen vierkanten te maken, is er dus alleen noodig, dat $2-x^2$ een vierkant zij, waartoe wij stellen

$$2-x^2 = \{1+p\,(1-x)\}^2,$$

dat is $1+(1+x)(1-x) = 1+2p(1-x)+p^2(1-x)^2$; de gelijke term 1 weglatende en door $1-x$ deelende, komt er

$$1+x = 2p+p^2(1-x),$$

waaruit volgt

$$x = \frac{p^2+2p-1}{p^2+1};$$

neemt men nu bijv. $p=3$, zoo verkrijgt men $x=\frac{7}{5}$ en de evenredigheid wordt alsdan

$$a,\ \frac{49}{25}a \text{ en } 49a;$$

was $a=25$ gegeven, dan zou de begeerde reeks zijn

$$25,\ 49 \text{ en } 1225.$$

II. OPLOSSING van S. T. BOAS.

Daar er eene harmonische evenredigheid ontstaat, wanneer men de eenheid achtervolgens door de termen eener rekenkunstige reeks deelt, zoo zullen wij aan het gevraagde ter-

stond kunnen voldoen, indien wij slechts drie volkomen vierkanten kennen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken. Dit laatste is in het XV. Voorstel opgelost; nemen wij dus, voor de termen van die rekenkunstige reeks, de vierkanten 1, 25 en 49, dan behoeven wij de termen der overeenkomstige harmonische reeks $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{49}$, slechts met het gegeven getal a te vermenigvuldigen, om voor de gevraagde harmonische reeks te verkrijgen

$$a, \frac{1}{25}a \text{ en } \frac{1}{49}a,$$

die aan al de vereischten des voorstels voldoet.

XXXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Om eenen regthoekigen driehoek is een cirkel beschreven; indien nu gegeven zijn de beide pijlen op de regthoekszijden, vraagt men de zijden des driehoeks te berekenen?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNZ., M. L. GOEDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS, G. DE WAAL *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Zij ABC (Fig. 17) de gevraagde regthoekige driehoek, met den daarom beschreven cirkel; laten gegeven zijn de pijlen $DE = a$, $FG = b$ en stellen wij den straal des cirkels $AM = BM = x$, dan is,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2,$$

of

$$4\,AM^2 = 4\,AE^2 + 4\,BG^2,$$

dat is

$$AM^2 = AE^2 + BG^2 \quad \ldots\ldots \quad (A);$$

nu is, volgens de eigenschappen van den cirkel,

$$AE^2 = DE \times EH = a\,(2x - a)$$

en

$$BG^2 = FG \times GI = b\,(2x - b);$$

deze waarden, alsmede $AM = x$, in de vergelijking (A) stellende, verkrijgen wij

$$x^2 = a\,(2x - a) + b\,(2x - b),$$

$$x^2 - 2(a + b)\,x = -(a^2 + b^2),$$

waaruit gevonden wordt

$$x = a + b \pm \sqrt{2ab};$$

Omdat het bij de bepaling dezer waarde van x geen onderscheid zou maken, indien men of, in plaats van DE, EH $= a$, of, in plaats van FG, GI $= b$, of wel te gelijker tijd, in plaats van DE en FG, EH $= a$ en GI $= b$ als bekenden aannam, zoo moeten, wegens de algemeenheid der stelkunstige oplossingen, alle deze gevallen in de gevondene formule begrepen zijn.

Gebruikt men het bovenste teeken, dan is

$$x - a = b + \sqrt{2ab} \text{ en } x - b = a + \sqrt{2ab},$$

in dit geval is de straal grooter dan elk der gegevene pijlen; de driehoek ABC is dan de begeerde als gegeven zijn DE $= a$ en FG $= b$, wordende deszelfs zijden uitgedrukt door

$$AB = 2x = 2a + 2b + 2\sqrt{2ab},$$

$$AC = 2(MF - FG) = 2(x - b) = 2a + 2\sqrt{2ab}$$

en $$BC = 2(MD - DE) = 2(x - a) = 2b + 2\sqrt{2ab}.$$

Gebruikt men het benedenste teeken, dan is

$$x - a = b - \sqrt{2ab} \text{ en } x - b = a - \sqrt{2ab};$$

zijn nu de pijlen zoodanig gegeven, dat de eene grooter is dan het dubbel der andere, dan worden de uitdrukkingen $b - \sqrt{2ab}$ en $a - \sqrt{2ab}$ een van beide *positief* en een van beide *negatief*, dit is dus ook met de uitdrukkingen $x - a$ en $x - b$ het geval, weshalve alsdan de straal kleiner dan de eene en grooter dan de andere der gegevene pijlen is: was bijv. $b > 2a$, dan zou men hebben

$$x - a = b - \sqrt{2ab} = \textit{positief},$$

en $$x - b = a - \sqrt{2ab} = \textit{negatief},$$

dus zou $x > a$ en $x < b$ zijn; in dit geval zou ABC de tweede der begeerde driehoeken zijn, indien gegeven was DE $= a$ en GI $= b$, terwijl deszelfs zijden zouden worden uitgedrukt door

$$AB = 2x = 2a + 2b - 2\sqrt{2ab},$$

$$AC = 2(GI - MI) = 2(b - x) = 2\sqrt{2ab} - 2a$$

en $$BC = 2(MD - DE) = 2(x - a) = 2b - 2\sqrt{2ab}.$$

Blijft men het benedenste teeken gebruiken, maar is de grootste der gegevene pijlen kleiner dan het dubbel der kleinste, zoodat bijv. $b > a$ en $b < 2a$ is, dan worden $b - \sqrt{2ab}$ en $a - \sqrt{2ab}$, derhalve ook $x - a$ en $x - b$, beide *negatief*; in dit geval zal dus de straal kleiner dan elk der gegevene

pijlen en ABC de begeerde driehoek zijn, indien gegeven is EH $= a$ en GI $= b$, terwijl alsdan de zijden zullen wezen

$$AB = 2x = 2a + 2b - 2\sqrt{2ab},$$

$$AC = 2(GI - MI) = 2(b - x) = 2\sqrt{2ab} - 2a$$

en $BC = 2(EH - MH) = 2(a - x) = 2\sqrt{2ab} - 2b$.

Was eene der pijlen juist het dubbel van de andere, dan zoude, het negatieve teeken gebruikende, de straal gelijk aan de kleinste der pijlen worden; in dit geval zou de tweede driehoek verdwenen en in de middellijn des cirkels overgegaan zijn; verbeeldt men zich dan ook, dat de zijde AC om het punt A draait, zoodanig dat zij ten laatste op AB komt, dan zal op dat oogenblik de pijl DE een straal en de pijl GI eene middellijn des cirkels zijn geworden.

Het laatstgenoemde geval uitgezonderd, bestaan er dus altijd twee antwoorden op ons voorstel; bij het eerste staan de gegevene pijlen beide aan den buitenkant op de regthoekszijden, bij het tweede staan zij *beide of een van beide* op den binnenkant der regthoekszijden, naar gelang de grootste der gegevene pijlen *kleiner of grooter* dan het dubbel van de kleinste is.

De constructie der begeerde driehoeken, als van zelf in het oog vallende, gaan wij met stilzwijgen voorbij.

Aanmerking van W. J. C. Rammelman Elsevier. Uit de gevondene waarden volgt terstond:

voor het eerste antwoord,

$$AC - BC = 2(a - b),$$

$$AB - AC = 2b,$$

$$AB - BC = 2a;$$

het verschil der regthoekszijden is dus gelijk aan het dubbele verschil der pijlen; en *het verschil van de hypothenusa met eene der regthoekszijden is gelijk aan het dubbel van de pijl op de andere regthoekszijde.*

Als men verder den straal des cirkels *in* den driehoek beschreven r noemt, heeft men nog

$$r = \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB) = \sqrt{2ab};$$

de straal des ingeschreven cirkels is dus midden evenredig tusschen eene der pijlen en het dubbel der andere.

Voor het tweede antwoord heeft men even zoo, de grootste der pijlen door b voorstellende, zoo $b > 2a$ is,

$$AC + BC = 2\,(b - a),$$
$$AB + AC = 2b,$$
$$AB - BC = 2a,$$
$$r = \sqrt{2ab} - 2a;$$

en, zoo $b < 2a$ is,

$$AC - BC = 2\,(b - a)$$
$$AB + AC = 2b$$
$$AB + BC = 2a$$

en $$r = 3\sqrt{2ab} - 2a - 2b.$$

XXXIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Om en in eenen cirkel zijn gelijkvormige regthoekige driehoeken beschreven; indien nu de zijden op de regthoekszijden des ingeschreven driehoeks gegeven zijn, vraagt men de zijden des omgeschreven driehoeks te berekenen?

OPGELOST door C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, C. BRUININGS, S. DIK, CORNSZ., W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, A. VOS, G. DE WAAL en I. WARNSINCK.

OPLOSSING van C. J. BOLTEN.

Laten LMN en ABC (Fig. 17) de om en in den cirkel beschrevene driehoeken voorstellen; indien dan gegeven zijn DE $= a$, FG $= b$, kunnen wij, volgens het voorgaande voorstel, de zijden des driehoeks ABC berekenen en het tegenwoordige voorstel is dus herleid tot het volgende: *wanneer om eenen gegeven' regthoekigen driehoek een cirkel is beschreven, en om dien cirkel weder een driehoek gelijkvormig aan den vorigen, de zijden van den laatsten driehoek te berekenen?*

Om dus in ons geval de zijden van den driehoek LMN te vinden, nemen wij die van den driehoek ABC, gelijk mede volgens de voorgaande *Aanmerking* den straal r van den in ABC beschreven cirkel als bekend aan, dan hebben wij, omdat AB de middellijn is van den cirkel in den driehoek LMN beschreven, de evenredigheden

$$2r : AB = AB : LM = AC : LN = BC : MN,$$

waaruit volgt

$$LM = \frac{AB^2}{2r},\ LN = \frac{AB \times AC}{2r} \text{ en } MN = \frac{AB \times BC}{2r};$$

alzoo hierin AB, AC, BC en r door het voorgaande voorstel bekend zijn, zijn ook de gevraagde zijden des omgeschreven driehoeks hierdoor bepaald; zijnde het klaar, dat ook hier, even als in het voorgaande voorstel, twee verschillende driehoeken aan de vraag zullen beantwoorden.

XXXV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt de zijden van eenen regthoekigen driehoek zoodanig in de kleinst mogelijke geheele getallen te bepalen, dat, als men om dien driehoek eenen cirkel beschrijft, de pijlen op de zijden mede door geheele getallen worden uitgedrukt?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNZ., M. L. GORDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, F. C. RADIJS, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN, A. VOS, G. DE WAAL, J. BASSAN *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Uit het XXXIII. Voorstel blijkt, dat, als de pijlen op de regtshoekszijden a en b zijn, de zijden des driehoeks, worden voorgesteld door

$$2(a+b+\sqrt{2ab}),\ 2(a+\sqrt{2ab}) \text{ en } 2(b+\sqrt{2ab}),$$

indien wij namelijk alleen het eerste der aldaar gevondene antwoorden gebruiken. Wij behoeven dus voor a en b slechts de kleinste geheele getallen te nemen, die $\sqrt{2ab}$ rationaal maken, en het is duidelijk, dat hiertoe $a = 2$ en $b = 1$ of omgekeerd $a = 1$ en $b = 2$ moet genomen worden, waardoor wij voor de zijden van den verlangden driehoek de getallen 10, 8 en 6 vinden. Wilde men ook het tweede antwoord van het genoemde voorstel bezigen, zoo zoude men geene kleinere getallen voor de zijden verkrijgen, alzoo daar gebleken is, dat de zijden in allen gevalle door evene getallen worden voorgesteld, en de gevondene driehoek, zoo als men algemeen weet, de kleinste in evene getallen is.

XXXVI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Indien in en om eenen cirkel regthoekige driehoeken beschreven zijn, zoodanig dat de zijden van elk dezer driehoeken in reden zijn als de getallen 3, 4 en 5, en dat het getal, waardoor de inhoud van den omgeschreven driehoek wordt uitgedrukt, de tweede magt is van het getal dat den inhoud des ingeschreven driehoeks aangeeft, vraagt men de zijden dier driehoeken te berekenen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, W. G. van Delden, S. Dik, Cornz., M. L. Gorde; B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Laskerek Matthes; M. de Leon, F. C. Radijs, W. J. G. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, G. de Waal *en* H. Warnsinck.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de zijden des omgeschreven driehoeks zijn, $3x$, $4x$ en $5x$, dan is deszelfs inhoud $6x^2$ en deszelfs omtrek $12x$; dezen omtrek in den inhoud deelende, komt er $\frac{1}{2}x$ voor den halven straal des cirkels; de middellijn des cirkels is alzoo $2x$ en deze middellijn tevens de hypothenusa van den ingeschreven driehoek zijnde, vinden wij, door de gegevene betrekking der zijden, voor de regthoekszijden des ingeschreven driehoeks $\frac{6}{5}x$ en $\frac{8}{5}x$, en dus voor deszelfs inhoud $\frac{24}{25}x^2$.

Wij hebben alzoo volgens de opgaaf

$$\sqrt{6x^2} = \frac{24}{25}x^2,$$

waaruit men vindt

$$x = \frac{25}{24}\sqrt{6};$$

de zijden des omgeschreven driehoeks zijn dus

$$\frac{25}{8}\sqrt{6},\ \frac{25}{6}\sqrt{6} \text{ en } \frac{125}{24}\sqrt{6},$$

en die des ingeschreven

$$\frac{5}{4}\sqrt{6},\ \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ en } \frac{25}{12}\sqrt{6};$$

terwijl de inhouden worden uitgedrukt door de getallen

$$39\frac{1}{16} \text{ en } 6\frac{1}{4}.$$

XXXVII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Van drie koorden, in eenen cirkel getrokken, is het gedurig product 57600; en de pijlen, op het midden dezer koorden, zijn 5, 10 en 18; men vraagt hieruit deze koorden te berekenen?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. ACQUOY, J. BASSANT, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNZ., D. VAN BANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, M. G. SNOEK, A. DE VOS, G. DE WAAL, W. G. VAN DELDEN, B. DE JONGH, F. G. RADIJS *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Zij M (Fig. 18) het middelpunt des cirkels, laten AB', BC' en CA' de daarin getrokkene koorden en DE $= 5$, FG $= 10$ en HI $= 18$ de gegevene pijlen zijn; stellen wij den straal door r voor, dan is volgens de eigenschappen des cirkels

$$AB' = 2AD = 2\sqrt{DE(2r - DE)} = 2\sqrt{5(2r-5)} = 2\sqrt{(10r-25)};$$
$$BC' = 2BF = 2\sqrt{FG(2r - FG)} = 2\sqrt{10(2r-10)} = 4\sqrt{(5r-25)};$$
$$CA' = 2CH = 2\sqrt{HI(2r - HI)} = 2\sqrt{18(2r-18)} = 12\sqrt{(r-9)};$$

daar nu het product dezer drie koorden 57600 moet zijn, hebben wij terstond de vergelijking

$$2\sqrt{(10r-25)} \times 4\sqrt{(5r-25)} \times 12\sqrt{(r-9)} = 57600;$$

deze vergelijking door $2\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} \times 12 = 480$ deelende komt er $\sqrt{(2r-5)} \times \sqrt{(r-5)} \times \sqrt{(r-9)} = 120$

of $(2r-5)(r-5)(r-9) = 14400$

en na ontwikkeling

$$2r^3 - 33r^2 + 160r - 14625 = 0;$$

de eenige bestaanbare wortel dezer vergelijking is $r = 25$, en deze waarde van r in de bovenstaande uitdrukkingen substituerende, vinden wij voor de koorden

$$AB' = 30, \quad BC' = 40 \text{ en } CA' = 48.$$

AANMERKING *uit de zes eerstgenoemde oplossingen.* Indien men begeerde, dat de koorden, tot de gegevene pijlen behoorende, de zijden van eenen in den cirkel beschreven driehoek waren, zoude men derzelver product niet naar welgevallen kunnen nemen; want de gegevene pijlen zouden alsdan voldoende zijn, om de zijden des driehoeks en dus ook derzelver product te bepalen. Stelt men zich namelijk voor: *De zijden eens driehoeks te berekenen, indien, om dien driehoek een*

cirkel beschreven zijnde, de pijlen op het midden der zijden gegeven zijn? Laat dan ABC (Fig. 19) dien driehoek voorstellen, DE $= a$, FG $= b$, HI $= c$ de gegevene pijlen en r de onbekende straal des cirkels zijn, zoo heeft men, het middelpunt M met een der hoekpunten, bij v. D, vereenigd hebbende,

$$MD = BM\ Cos.\ BMD$$

of, daar MD $= r - a$, BM $= r$, *hoek* BMD $=$ *hoek* C is,

$$r - a = r\ Cos.\ C,$$

even zoo vindt men $\quad r - b = r\ Cos.\ A$

en $\quad r - c = r\ Cos.\ B,$

waaruit volgt

$$Cos.\ A = \frac{r-b}{r},\ Cos.\ B = \frac{r-c}{r},\ Cos.\ C = \frac{r-a}{r};$$

nu is, volgens eene bekende eigenschap der driehoeken,

$$Cos.^2 A + Cos.^2 B + Cos.^2 C + 2\ Cos.\ A\ Cos.\ B\ Cos.\ C = 1,$$

en dus ook

$$\frac{(r-b)^2}{r^2} + \frac{(r-c)^2}{r^2} + \frac{(r-a)^2}{r^2} + \frac{2\,(r-b)\,(r-c)\,(r-a)}{r^3} = 1;$$

uit deze vergelijking de breuken wegmakende, alles ontwikkelende en herleidende, vindt men

$$r^3 - (a+b+c)\,r^2 + \tfrac{1}{4}\,(a+b+c)^2\,r - \tfrac{1}{2}\,abc = 0,$$

door welke derdemagtsvergelijking men de waarde van r kan vinden, terwijl dan de zijden des driehoeks gevonden worden, door de vergelijkingen

$$AB = 2\sqrt{a\,(2r-a)},$$
$$BC = 2\sqrt{b\,(2r-b)}$$

en

$$AC = 2\sqrt{c\,(2r-c)}.$$

Indien dus de pijlen $a = 5$, $b = 10$ en $c = 18$ gegeven zijn, hebben wij

$$r^3 - 33\,r^2 + 272\tfrac{1}{4}\,r - 450 = 0,$$

welke vergelijking drie bestaanbare positieve wortels heeft, tusschen 2 en 3, tusschen 9 en 10 en tusschen 21 en 22, alleen dezen laatsten wortel gebruikende, omdat de beide andere kleiner dan twee der gegevene pijlen zijn, hebben wij door benadering nagenoeg

$$r = 21,12,$$

waaruit dan verder volgt

$$AB = 27,28,\quad BC = 35,88,\quad AC = 41,76$$

en $\quad AB \times BC \times AC = 40874,88.$

Opdat derhalve de koorden, in het voorstel bedoeld, zijden

van een in den cirkel beschreven driehoek zouden kunnen wezen, zou derzelver product bijna 40875, in plaats van 57600, moeten zijn.

Zet men dan ook (Fig. 20) de gevondene koorden $AB = 30$, $BC = 40$, $CA' = 48$ in den cirkel uit, welks straal 25 is, dan onderspannen de twee eersten juist te zamen den halven omtrek, om dat de som hunner vierkanten gelijk is aan het vierkant van de middellijn; de koorde CA' kleiner dan de middellijn zijnde, blijft er dus nog eene boog AA' over, waarvan de koorde 14 en de pijl 1 is.

XXXVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

In elk trapezium is het dubbele product van de twee evenwijdige zijden gelijk aan de som van de vierkanten der diagonalen, verminderd met de som van de vierkanten der zijden, die niet evenwijdig loopen. Men vraagt naar het bewijs hiervan?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, L. J. Ulman, J. Bassan, H. W. Bloem, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, G. Graafland, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lakkeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, A. Vos, G. de Waal, I. Warnsinck, S. Dik, Cornz, M. L. Goede *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABCD (Fig. 21) een trapezium zijn, waarin de diagonalen AC en BD getrokken zijn, en waarin men, uit de punten B en C, loodlijnen BF en CE op AD heeft laten vallen, dan heeft men in de driehoeken ACD en ABD

$$AC^2 = CD^2 + AD^2 - 2\,AD \times DE$$

en $$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\,AD \times AF;$$

de som hiervan nemende, vindt men

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2\,AD\,\{AD - (AF + DE)\},$$

maar $AD - (AF + DE) = BC$ zijnde, is ook

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2\,AD \times BC$$

of $$(AC^2 + BD^2) - (AB^2 + CD^2) = 2\,AD \times BC,$$

waardoor het gestelde bewezen is.

Aanmerking *van* J. Acquoy *en* L. J. Ulman. Indien,

het toppunt E der loodlijn CE aan de andere zijde van D mogt vallen, zoude het bewijs volmaakt hetzelfde zijn, mits men slechts overal de lijn DE, die in dat geval als negatief moet beschouwd worden, van teeken veranderde; indien het voetpunt F der loodlijn BF aan de andere zijde van A mogt vallen, zoude men even zoo slechts den negatieven toestand der lijn AF behoeven in het oog te houden.

XXXIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

In elk trapezium is het verschil der evenwijdige zijden gelijk aan het dubbel van de lijn, die het midden der diagonalen vereenigt. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, J. ACQUOY, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, A. VOS, G. DE WAAL, I. WARNSINCK, S. DIK, CORNZ., M. L. GOLDE *en* M. G. SNOEK

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien men, door het midden G van de zijde AB des trapeziums ABCD (Fig. 21) eene lijn GH evenwijdig met BC en AD trekt, deelt deze lijn de diagonalen AC en BD in I en K midden door; de lijn IK, die het midden der diagonalen vereenigt, is derhalve evenwijdig met de evenwijdige zijden van het trapezium; wij hebben alzoo de evenredigheden

$$GK : AD = GB : AB = 1 : 2$$

en $$GI : BC = AG : AB = 1 : 2,$$

waaruit volgt $$2\,GK = AD,$$

$$2\,GI = BC;$$

door aftrekking dezer vergelijkingen, vindt men terstond

$$2\,IK = AD - BC,$$

waardoor de stelling is bewezen.

XL. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Van de vergelijking $x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - a = 0$ *zijn twee der wortels* $x = 5 \pm \sqrt{b}$*; men vraagt naar de waarde van a en b, alsmede naar de beide andere wortels der vergelijking?*

Opgelost door W. J. C. Rammelman Elsevier, W. G. van Delden, M. L. Goede, J. Acquoy, J. Bassan, S. T. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, L. J. Uhlman, A. Vos, I. Warnsinck, H. W. Bloem, en M. de Leon.

I. Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Daar $x = 5 + \sqrt{b}$ en $x = 5 - \sqrt{b}$ wortels van de voorgestelde vergelijking zijn, moeten $x - 5 - \sqrt{b}$ en $x - 5 + \sqrt{b}$ factoren van derzelver eerste lid wezen, en dit eerste lid moet derhalve zonder overschot, door het product dier twee factoren, kunnen gedeeld worden. Deelt men dus

$$x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - a,$$

door het genoemde product, hetwelk is

$$x^2 - 10x + 25 - b,$$

dan verkrijgt men voor quotient

$$x^2 + x + b - 3,$$

terwijl men als rest overhoudt

$$11(b - 1)x + (b^2 - 28b + 75 - a);$$

deze rest moet nu, opdat de genoemde deelbaarheid plaats hebbe, voor alle waarden van x, gelijk nul zijn, waartoe gevorderd wordt, dat men heeft

$$b - 1 = 0 \quad \text{en} \quad b^2 - 28b + 75 - a = 0;$$

uit de eerste dezer vergelijkingen volgt

$$b = 1,$$

welke w a de, in de tweede gesubstitueerd zijnde, terstond doet vinden

$$a = 48,$$

waardoor het eerste gedeelte der vraag is opgelost; blijkende hierdoor tevens dat de gegevene wortels zijn

$$x = 6 \quad \text{en} \quad x = 4.$$

Om de beide andere wortels te vinden, neme men in aanmerking dat, uit den aard der zaak, het bovengevondene quotient

$$x^2 + x + b - 3 = 0$$

moet wezen; hierin $b = 1$ stellende, heeft men dus

$$x^2 + x = 2,$$

waaruit voor de beide andere wortels gevonden wordt

$$x = 1 \quad \text{en} \quad x = -2.$$

De opgegevene vergelijking is dus

$$x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48 = 0,$$

en hare wortels zijn

$$x = 1, \; x = -2, \; x = 4 \quad \text{en} \quad x = 6.$$

II. Oplossing van W. G. van Delden.

Indien men de onbekende wortels door c en d voorstelt, heeft men de vier wortels

$$5 + \sqrt{b},\quad 5 - \sqrt{b},\quad c \text{ en } d;$$

derzelver som is $10 + c + d$,

de som van derzelver producten twee aan twee, is

$$25 - b + 10\,(c + d) + c\,d,$$

terwijl men voor de som van derzelver producten drie aan drie vindt $(25 - b)\,(c + d) + 10\,c\,d$

en voor het product van alle vier de wortels

$$(25 - b)\,c\,d;$$

daar nu de vergelijking is

$$x^4 - 9\,x^3 + 12\,x^2 + 44\,x - a = 0,$$

heeft men, volgens de eigenschappen der hoogere magts-vergelijkingen,

$$10 + c + d = 9 \;\ldots\ldots\; (1),$$

$$25 - b + 10\,(c + d) + c\,d = 12 \;\ldots\; (2),$$

$$(25 - b)\,(c + d) + 10\,c\,d = -\,44 \;\ldots\; (3)$$

en

$$(25 - b)\,c\,d = -\,a \;\ldots\; (4);$$

uit (1) volgt terstond $c + d = -\,1 \;\ldots\; (5)$,

deze waarde in (2) en (3) overbrengende, verkrijgt men

$$c\,d - b = -\,3 \;\ldots\; (6)$$

en

$$10\,c\,d + b = -\,19 \;\ldots\; (7),$$

de som hiervan is $11\,c\,d = -\,22$,

waaruit volgt $c\,d = -\,2 \;\ldots\; (8)$;

deze waarde van $c\,d$ in (6) overbrengende, vindt men

$$b = 1,$$

terwijl uit (5) en (8) op de gewone wijze gevonden wordt

$$c = 1 \quad \text{en} \quad d = -\,2,$$

zoo dat men dan volgens (4) heeft

$$a = 48;$$

men heeft dus, even als in de vorige oplossing, voor de vergelijking $x^4 - 9\,x^3 + 12\,x^2 + 44\,x - 48 = 0$ en voor hare wortels

$$5 + \sqrt{b} = 6,\quad 5 - \sqrt{b} = 4,\quad c = 1 \text{ en } d = -2.$$

III. Oplossing van M. L. Goede.

Dewijl $x = 5 + \sqrt{b}$ en $x = 5 - \sqrt{b}$ aan de opgegevene vergelijking moeten voldoen, vindt men, door deze waarden van x in dezelve te substitueren,

$$20 - 11\sqrt{b} + 27b + 11b\sqrt{b} + b^2 - a = 0$$
en $$20 + 11\sqrt{b} + 27b - 11b\sqrt{b} + b^2 - a = 0:$$
het verschil en de som hiervan geeft ons de beide nieuwe vergelijkingen $$22\sqrt{b} - 22b\sqrt{b} = 0$$
en $$40 + 54b + 2b^2 - 2a = 0;$$
de eerste door $22\sqrt{b}$ deelende, vinden wij terstond
$$1 - b = 0, \text{ of } b = 1;$$
deze waarde van b in de tweede substituerende, vinden wij dadelijk $a = 48$. Hierdoor voor de opgegevene vergelijking,
$$x^4 - 9x^3 + 12x^2 + 44x - 48 = 0$$
en voor twee van hare wortels $x = 6$ en $x = 4$ gevonden hebbende, vinden wij op de gewone wijze voor de beide andere wortels $x = -2$ en $x = 1$.

XLI. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Als men in de ontwikkeling van Nep. log. $(1 - x)$ *stelt, dat* $x = 1$ *is, vindt men, dat de som der oneindig voortloopende reeks* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, enz., *een oneindig groot getal is; men verlangt dit zelfde meetkunstig te bewijzen?*

Opgelost *door* H. van Blanken.

Oplossing *van* H. van Blanken.

Laat de lijn AB (Fig. 22) voor eenheid aangenomen en onbepaald verlengd worden, laat op dat verlengde achtervolgens stukken BC, CD, DE, EF, *enz.* genomen worden, die respectievelijk 1, 2, 4, 8, *enz.* eenheden bevatten; en voorts op AB, BC, CD, DE, EF, *enz.* regthoeken Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, *enz.* beschreven worden, die respectievelijk 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ *enz.* tot hoogte hebben; dan heeft men voor de inhouden dier regthoeken,

$$Aa = 1,\ Bb = \tfrac{1}{2},\ Cc = \tfrac{1}{2},\ Dd = \tfrac{1}{2},\ Ee = \tfrac{1}{2},\ enz.$$

daar nu het aantal dezer regthoeken oneindig is, en ieder opvolgende regthoek de inhoud $\frac{1}{2}$ heeft, is de som van alle die regthoeken oneindig groot, of, deze som s noemende,

$$s = \infty.$$

Laat andermaal op elk der eenheden AB, BC, CC′, C′D, DD′, *enz.* regthoeken Aa, Bb, Cb′ C′c, Dc′, *enz.* beschreven worden, die respectievelijk 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, *enz.* tot hoogte hebben, dan heeft men voor de inhouden dier regthoeken,

Aa $=1$, Bb $=\frac{1}{2}$, Cb′ $=\frac{1}{3}$, C′c $=\frac{1}{4}$, Dc′ $=\frac{1}{5}$, enz.
en derhalve, hunne som door S voorstellende,

$$S=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{enz.}$$

Nu is het uit de figuur klaar, dat de som der laatstgenoemde regthoeken grooter is, dan de som der eerstbeschrevene regthoeken, men heeft dus

$$S>s,$$

maar er is reeds gebleken dat $s=\infty$ is, bijgevolg moet ook

$$S=\infty,$$

dat is:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{enz.}=\infty$$

wezen.

GEVOLGEN. 1°. Daar een oneindig groot getal met een eindig getal verminderd, daarmede vermenigvuldigd of er door gedeeld wordende, de rest, het product en het quotient nog oneindig groot zal wezen, zoo volgt uit het bewezene, dat de som van elke oneindige voortloopende afdalende harmonische reeks een oneindig groot getal is. Laat men namelijk van de reeks

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\text{enz.}=\infty$$

de $n-1$ eerste termen weg, dan verkrijgt men

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\text{enz.}=\infty,$$

deze reeks met a vermenigvuldigende, komt er

$$\frac{a}{n}+\frac{a}{n+1}+\frac{a}{n+2}+\frac{a}{n+3}+\text{enz.}=\infty,$$

en dezelve vervolgens door q deelende en $qn=p$ stellende,

$$\frac{a}{p}+\frac{a}{p+q}+\frac{a}{p+2q}+\frac{a}{p+3q}+\text{enz.}=\infty;$$

waardoor, omdat in den laatsten vorm alle afdalende harmonische reeksen begrepen zijn, het gestelde bewezen is.

2°. Daar de lijnen Ba, Cb, Dc, Ed, enz. in de omgekeerde reden zijn van de afstanden AB, AC, AD, AE, enz., zoo liggen de punten a, b, c, d, enz. in den omtrek eener gelijkzijdige hijperbool, die A tot middelpunt, a tot top en AE tot asymptote heeft; de vlakke inhoud, begrepen tusschen deze hijperbool en hare asymptote, klaarblijkelijk grooter dan de som der regthoeken Bb′, Cc, Dd, Ee, enz. zijnde, is bijgevolg mede oneindig groot.

XLII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Wanneer men het eene been eens passers in eenig punt van het oppervlak eens regthoekigen cirkelvormigen cilinders stelt, en het andere been, de opening des passers dezelfde blijvende, langs het oppervlak van den cilinder rond beweegt, dan beschrijft dit tweede been op het cilindervlak eene kromme lijn van dubbele kromming, welke bij de ontwikkeling van het cilindervlak in eene vlakke kromme lijn zal overgaan; men vraagt naar de vergelijking van deze vlakke kromme lijn?

OPGELOST *door* H. VAN BLANKEN, J. ACQUOY, L. J. ULMAN, C. F. JULIUS, W. G. VAN DELDEN, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* H. VAN BLANKEN.

Laat in Fig. 23 P het punt zijn, waarin het eene been des passers geplaatst is, terwijl het andere been op het cilindervlak de kromme lijn ADBQC heeft beschreven. Men brenge dan door P een vlak loodregt op den as des cilinders, dit vlak zal het cilindervlak volgens eenen cirkel GH snijden, waarvan wij de straal, die gelijk aan den straal des cilinders is, voor eenheid aannemen; laat verder uit een willekeurig punt Q der kromme lijn eene loodlijn QM, op het vlak des cirkels GH vallen, dan zal het voetpunt M dezer loodlijn ergens in den omtrek van dien cirkel gelegen zijn; trekken wij vervolgens de regte lijnen PQ en PM, dan is, omdat QM loodregt op het vlak GH staat, de driehoek PMQ regthoekig in M en dus,

$$PQ^2 = QM^2 + PM^2.$$

Stellen wij nu de opening des passers $PQ = r$, *boog* $PM = x$, dus $PM = koorde\ x$, en $QM = y$, dan verandert bovenstaande vergelijking in

$$r^2 = y^2 + koorde^2\ x,$$

of, omdat $koorde\ x = 2\ Sin.\ \frac{1}{2}\ x$ is,

$$r^2 = y^2 + 4\ Sin.^2\ \frac{1}{2}\ x \quad (1)$$

Ontwikkelen wij nu het oppervlak des cilinders, zoo als hetzelve in Fig. 24 is voorgesteld, dan gaat de cirkel GAPMBH in eene regte lijn over, waarop ook nog na die ontwikkeling QM regthoekig zijn zal; de lijn QM is voor en na de ont-

wikkeling even groot, maar de lijn PM na de ontwikkeling, is hetgeen de boog PM vóór de ontwikkeling was. Indien wij dus in Fig. 24 GH voor as der abscissen en P voor oorsprong der onderling regthoekige coördinaten aannemen, zal de bovenstaande transcendentale vergelijking (1) die der begeerde kromme lijn zijn.

Uit deze vergelijking volgt terstond

$$y = \pm \sqrt{(r^2 - 4\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2);$$

schrijft men in dezelve $1 - Cos.\, x$ in plaats van $2\, Sin.^2 \tfrac{1}{2} x$, dan verkrijgt men

$$r^2 = y^2 + 2 - 2\, Cos.\, x,$$

waaruit volgt $\quad Cos.\, x = 1 - \tfrac{1}{2} (r^2 - y^2)$

en $\quad x = Boog\ Cos.\ \{1 - \tfrac{1}{2} (r^2 - y^2)\} \quad . \quad . \quad . \quad (3).$

De vergelijking (2) toont door het dubbele teeken aan, dat de kromme lijn boven en beneden GH volmaakt denzelfden vorm heeft; daar verder tot eenen zelfden Cosinus altijd een even groote positieve en negatieve boog behoort, volgt uit de vergelijking (3), dat de kromme lijn ter wederzijde van CD insgelijks denzelfden vorm heeft, zoo dat de lijnen CD en GH dezelve in vier gelijke en gelijkvormige deelen verdeelen. Daar voorts tot eenen zelfden Cosinus een oneindig aantal boogen behoort, geeft elke waarde van y eene oneindig aantal waarden aan x, die onderling een of meermalen den omtrek van GH, dat is 2π, verschillen; zoo heeft men voor eenige waarde $y = QM$ (Fig. 24), $x = PM$, $x = 2\pi - PM = PM'$, $x = Pm$, $x = 2\pi + Pm = Pm'$, enz. terwijl alsdan $MM' = mm' = 2\pi$ is; hieruit volgt, dat de gevondene vergelijking behoort tot oneindig vele gelijke en gelijkvormige takken, die, wanneer het vlak van Fig. 24 wederom om den cilinder werd gewonden, elkander zouden bedekken.

De grootste waarde, die y hebben kan, is $y = r$, want $y > r$ zijnde, zoude volgens (3) $Cos.\, x > 1$ en dus x onbestaanbaar worden. De kleinste waarde, die y kan hebben, hangt af van de hoegrootheid van r. Uit de vergelijking (2) namelijk, blijkt, dat $y = 0$ zal worden, indien

$$r = 2\, Sin.\ \tfrac{1}{2} x$$

of $\quad x = 2\ Boog\ Sin.\ \tfrac{1}{2} r$

genomen wordt, is $r < 2$, of $r = 2$, dan is het altijd mogelijk x zoodanig te nemen, maar is $r > 2$, dan kan dit

niet geschieden, om dat de Sinus van eenigen boog niet grooter dan 1 kan zijn; in dit laatste geval kan dus y niet gelijk nul worden, en zal de kleinste waarde die y hebben kan verkregen worden, door de term $4\ Sin.^2\ \frac{1}{2}\ x$ zoo groot mogelijk, dat is door $x = \pi$ te nemen.

In Fig. 24 hebben wij de gevraagde kromme lijn aanvankelijk voor $r < 2$ geteekend; voor $r = 2$ en $r > 2$ hebben wij dezelve door gestipte lijnen aangewezen, in het laatste geval verkrijgt de kromme lijn, bij elke nieuwe ontwikkeling des cilindervlaks, boven en beneden de as een stelsel van twee buigpunten.

Aanmerking van J. Acquoy. Door de oplossing van dit voorstel, heeft men tevens de vergelijking bepaald der, tot eene vlakke kromme lijn ontwikkelde, doorsnede van een cilindervlak, met het oppervlak van eenen bol, welks middelpunt in dat cilindervlak gelegen is.

XLIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Men vraagt in de vergelijking

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + C = 0,$$

C zoodanig te bepalen, dat de vergelijking twee gelijke wortels bekomt?

Opgelost door J. Badon Ghijben, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, S. T. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, en L. Warnsinck.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

Indien men de opgegevene vergelijking differentieert alsof x eene veranderlijke grootheid ware, en daarna door δx deelt, komt er

$$4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 0;$$

indien nu de opgegevene vergelijking twee gelijke wortels zal hebben, moet, volgens de theorie der hoogere magts-vergelijkingen, eene zelfde waarde van x aan de oorspronkelijke vergelijking en aan die, welke wij er uit hebben afgeleid, voldoen. Deze afgeleide vergelijking kan men aldus ontbinden:

$$4(x-1)(x-2)(x-3) = 0;$$

aan dezelve kan voldaan worden door $x = 1$, $x = 2$ of $x = 3$ te nemen; en elk dezer waarden van x, in de opgegevene vergelijking gesubstitueerd wordende, zal voor C een getal doen kennen, hetwelk, in plaats van C gesteld, teweeg brengt, dat dezelfde waarde van x ook aan de opgegevene vergelijking voldoet.

Substitueert men in de opgegevene vergelijking

$x = 1$, zoo vindt men $C = 9$,
$x = 2$, » » » $C = 8$,
$x = 3$, » » » $C = 9$;

wij verkrijgen dus twee antwoorden op het gevraagde, te weten $C = 8$ en $C = 9$; voor $C = 8$ hebben wij de vergelijking

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8 = 0,$$

waarvan de wortels zijn

$$x = 2, \quad x = 2, \quad x = 2 + \sqrt{2} \text{ en } x = 2 - \sqrt{2};$$

voor $C = 9$ hebben wij de vergelijking

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9 = 0,$$

die tot wortels heeft

$$x = 1, \quad x = 1, \quad x = 3 \text{ en } x = 3.$$

XLIV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men vraagt de oneindig voortloopende reeks

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{1(n+1)} + \frac{1}{1.2.(n+2)} + \frac{1}{1.2.3.(n+3)} + \text{enz.}$$

voor alle geheele positieve waarden van n *te sommeren?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Indien wij de termen der opgegevene reeks respectievelijk met x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, x^{n+3}, enz. vermenigvuldigen, verkrijgen wij eene andere reeks, welker som eene functie van x en van n zal wezen, en die door $x = 1$ te stellen in de opgegevene reeks zal overgaan. Stellen wij derhalve

$$F(x,n) = \frac{1}{n}x^{n} + \frac{1}{1(n+1)}x^{n+1} + \frac{1}{1.2.(n+2)}x^{n+2} + \frac{1}{1.2.3.(n+3)}x^{n+3} + enz. \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

dan zal het er slechts op aankomen, om de waarde van F (1 , n) te bepalen, voor elke geheele positieve getallen waarde van n. Om hiertoe te geraken, differentieren wij deze functie ten opzigte van x, dan komt er

$$\partial . F(x,n) = (x^{n-1} + \frac{x^{n}}{1} + \frac{x^{n+1}}{1.2} + \frac{x^{n+2}}{1.2.3} + enz.)\,\partial x$$

$$= x^{n-1}\,\partial x\,(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^{2}}{1.2} + \frac{x^{3}}{1.2.3} + enz.),$$

of, daar de laatste factor juist de ontwikkeling is van e^{x}, e het grondtal van het Neperiaansch Logarithmen stelsel voorstellende,

$$\partial . F(x,n) = x^{n-1}\,e^{x}\,\partial x;$$

indien wij nu wederom integreren, komt er

$$F(x,n) = C + \int x^{n-1}\,e^{x}\,\partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Nu is in het algemeen, (Zie I. R. Schmidt, *Diff. en Integr. Rek.* pag. 303) wanneer X eene willekeurige functie van x voorstelt,

$$\int X e^{x}\,\partial x = e^{x}\,(X - \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial^{2} X}{\partial x^{2}} - \frac{\partial^{3} X}{\partial x^{3}} + enz.),$$

hierin $X = x^{n-1}$ substituerende, komt er

$$\int x^{n-1}\,e^{x}\,\partial x = e^{x}\,\{x^{n-1} - (n-1)\,x^{n-2} + (n-1)(n-2)\,x^{n-3} - enz. \ldots \pm (n-1)(n-2) \ldots 2.1.\},$$

waarin het bovenste of benedenste teeken geldt, naar gelang n oneven of even is, en dus gaat (2) over in

$$F(x,n) = C + e^{x}\,\{x^{n-1} - (n-1)\,x^{n-2} + (n-1)(n-2)\,x^{n-3} - enz. \ldots \pm (n-1)(n-2) \ldots 2.1.\};$$

Om de waarde van C, die alleen van n kan afhangen, te bepalen, merken wij op, dat volgens (1), voor $x = 0$, ook $F(x, n) = 0$ moet worden; stellen wij dus in de laatste vergelijking $x = 0$, dan vinden wij, indien $n > 1$ is,

$$0 = C \pm (n-1)(n-2)\dots.2.1, \text{ of } C = \mp (n-1)(n-2)\dots.2.1,$$

terwijl, voor $n = 1$, de substitutie van $x = 0$ geeft

$$0 = C + 1, \text{ of } C = -1;$$

wij hebben derhalve

$$F(x, n) = \mp (n-1)(n-2)\dots.2.1 +$$
$$+ e^x\{x^{n-1} - (n-1)x^{n-2} + (n-1)(n-2)x^{n-3} - \text{enz.}\dots \pm (n-1)(n-2)\dots.2.1\} \quad . \; . \; . \quad (3);$$

of, $x = 1$ stellende,

$$F(1, n) = \mp (n-1)(n-2)\dots.2.1 +$$
$$+ e\{1 - (n-1) + (n-1)(n-2) - \text{enz.}\dots. \pm (n-1)(n-2)\dots.2.1\} \quad . \; . \; . \; . \quad (4);$$

in beide van welke vergelijkingen nu de bovenste teekens gebruikt moeten worden, indien n oneven, en de benedenste, indien n even is; terwijl ook in beide, voor het bijzonder geval van $n = 1$, de eerste term van het tweede lid door -1 moet worden vervangen.

Omdat nu n een geheel getal voorstelt, zal de reeks, waaruit de laatste factor der vergelijking (4) bestaat, ergens afbreken en uit een eindig getal termen bestaan; zoodat men door (4), voor eene gegevene waarde van n, de waarde van $F(1, n)$, dat is: de som der opgegevene reeks, zal kunnen berekenen.

Stellen wij in (4) achtervolgens $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, enz. zoo vinden wij:

$$F(1,1)=\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\text{enz.}=e-1,$$
$$F(1,2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.4}+\frac{1}{1.2.3.5}+\text{enz.}=1,$$
$$F(1,3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{1.4}+\frac{1}{1.2.5}+\frac{1}{1.2.3.6}+\text{enz.}=e-2,$$
$$F(1,4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{1.5}+\frac{1}{1.2.6}+\frac{1}{1.2.3.7}+\text{enz.}=-2e+6,$$
$$F(1,5)=\frac{1}{5}+\frac{1}{1.6}+\frac{1}{1.2.7}+\frac{1}{1.2.3.8}+\text{enz.}=9e-24,$$
$$F(1,6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{1.7}+\frac{1}{1.2.8}+\frac{1}{1.2.3.9}+\text{enz.}=-44e+120,$$
$$F(1,7)=\frac{1}{7}+\frac{1}{1.8}+\frac{1}{1.2.9}+\frac{1}{1.2.3.10}+\text{enz.}=265e-720,$$
enz. *enz.*

met een weinig aandacht, ontdekt men al spoedig eene wet, volgens welke de achtervolgende sommen der bovenstaande reeksen opklimmen; men heeft namelijk:

$$\left.\begin{aligned} F(1,2) &= e-1\times F(1,1),\\ F(1,3) &= e-2\times F(1,2),\\ F(1,4) &= e-3\times F(1,3),\\ F(1,5) &= e-4\times F(1,4),\ \text{enz.}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (A);$$

men kan zich gemakkelijk overtuigen, dat deze wet steeds dezelfde zal blijven, en dat dus in het algemeen

$$F(1,n+1)=e-n\times F(1,n)\quad\ldots\quad(5)$$

zal wezen; men heeft namelijk

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\text{enz.}$$

vermenigvuldigt men de opgegevene reeks met n, dan vindt men

$$n\times F(1,n)=1+\frac{n}{1(n+1)}+\frac{n}{1.2(n+2)}+\frac{n}{1.2.3(n+3)}+\text{enz.},$$

trekt men verder deze vergelijkingen term voor term van elkander af, dan vindt men

$$e-n\times F(1,n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{1(n+2)}+\frac{1}{1.2.(n+3)}+\text{enz.};$$

en daar nu het tweede lid dezer laatste vergelijking ook verkregen wordt, wanneer men in de opgegevene reeks $F(1,n)$, overal $n+1$ in plaats van n schrijft, is hierdoor de wet van opvolging, door (5) aangeduid, buiten allen twijfel gesteld. Door behulp dezer wet van opvolging, kunnen wij nu, zonder de vergelijking (4) verder noodig te hebben, de som der reeks voor elke waarde van $n = a$ vinden, zoodra die som

voor $n = a - 1$ bekend is; zoo heeft men volgens (5), daar $F(1,7) = 265\,e - 720$ gevonden is,

$$F(1,8) = e - 7 \times F(1,7) = e - 7(265\,e - 720) = -1854\,e + 5040,$$
$$F(1,9) = e - 8 \times F(1,8) = e - 8(-1854\,e + 5040) = 14833\,e - 40320, \text{ enz.}$$

Door in de vergelijking (5) n achtervolgens door $n + 1$, $n + 2$, enz. te vervangen, heeft men

$$\left.\begin{aligned} F(1,n+1) &= e - n \times F(1,n) \\ F(1,n+2) &= e - (n+1)\,F(1,n+1), \\ F(1,n+3) &= e - (n+2)\,F(1,n+2), \\ F(1,n+4) &= e - (n+3)\,F(1,n+3), \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \ldots (B);$$

verdrijft men e uit de twee eerste dezer vergelijkingen, zoo vindt men

$$F(1,n+2) = n\,\{F(1,n) - F(1,n+1)\} \ldots (6),$$

waardoor het vinden van de som der reeks, voor eenige waarde van n, afhangt van het kennen dezer som, voor de twee onmiddelijk voorafgaande waarden van n; om bij v. $F(1,10)$ te vinden, heeft men volgens (6)

$$F(1,10) = 8\,\{F(1,8) - F(1,9)\}$$

of, voor $F(1,8)$ en $F(1,9)$ de gevondene waarden stellende,

$$F(1,10) = 8\,\{-1854\,e + 5040 - 14833\,e + 40320\} =$$
$$= -133496\,e + 362880;$$

substitueert men de vergelijkingen (B) in elkander, zoo vindt men

$$\left.\begin{aligned} F(1,n+2) &= -ne + n(n+1) \times F(1,n), \\ F(1,n+3) &= (n+1)^2 e - n(n+1)(n+2)\,F(1,n), \\ F(1,n+4) &= -(n+2)(n^2+3n+1)e + n(n+1)(n+2)(n+3)\,F(1,n) \text{ enz.} \end{aligned}\right\} 7;$$

waardoor de som der opgegevene reeks voor $n = a$ gevonden wordt, indien dezelve voor $n = a - 2$, voor $n = a - 3$, of voor $n = a - 4$, enz. bekend is geworden; neemt men bij v. in de laatste vergelijking $n = 10$, zoo verkrijgt men

$$F(1,14) = -1572\,e + 17160 \times F(1,10)$$

en hierin voor $F(1,10)$ de bovengevondene waarde substituerende, komt er

$$F(1,14) = -2290792932\,e + 6227020800.$$

Uit al het bovenstaande is dus gebleken, hoe men, het getal e als bekend aannemende, door middel der vergelijking (4), voor eenige bepaalde waarde van n, onmiddelijk de som der opgegevene reeks kan vinden; en hoe men dezelve, door middel der vergelijkingen (5), (6) en (7), kan aflei-

den, uit de sommen, die men voor dezelfde reeks, voor kleinere waarden van n heeft gevonden; zoodat hierdoor ons voorstel is opgelost.

Aanmerkingen. 1°. Indien men, van $n = 3$ te beginnen, de sommen der voorgestelde reeks, voor de opvolgende waarden van n gelijk nul stelt, verkrijgt men

$F(1,3) = e - 2 = 0$, waaruit volgt $e = 2$,

$F(1,4) = -2e + 6 = 0$, » » $e = 3$,

$F(1,5) = 9e - 24 = 0$, » » $e = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$,

$F(1,6) = -44e + 120 = 0$, » » $e = \frac{120}{44} = \frac{30}{11}$,

$F(1,7) = 265e - 720 = 0$, » » $e = \frac{720}{265} = \frac{144}{53}$,

$F(1,8) = 1854e + 5040 = 0$, » » $e = \frac{5040}{1854} = \frac{280}{103}$,

$F(1,9) = 14833e - 40320 = 0$, » » $e = \frac{40320}{14833} = \frac{5760}{2119}$, enz.

deze waarden van e zullen klaarblijkelijk beurtelings te klein en te groot wezen, doch dezelve zullen meer en meer tot de juiste waarde van e naderen, en daarvan minder verschillen, dan het quotient dat men verkrijgt, wanneer men de eenheid, door den coëfficient, die e in de overeenkomstige vergelijking heeft, deelt; want het is blijkbaar, dat de waarden van $F(1,3)$, $F(1,4)$ enz. alle kleiner dan $F(1,2)$ en dus kleiner dan de eenheid zijn. Zoo zal bij v. $e = \frac{5760}{2119}$ minder dan $\frac{1}{14833}$ van de juiste waarde van e afwijken.

Men kan ook, in plaats van zich met deze grens voor de afwijking der gevondene breuk te vergenoegen, grenzen vinden waar tusschen de juiste waarde van het getal e moet liggen; tot een voorbeeld, nemen wij de gevondene uitkomst

$$F(1,14) = -2290792932\,e + 6227020800,$$

waaruit, daar $F(1,14)$ positief en kleiner dan 1 is, volgt

$-2290792932e + 6227020800 < 1$ en $-2290792932\,e + 6227020800 > 0$,

dat is: $e > \frac{6227020799}{2290792932}$ en $e < \frac{6227020800}{2290792932}$

of, deze breuken in tiendeeligen ontwikkelende,

$e > 2{,}7182818281\ldots,$ en $e < 2{,}7182818286\ldots,$
hetwelk met de bekende waarde van e overeenkomt.

2°. Stelt men in de vergelijkingen (1) en (3) $x = -1$, dan komt er

$$F(-1,n) = \mp\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{1.(n+1)} + \frac{1}{1.2(n+2)} - \frac{1}{1.2.3(n+3)} + enz\right\}$$

en

$$F(-1,n) = \mp(n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1 \pm \ldots\ldots$$
$$\ldots \pm \frac{1}{e}\left\{1+(n-1)+(n-1)(n-2)+enz.\ldots+(n-1)(n-2)\ldots 2.1\right\},$$

waarin de bovenste of benedenste teekens moeten gebruikt worden, naar gelang n oneven of even is, terwijl voor $n = 1$ de eerste term van het tweede lid der laatste vergelijking wederom door -1 moet vervangen worden; nemende nu achtervolgens $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, enz. zoo vindt men

$$-F(-1,1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + enz. = 1 - \frac{1}{e},$$
$$F(-1,2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.2.4} - \frac{1}{1.2.3.5} + enz. = 1 - \frac{2}{e},$$
$$-F(-1,3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.2.5} - \frac{1}{1.2.3.6} + enz. = 2 - \frac{5}{e},$$
$$F(-1,4) = \frac{1}{4} - \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.2.6} - \frac{1}{1.2.3.7} + enz. = 6 - \frac{16}{e},$$
$$-F(-1,5) = \frac{1}{5} - \frac{1}{1.6} + \frac{1}{1.2.7} - \frac{1}{1.2.3.8} + enz. = 24 - \frac{65}{e},$$
$$F(-1,6) = \frac{1}{6} - \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.2.8} - \frac{1}{1.2.3.9} + enz. = 120 - \frac{326}{e},$$
$$-F(-1,7) = \frac{1}{7} - \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.2.9} - \frac{1}{1.2.3.10} + enz. = 720 - \frac{1957}{e}, enz.$$

hierdoor wordt dus de som der opgegevene reeks gevonden, als men de teekens van derzelver termen laat afwisselen.

3°. Stelt men, even als in de eerste AANMERKING, de sommen, die de reeks met afwisselende teekens voor de achtervolgende waarden van n verkrijgt, gelijk nul, dan heeft men

$$1 - \frac{1}{e} = 0, \text{ waaruit volgt } e = 1,$$
$$1 - \frac{2}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = 1,$$
$$2 - \frac{5}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = \frac{5}{2},$$
$$6 - \frac{16}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = \frac{8}{3},$$
$$24 - \frac{65}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = \frac{65}{24},$$
$$120 - \frac{326}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = \frac{163}{60},$$
$$720 - \frac{1957}{e} = 0, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad e = \frac{1957}{720}, \text{ enz.}$$

deze waarden voor e zijn alle te klein, doch naderen meer en meer tot de juiste waarde van e. Ook in dit geval kan men, even als in de eerste AANMERKING, grenzen aanwijzen, waar tusschen de juiste waarde van e gelegen is; het is bij voorbeeld klaar, dat men heeft

$$-F(-1,7) > \frac{1}{7} - \frac{1}{1.8} \text{ en } -F(-1,7) < \frac{1}{7}$$

of
$$720 - \frac{1957}{e} > \frac{1}{56} \qquad \text{en} \qquad 720 - \frac{1957}{e} < \frac{1}{7},$$

dat is: $720 \times 56\, e - 1957 \times 56 > e$ en $720 \times 7\, e - 1957 \times 7 < e$, waaruit men vindt

$$e > \frac{109592}{40319} = 2{,}7181\ldots. \text{ en } e < \frac{13699}{5039} = 2{,}7185\ldots.$$

4°. Daar de vergelijkingen (1) en (3) voor alle waarden van x doorgaan, kan men, door voor x andere waarden dan ± 1 te nemen, de som van nog andere reeksen vinden; stelt men, bij voorbeeld: $x = 3$, en achtervolgens $x = 2$, $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, zoo vindt men

$$F(2,3) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{1.4} + \frac{2^5}{1.2.5} + \frac{2^6}{1.2.3.6} + \text{enz.} = 2e^2 - 2,$$
$$F(-2,3) = -\frac{2^3}{3} + \frac{2^4}{1.4} - \frac{2^5}{1.2.5} + \frac{2^6}{1.2.3.6} - \text{enz.} = \frac{10}{e^2} - 2,$$
$$F(\tfrac{1}{2},3) = \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{1.4.2^4} + \frac{1}{1.2.5.2^5} + \frac{1}{1.2.3.6.2^6} + \text{enz.} = \frac{5\sqrt{e}}{4} - 2,$$
$$F(-\tfrac{1}{2},3) = -\frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{1.4.2^4} - \frac{1}{1.2.5.2^5} + \frac{1}{1.2.3.6.2^6} - \text{enz.} = \frac{13}{4\sqrt{e}} - 2.$$

Ten slotte kunnen wij nog hierbij de opmerking voegen, dat de vergelijking (5), die wij boven bewezen hebben, slechts een bijzonder geval is van de algemeene vergelijking

$$F(x, n+1) = x^n e^x - n \times F(x, n) \quad . \quad . \quad (8),$$

welke, op gelijke wijze als (5), gemakkelijk kan betoogd worden.

XLV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De vergelijking, den loop en de voornaamste eigenschappen te vinden der kromme lijn, waarvan het kenmerk is, dat het vierkant van de tangens van elk punt evenredig is met de subtangens?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, F. J. STAMKART *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

De tangens en de subtangens van elk punt eener kromme lijn, waarvan $y = F(x)$ de vergelijking is, in het algemeen uitgedrukt wordende door

$$y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\}} \quad \text{en} \quad y\frac{\partial x}{\partial y},$$

zoo geeft het voorstel aanleiding tot de vergelijking

$$y^2\left\{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\} = a y \frac{\partial x}{\partial y},$$

waarin a klaarblijkelijk eene lijn moet beteekenen; lossen wij uit deze vergelijking $\frac{\partial x}{\partial y}$ op, dan vinden wij

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{a \pm \sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{2y},$$

bijgevolg is

$$\partial x = \tfrac{1}{2} a \frac{\partial y}{y} \pm \tfrac{1}{2} \frac{\partial y}{y} \sqrt{(a^2 - 4y^2)}$$

en

$$x = \tfrac{1}{2} a \int \frac{\partial y}{y} + \tfrac{1}{2} \int \frac{\partial y}{y} \sqrt{(a^2 - 4y^2)};$$

de beide integralen in deze vergelijking voorkomende, zijn genoegzaam bekend; wijzigen wij dezelve door het bijvoegen van standvastigen zoodanig, dat de vergelijking gelijkslachtig blijft, dan hebben wij

$$\int \frac{\partial y}{y} = Log. \frac{2y}{a},$$

$$\int \frac{\partial y}{y} \sqrt{(a^2 - 4y^2)} = \sqrt{(a^2 - 4y^2)} + a\, Log. \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{2y},$$

en derhalve is de vergelijking der bedoelde kromme lijn

$$x = \tfrac{1}{2} a\, Log. \frac{2y}{a} \pm \tfrac{1}{2} a\, Log. \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{2y} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4y^2)};$$

waarbij aan verder geen standvastige behoeft gevoegd te worden, omdat dit, zonder op de kromme lijn zelve van invloed te wezen, alleen eene verplaatsing der ordinaten-as evenwijdig aan zich zelve zoude veroorzaken.

De gevondene vergelijking kan vereenvoudigd worden, door het vereenigen der beide logarithmische termen; voor de bovenste teekens heeft men

$$Log.\frac{2y}{a} + Log.\frac{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}}{2y} = Log.\frac{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}}{a},$$

voor de benedenste teekens is

$$Log.\frac{2y}{a} - Log.\frac{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}}{2y} = Log.\frac{4y^2}{a\{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}\}} =$$

$$= Log.\frac{4y^2\{a+\sqrt{(a^2-4y^2)}\}}{a\{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}\}\{a+\sqrt{(a^2-4y^2)}\}} = Log.\frac{a+\sqrt{(a^2-4y^2)}}{a},$$

zoodat de vergelijking hierdoor verandert in

$$x = \tfrac{1}{2}a\,Log.\frac{a \mp \sqrt{(a^2-4y^2)}}{a} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-4y^2)},$$

behoorende de beide bovenste en de beide onderste teekens bij elkander. Het eerste differentiaal quotient dezer vergelijking is boven reeds uitgedrukt; differentieren wij hetzelve ten opzigte van y, dan vinden wij

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \mp\frac{a\{a \pm \sqrt{(a^2-4y^2)}\}}{2y^2\sqrt{(a^2-4y^2)}}.$$

Daar in de eenvoudigste vergelijking, die wij voor de kromme lijn gevonden hebben, y alleen in de tweede magt voorkomt, is het klaar dat de as der abscissen de kromme in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeelt, zoodat wij alleen den vorm van een dezer deelen behoeven te onderzoeken. Daar overigens de kromme lijn uit twee verschillende takken moet bestaan, naar gelang men de bovenste of benedenste teekens der vergelijking gebruikt, zoo zullen wij, om verwarring te voorkomen, elk dezer takken afzonderlijk gadeslaan.

Voor den eersten tak hebben wij

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a\,Log.\frac{a-\sqrt{(a^2-4y^2)}}{a} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2-4y^2)},\\ \frac{\partial x}{\partial y} &= \frac{a+\sqrt{(a^2-4y^2)}}{2y}\\ \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} &= -\frac{a\{a+\sqrt{(a^2-4y^2)}\}}{2y^2\sqrt{(a^2-4y^2)}}\end{aligned}\right\}\ (A).$$

Hierin wordt voor $y = 0$, $x = -\infty$ en $\frac{\delta x}{\delta y} = \pm\infty$, nemen wij dus (Fig. 25) XX' en YY' als coördinaten-assen aan, dan moet het negatieve gedeelte OX' van de as der abscissen eene asymptote aan dezen tak der kromme zijn; voor $y = \frac{1}{2}a$ wordt $x = 0$ en $\frac{\delta x}{\delta y} = 1$, nemende dus $OP = \frac{1}{2}a$, zoo is P een punt van dezen tak der kromme en de raaklijn TP van dit punt snijdt de assen onder eenen hoek van 45°; voor $y > \frac{1}{2}a$ wordt x onbestaanbaar, P is dus het punt, dat zich het verst van de as XX' verwijdert; van $y = \frac{1}{2}a$ tot $y = 0$, geeft elke waarde van y eene bestaanbare, doch ook slechts *ééne* waarde voor x, de kromme lijn moet dus, van het punt P tot aan het oneindig afgelegen punt op de asymptote OX', onafgebroken voortgaan. Schrijven wij de eerste der vergelijkingen (A) in de gedaante

$$x = \tfrac{1}{2}a\left\{Log.\left(1 - \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)}\right\},$$

of de logarithmische term ontwikkelende, en kortheidshalve $\sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)} = p$ stellende,

$$x = \tfrac{1}{2}a\left\{-\tfrac{1}{2}p^2 - \tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{1}{4}p^4 - enz.\right\},$$

dan blijkt het dat x geene positieve waarden hebben kan, en er liggen dus geene punten van dezen tak ter regterzijde van YY'; daar klaarblijkelijk bij dezen tak ook altijd $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ negatief is, hebben in elk punt derzelve x en $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ hetzelfde teeken, zoodat overal de bolle zijde naar de as YY' is gekeerd. Uit dit alles besluiten wij dan, dat dezen tak de gedaante heeft in de figuur door PQ voorgesteld.

Voor den tweeden tak hebben wij

$$\left.\begin{aligned}
x &= \tfrac{1}{2}a\,Log.\,\frac{a + \sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{a} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4y^2)},\\
\frac{\delta x}{\delta y} &= \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4y^2)}}{2y},\\
\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} &= \frac{a\{a - \sqrt{(a^3 - 4y^2)}\}}{2y^2\sqrt{(a^2 - 4y^2)}};
\end{aligned}\right\}\ (B)$$

hierin wordt voor $y = 0$, $x = \frac{1}{2} a\, Log. 2 - \frac{1}{4} a$ en $\frac{\delta x}{\delta y} = 0$, in deze waarde van x is de eerste term kleiner dan de tweede, omdat $Nep.\ Log.\ 2 < 1$ is, nemende dus eerst $OA = \frac{1}{2} a\, Log. 2$ en vervolgens $AR = \frac{1}{4} a$, zoo is R een punt van de kromme lijn aan hetwelk de raaklijn evenwijdig met YY′ loopt; voor $y = \frac{1}{2} a$ wordt ook nu, even als bij den eersten tak, $x = 0$ en $\frac{\delta x}{\delta y} = 1$, het punt P behoort dus ook tot den tweeden tak en PT is eene gemeenschappelijke raaklijn aan beide de takken; voor $y > \frac{1}{2} a$ wordt ook hier x onbestaanbaar, maar van $y = \frac{1}{2} a$ tot $y = 0$ geeft elke waarde van y éene bestaanbare waarde aan x, deze tak heeft dus geene punten boven P, maar moet van P tot R onafgebroken voortgaan. Wederom kortheidshalve $\sqrt{\left(1 - \frac{4y^2}{a^2}\right)} = p$ stellende, kunnen wij de eerste der vergelijkingen (B) schrijven in de gedaante

$$x = \frac{1}{2} a \left\{ - \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{3} p^3 - \frac{1}{4} p^4 + \frac{1}{5} p^5 + \text{enz.} \right\},$$

daar nu klaarblijkelijk $p < 1$ is, is ook elke positieve term in deze reeks kleiner dan de voorafgaande negatieve, dus kan ook bij dezen tak x geene positieve waarden verkrijgen, bijgevolg heeft de tweede tak mede geene punten ter regterzijde van YY′ en is P een keerpunt; omdat nu echter $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ altijd positief is en dus eén verschillend teeken met x heeft, heeft deze tak altijd de holle zijde naar de as YY′ gekeerd. Uit dit alles besluiten wij, dat de tweede tak de gedaante heeft in de figuur door PR voorgesteld.

Daar wij reeds gezien hebben, dat de raaklijn van het keerpunt P de assen onder eenen hoek van 45° snijdt, is de subtangens van het punt P klaarblijkelijk $OT = OP = \frac{1}{2} a$ en dus de tangens $PT = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$. Omdat ook $AR = \frac{1}{4} a$ is, hebben wij nog $AR = OT$, en bijgevolg $AO = RT$.

Trekken wij op eenen afstand $OB = \beta$ eene lijn, evenwijdig met XX′, die de takken der kromme lijn in C en D snijdt, dan vinden wij, door de onder (A) en (B) opgegevene differentiaal quotienten in de algemeene formule $\frac{y\delta x}{\delta y}$ voor

de subtangens te substitueren, en $y = \beta$ te nemen, voor de subtangenten der punten C en D

$$EF = \frac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$
$$HI = \frac{1}{2}(a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)});$$

door het gebruik der algemeene formule $\frac{y \delta y}{\delta x}$ vinden wij voor de subnormalen der punten C en D, na behoorlijke herleiding

$$FG = \frac{1}{2}(a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$
$$IK = \frac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)});$$

hieruit volgt nu terstond

$$EF + FG = a \text{ en } HI + IK = a,$$
$$EF = IK \text{ en } FG = HI,$$
$$EF + HI = a \text{ en } FG + IK = a,$$
$$EF \times HI = \beta^2 \text{ en } FG \times IK = \beta^2;$$

dat is: *de som van de subtangens en subnormaal is eene standvastige grootheid;* voorts, indien wij de punten C en D *overeenkomstige* punten der kromme noemen: *de subtangens van eenig punt is gelijk aan de subnormaal van het overeenkomstige punt en omgekeerd; de som der subtangenten of der subnormalen tot twee overeenkomstige punten behoorende is standvastig; de ordinaat is middenevenredig tusschen de subtangenten of subnormalen van de beide overeenkomstige punten tot die ordinaat behoorende;* alle welke eigenschappen gemakkelijk in het oog vallen, zoodra men slechts opmerkt, dat de regthoekige driehoeken ECG en HDK bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn, en dat voor alle waarden van OB hunne schuinsche zijden standvastig gelijk a zijn.

Uit de figuur volgt nog:

$$EC^2 = EF^2 + CF^2 = EF^2 + EF \times FG =$$
$$= EF(EF + FG) = a \times EF,$$
$$CG^2 = FG^2 + CF^2 = FG^2 + EF \times FG =$$
$$= FG(FG + EF) = a \times FG,$$
$$EC^2 + CG^2 = EG^2 = a^2;$$

hieruit blijkt, *dat*, zoo als in de opgaaf gevorderd werd, werkelijk *het vierkant van de tangens evenredig is met de subtangens; voorts dat het vierkant van de normaal evenredig is met de subnormaal; en dat de som der vierkanten van tangens en normaal standvastig is.*

Beschrijft men, uit O als middelpunt, met OP $=$ OT $= \frac{1}{2} a$ als straal, eenen cirkel, die de lijn BC of haar verlengde in M en N snijdt, dan is BP $= \frac{1}{2} a - \beta$, BP$' = \frac{1}{2} a + \beta$, en dus

$$BM = BN = \sqrt{(BP' \times BP)} = \sqrt{(\tfrac{1}{4} a^2 - \beta^2)} = \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)};$$

laat men nu uit M en N loodlijnen MV en NW op XX$'$ vallen, dan is

$$TV = OT - BM = \tfrac{1}{2} (a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$
$$VS = OS + BM = \tfrac{1}{2} (a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$
$$WS = OS - BN = \tfrac{1}{2} (a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$
$$TW = OT + BN = \tfrac{1}{2} (a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}),$$

zoodat door deze eenvoudige constructie, de subtangenten en subnormalen, tot de punten C en D behoorende, gevonden zijn; trekt men dan ook TM, TN, SM en SN, zoo zullen deze lijnen respectievelijk evenwijdig zijn met HD, EC, DK en CG, waardoor het trekken van raaklijnen aan de kromme zeer gemakkelijk wordt. Het valt van zelf in het oog, dat, indien men den driehoek ECG, over de lijn XX$'$, eenen afstand CN verschuift, dezelve juist den driehoek TNS zal bedekken; even zoo zal de driehoek HDK den driehoek TMS bedekken, door denzelven eenen afstand DM te verschuiven.

Voor de negatieve abscissen BC en BD, tot de ordinaat OB $= \beta$ behoorende, vindt men oogenblikkelijk, door de vergelijking der kromme,

$$BC = -\tfrac{1}{2} a \,Log. \frac{a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}}{a} - \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}$$

en $$BD = -\tfrac{1}{2} a \,Log. \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}}{a} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)};$$

de som hiervan geeft, omdat de som van twee logarithmen de logarithmus van het product der getallen is,

$$BC + BD = -\tfrac{1}{2} a \,Log. \frac{4\beta^2}{a^2} = - a \,Log. \frac{2\beta}{a},$$

neemt men nu a als eenheid aan, dan verkrijgt men

$$BC + BD = - Log.\, 2\beta = - Log.\, 2\, OB;$$

de som der abscissen van twee overeenkomstige punten is dus de Neperiaansche Logarithmus van de dubbele ordinaat. Hierbij merke men op, dat altijd OB $< \frac{1}{2}$ en bij gevolg *Log.* 2 OB negatief is.

Laten r de kromtestraal, x en y de coördinaten van het

middelpunt des kromtecirkels, van eenig punt der kromme lijn, dat is in het algemeen

$$r = \pm \frac{\left\{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}},$$

$$v = x + \frac{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}$$

en $$w = y - \frac{\partial x}{\partial y}\,\frac{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}};$$

brengt men hierin voor de differentiaal quotienten de onder (A) en (B) gevondene waarden over, dan vindt men na behoorlijke herleiding:

voor den tak PQ,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(a+2y)\sqrt{a(a-2y)}+(a-2y)\sqrt{a(a+2y)}}{2y}, \\ v &= x - \sqrt{(a^2-4y^2)}, \\ w &= \frac{\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{(a^2-4y^2)}\right)^2}{y}; \end{aligned}\right\}\ (C)$$

en voor den tak PR,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(a+2y)\sqrt{a(a-2y)}-(a-2y)\sqrt{a(a+2y)}}{2y}, \\ v &= x + \sqrt{(a^2-4y^2)}, \\ w &= \frac{\frac{1}{4}\left(a-\sqrt{(a^2-4y^2)}\right)^2}{y} \end{aligned}\right\}\ (D)$$

Hieruit vindt men, door $y = \frac{1}{2}a$ te nemen, dat de kromtestraal van het punt P in beide takken gelijk nul is; laat men y kleiner worden, dan worden beide de kromtestralen grooter; van het punt P naar Q gaande, groeit dus de kromtestraal altijd aan, tot dat, voor het oneindig afgelegen punt op den tak PQ, $y = 0$ en $r = \infty$ wordt; van P naar R gaande, groeit de kromtestraal insgelijks aan, tot dat voor $y = 0$, $r = \frac{0}{0} = a$ wordt. Neemt men dus BL $= a$,

zoo is L het middelpunt van den kromtecirkel van het punt R; de ontwondene van den tak PRP′ moet dus door de punten P en P′ gaan, de as XX′ in L, waar dezelve een keerpunt moet hebben, aanraken, en hare bolle zijde naar dien as gekeerd hebben. De kromtestraal in het punt P voor beide takken gelijk nul zijnde, volgt daaruit, dat de ontwondene van beide die takken, in het punt P, regthoekig door PT moet gaan, en dat alzoo de ontwondene van PQ eene voortzetting van de ontwondene van PR is.

Laat U het middelpunt zijn van den kromtecirkel, tot het punt C behoorende, en UZ de loodlijn, uit dit punt op de as XX′ getrokken, dan volgt, omdat voor het punt C

$$y = \beta = CF, \; - v = OZ, \; - x = BC = OF,$$
$$\sqrt{(a^2 - 4\beta^2)} = MN, \; w = UZ, \; \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}) = EF$$

is, uit de tweede en derde der vergelijkingen (C),

$$OZ = OF + MN$$

en

$$UZ = \frac{EF^2}{CF};$$

neemt men dus ZF = MN en stelt men in Z op XX′ eene loodlijn, die het verlengde der normaal CG in U snijdt, dan zal U het middelpunt van den kromtecirkel en dus een punt van de ontwondene zijn.

Indien U′ het middelpunt van den kromtecirkel van het punt D is, zal men even zoo vinden, door het gebruik van de tweede en derde der vergelijkingen (D) en door de substitutie van vroeger gevondene waarden,

$$OZ' = - OI + MN$$

en

$$U'Z' = \frac{HI^2}{DI};$$

makende dus IZ′ = MN, en stellende in Z′ eene loodlijn op XX′, die de normaal DK in U′ snijdt, dan zal het punt U′ almede geconstrueerd zijn. Het is dus zeer gemakkelijk, zoo vele punten als men verkiest van de ontwondene te construeren.

Zij r' de kromtestraal van het punt C, r'' die van het punt D, dan vinden wij door behalp van de eerste der vergelijkingen (C) en (D) de volgende betrekkingen, tusschen de kromtestralen van twee overeenkomstige punten:

$$\frac{r'}{r''} = \frac{\sqrt{(a+2\beta)} + \sqrt{(a-2\beta)}}{\sqrt{(a+2\beta)} - \sqrt{(a-2\beta)}};$$

$$\frac{r'}{r''} = \frac{a + \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}}{2\beta} = \frac{EF}{CF};$$

$$\frac{r'}{r''} = \frac{2\beta}{a - \sqrt{(a^2 - 4\beta^2)}} = \frac{DI}{HI};$$

$$\left(\frac{r'}{r''}\right)^2 = \frac{EF}{HI} = \frac{EC^2}{HD^2};$$

$$r'r'' = \frac{a}{\beta}(a^2 - 4\beta^2) = \frac{PP'}{OB} \times MN^2;$$

en

$$r'^2 - \frac{a}{\beta} r'r'' + r''^2 = 0.$$

Ten slotte zullen wij nog den inhoud der behandelde kromme lijn bepalen; hiertoe hebben wij in het algemeen

$$\textit{Inhoud} = \int y\,\delta x,$$

substitueren wij hierin de waarde van δx onder (A) opgegeven, dan verkrijgen wij voor den tak PQ

$$\textit{Inh.} = \int \left(\tfrac{1}{2} a + \sqrt{(a^2 - 4y^2)}\right) \delta y,$$

of integrerende

$$\textit{Inh.} = \tfrac{1}{2} ay + \tfrac{1}{4} y \sqrt{(a^2 - 4y^2)} + \tfrac{1}{8} a^2 \textit{ Boog. Sin.} \frac{2y}{a} + C,$$

en nemende deze integraal van $y = \frac{1}{2} a$ tot $y = 0$, zoo vinden wij

$$\textit{Inh. } PCQX'OP = \tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{16} a^2 \pi;$$

voor den tak PR vinden wij, door voor δx de onder (B) opgegevene waarde te nemen,

$$\textit{Inh.} = \int \left(\tfrac{1}{2} a - \sqrt{(a^2 - 4y^2)}\right) \delta y,$$

of integrerende

$$\textit{Inh.} = \tfrac{1}{2} a y - \tfrac{1}{4} y \sqrt{(a^2 - 4y^2)} - \tfrac{1}{8} a^2 \textit{ Boog. Sin.} \frac{2y}{a} + C,$$

en deze integraal van $y = \frac{1}{2} a$ tot $y = 0$ nemende

$$\textit{Inh. } PDROP = \tfrac{1}{4} a^2 - \tfrac{1}{16} a^2 \pi;$$

dezen laatsten inhoud van den eersten aftrekkende, komt er

$$\textit{Inh. } PCQX'RDP = \tfrac{1}{8} a^2 \pi,$$

of door verdubbeling

$$\textit{Inh. } RDPCQX'P'R = \tfrac{1}{4} a^2 \pi,$$

zoodat de geheele vlakke inhoud, door de kromme ingesloten wordende, juist gelijk is aan den inhoud des cirkels, uit O met OT $= \frac{1}{2} a$ als straal beschreven.

XLVI. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Drie boeren gaan ter markt; A met 10, B met 30 en C met 50 schapen; zij verkoopen daarvan 's morgens een gedeelte, tegen denzelfden prijs het stuk; op den middag verkoopen zij de rest, duurder dan 's morgens, doch weder de schapen onderling tot denzelfden prijs het stuk; indien nu elk voor zijn geheele aantal schapen even veel geld ontvangen heeft, en de prijs van ieder schaap telkens een vol getal guldens, de f 12 niet te boven gaande, geweest is, wordt gevraagd: hoeveel schapen kan ieder 's morgens en 's middags verkocht hebben en tot welken prijs? Men verlangt alle mogelijke antwoorden.

OPGELOST *door* H. A. HARTOGH, C. J. BOLTEN, A. VOLKERSE, J. ACQUOY, J. BASSAN, H. W. BLOEM, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, H. KLOOS, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS, J. WARNSINCK, C. BRUNINGS, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* G. DE WAAL.

OPLOSSING *van* H. A. HARTOGH.

Stel dat A, B en C des morgens respectievelijk x, y en z schapen verkoopen tegen den prijs van p gulden het stuk, dan verkoopen zij des middags respectievelijk $10 - x$, $20 - y$ en $30 - z$ schapen tegen q gulden het stuk; de geheele ontvangst in guldens beloopt dus

$$\text{van A, } px + q\,(10 - x),$$
$$\text{van B, } py + q\,(30 - y),$$
$$\text{van C, } pz + q\,(50 - z);$$

deze ontvangsten aan elkander gelijk moetende wezen, hebben wij

$$px + q\,(10 - x) = py + q\,(30 - y)$$

en

$$px + q\,(10 - x) = pz + q\,(50 - z);$$

uit de eerste dezer vergelijkingen y, en uit de tweede z afzonderende vinden wij

$$\left.\begin{aligned} y &= x + \frac{20q}{q-p} \\ \text{en}\quad z &= x + 2\left(\frac{20q}{q-p}\right), \end{aligned}\right\}\ (A)$$

Uit deze waarden van y en z volgt vooreerst, dat x, y en z eene opklimmende rekenkunstige reeks moeten uitmaken, waarvan $\frac{20q}{q-p}$ het verschil is; ten andere blijkt uit de waarde van z, dat $\frac{20q}{q-p}$ niet grooter dan 24 kan zijn, want z kan niet grooter dan 49, x niet kleiner dan 1 en bijgevolg $z - x$ niet grooter dan 48 wezen; ten derde is het klaar, dat $\frac{20q}{q-p}$ grooter dan 20 moet wezen, omdat de noemer $q - p$ kleiner is dan de factor q des tellers. Hieruit volgt dus reeds, dat $\frac{20q}{q-p}$ geene andere waarden kan hebben, dan 21, 22, 23 en 24; stelt men derhalve achtervolgens

$$\frac{20q}{q-p}=21,\ \frac{20q}{q-p}=22,\ \frac{20q}{q-p}=23,\ \frac{20q}{q-p}=24,$$

dan vindt men hieruit respectievelijk

$$p=\frac{q}{21},\quad p=\frac{q}{11},\quad p=\frac{3q}{23},\quad p=\frac{q}{6};$$

om dat p een geheel getal en q niet grooter dan 12 moet zijn, is het onmogelijk aan de eerste en derde dezer vergelijkingen te voldoen, aan de tweede kan alleen voldaan worden, door $q = 11$ te nemen, waardoor $p = 1$ wordt; aan de vierde kan slechts op tweeërlei wijze voldaan worden, te weten door $q = 6$ te nemen, waaruit $p = 1$ volgt, of door $q = 12$ te nemen, waarmede $p = 2$ overeenstemt. Er zijn dus slechts drie verschillende waarden voor p en q mogelijk, te weten:

$p = 1$ en $q = 11$, $p = 1$ en $q = 6$, $p = 2$ en $q = 12$.

Neemt men $p = 1$ en $q = 11$, dan gaan de vergelijkingen (A) over in

$$y = x + 22 \text{ en } z = x + 44,$$

kunnende hierin voor x alleenlijk 1, 2, 3, 4 of 5 genomen worden, want $x > 5$ zoude $z > 49$ maken.

Neemt men $p = 1$ en $q = 6$, dan is volgens (A)

$$y = x + 24 \text{ en } z = x + 48,$$

waarin alleen $x = 1$ kan genomen worden.

Neemt men eindelijk $p = 2$ en $q = 12$, dan is insgelijks

$$y = x + 24 \text{ en } z = x + 48,$$

zoodat in dit geval ook alleen $x = 1$ kan zijn.

Het blijkt derhalve, dat op dit voorstel niet meer dan *zeven* antwoorden mogelijk zijn, te weten:

1°. $p = 1$;	$q = 11$;	$x = 1$,	$y = 23$,	$z = 45$;
2°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 2$,	$y = 24$,	$z = 46$;
3°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 3$,	$y = 25$,	$z = 47$;
4°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 4$,	$y = 26$,	$z = 48$;
5°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 5$,	$y = 27$,	$z = 49$;
6°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 1$,	$y = 25$,	$z = 49$;
7°. $p = 2$,	$q = 12$,	$x = 1$,	$y = 25$,	$z = 49$.

Aanmerking *van* C. J. Bolten. Had men het voorstel opgelost in de veronderstelling dat $x = 0$ en $z = 50$ kon worden, of met andere woorden, dat A des morgens en C des middags geene schapen verkocht had, dan zoude men nog de volgende *acht* antwoorden gevonden hebben:

1°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 0$,	$y = 22$,	$z = 44$;
2°. $p = 1$,	$q = 11$,	$x = 6$,	$y = 28$,	$z = 50$;
3°. $p = 1$,	$q = 6$,	$x = 0$,	$y = 24$,	$z = 48$;
4°. $p = 1$,	$q = 6$,	$x = 2$,	$y = 26$,	$z = 50$;
5°. $p = 2$,	$q = 12$,	$x = 0$,	$y = 24$,	$z = 48$;
6°. $p = 2$,	$q = 12$,	$x = 2$,	$y = 26$,	$z = 50$;
7°. $p = 1$,	$q = 5$,	$x = 0$,	$y = 25$,	$z = 50$;
8°. $p = 2$,	$q = 10$,	$x = 0$,	$y = 25$,	$z = 50$.

XLVII. Voorstel.

Door H. Kloos.

Als men de breuk [redacted]76/23[redacted] zooveel mogelijk verkleint, verandert dezelve in [redacted]6/2[redacted]; indien nu het overdekte cijfer overal hetzelfde is, vraagt men welke breuken dit zijn?

Opgelost *door* H. Kloos, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, E. Boas, S. T. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, S. Dik, Cornz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lub-

zens; F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoer, L. J Ulman, A. Vos, G. de Waal en I. Warnsinck.

Oplossing van H. Kloos.

Stellen wij het overdekte cijfer door x voor, dan is de eerste breuk $\frac{100x+76}{230+x}$ en de tweede $\frac{10x+6}{20+x}$, derhalve heeft men de vergelijking

$$\frac{100x+76}{230+x} = \frac{10x+6}{20+x},$$

die na behoorlijke herleiding verandert in

$$9x^2 - 23x = -14$$

of

$$x^2 - \frac{23}{9}x = -\frac{14}{9},$$

waaruit volgt

$$x = 1 \text{ of } x = 1\frac{5}{9};$$

omdat x uit den aard der zaak geen gebroken zijn kan, is de tweede waarde van x onbruikbaar, wij hebben derhalve alleenlijk $x = 1$ en bijgevolg is de eerste breuk $\frac{176}{231}$ en de tweede $\frac{16}{21}$.

Aanmerking van W. J. C. Rammelman Elsevier. Men had ook tot het antwoord op dit vraagstuk kunnen geraken, door op te merken, dat het quotient van de tellers der beide breuken, uit den aard des voorstels, een geheel getal moet zijn; zal nu

$$\frac{100x+76}{10x+6} = 10 + \frac{8}{5x+3}$$

een geheel getal zijn, dan moet $5x+3$ een deeler van 8 zijn, terwijl x een geheel getal kleiner dan 9 moet wezen en hieraan kan alleen voldaan worden door $x = 1$.

Aanmerking van J. Acquoy. Indien men aanneemt, dat de bedoelde breuken eigenlijke breuken, en dus kleiner dan de eenheid moeten zijn, is het klaar dat het overdekte cijfer slechts 1 kan zijn. Onderstelt men echter dat de breuken ook oneigenlijk mogen zijn, dan blijkt toch uit de onverkleinbaarheid der breuk $\frac{176}{231}$ dat het overdekte cijfer oneven moet wezen;

daar nu 2[redacted] een evenmatig deel van 23[redacted] zijn moet, heeft men slechts te onderzoeken welke der getallen 21, 23, 25, 27, 29 respectievelijk deelbaar zijn in 231, 233, 235, 237, 239; daar nu alleen 21 in 231 opgaat, kan het overdekte cijfer niet anders dan 1 zijn.

XLVIII. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Men begeert eene meetkunstige reeks van vier termen te vinden, zoodanig, dat negenmaal de som der beide eerste gelijk is aan de som van de beide laatste, en dat het vierkant van de tweede gelijk is aan de derde?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. ACQUOY, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNSZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEP, A. VOS, G. DE WAAL *en* I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Daar in elke meetkunstige evenredigheid de som der beide eerste termen tot de som der beide laatste staat als de eerste tot de derde, zoo staat de eerste term der gevraagde reeks tot den derden als 1 tot 9; laat nu x den tweeden term der reeks zijn, dan is de derde x^2, en dus de eerste 1; volgens het gezegde hebben wij alzoo

$$1 : x^2 = 1 : 9,$$

waaruit volgt $\quad x^2 = 9$

en $\quad x = \pm 3;$

de gevraagde reeks is bijgevolg

$$1, \pm 3, 9 \text{ en } \pm 27.$$

XLIX. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Eene harmonische reeks van drie termen te vinden, zoodanig, dat het dubbele product der beide eerste gelijk is aan het product der beide laatste termen; en dat, als men de termen verdubbelt, dezelve met het getal 16 eene gewone evenredigheid zullen uitmaken?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNZ., M. H. GODEFROI, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS, G. DE WAAL en I. WARNSINCK.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Stellende voor de reeks

$$x,\ \frac{2xy}{x+y}\ \text{en}\ y,$$

dan is volgens het voorstel

$$2x . \frac{2xy}{x+y} = \frac{2xy}{x+y} . y$$

en dus, daar $\frac{2x}{x+y}$ niet gelijk nul kan zijn,

$$2x = y;$$

de reeks wordt derhalve

$$x,\ \frac{4}{3}x\ \text{en}\ 2x.$$

Nu is verder

$$2x : \frac{8}{3}x = 4x : 16$$

of $\quad 3 : 4 = x : 4,$

waaruit volgt $\quad x = 3;$

de gevraagde reeks is alzoo 3, 4 en 6.

L. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Een der merkwaardigste jaren in onze geschiedenis wordt aldus bepaald: het jaargetal is zoo veel meer dan het naast kleinere volkomen vierkant, als het eerstvolgende volkomen vierkant meer dan 1800 is; en zoo men het jaargetal met 7 vermindert, bekomt men een pronik, welke wortel dezelfde als die van het genoemde naast kleinere vierkant is; men vraagt naar dit jaargetal?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, J. ACQUOY, J. BASSAN, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, E. BOAS, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, S. DIK,

Cornsz., M. H. Godefroi, M. L. Goebe, G. Graafland, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, M. G. Snoek, L. J. Ulman, A. Vos en G. de Waal.

Oplossing van I. Warnsinck.

Stellen wij den wortel van het naast kleinere vierkant x, dan is die van het eerstvolgende vierkant $x+1$, deze vierkanten zelf zijn dan x^2 en $(x+1)^2$ en de in het voorstel bedoelde pronik is $x\,(x+1)$; indien wij dan verder het gevraagde jaartal door y voorstellen, hebben wij volgens de

opgaaf $\quad y - x^2 = (x+1)^2 - 1800$

en $\quad y - 7 = x\,(x+1)$;

de eerste dezer vergelijkingen wordt dadelijk herleid tot

$$2x^2 + 2x = y + 1799,$$

uit de tweede volgt terstond

$$2x^2 + 2x = 2y - 14,$$

derhalve is $\quad 2y - 14 = y + 1799$

en $\quad y = 1813$;

weshalve het bedoelde jaargetal 1813 is.

LI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt van welken boog de Cosinus gelijk is aan de Tangens?

Opgelost door C. F. Julius, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. Brunings, L. J. Ulman, A. Vos, J. Bassan, S. T. Boas, C. J. Bolten, H. W. Bloem, S. Dik, Cornsz., M. H. Godefroi, H. A. Hartogh, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, I. Warnsinck, W. G. van Delden, B. de Jongh en G. de Waal.

Oplossing van C. F. Julius.

Den gevraagden boog ϕ noemende, hebben wij volgens het

voorstel $\quad Cos.\,\phi = Tang.\,\phi$

en dus $\quad Cos.\,\phi = \dfrac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi}$,

derhalve is $\quad Cos.^2\,\phi = Sin.\,\phi$,

$1 - Sin.^2\,\phi = Sin.\,\phi$

of $\quad Sin.^2\,\phi + Sin.\,\phi = 1$,

waaruit volgt $\quad Sin.\,\phi = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$;

daar *Sin.* ϕ kleiner dan de eenheid moet zijn, hebben wij slechts vrijheid het bovenste teeken te gebruiken, waardoor wij vinden

$$Sin.\ \phi = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 0{,}6180340$$

en dus $\phi = 38^\circ\ 10'\ 22''$ of $\phi = 141^\circ\ 49'\ 38''$,

alles nagenoeg.

AANMERKING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER. Daar het bekend is, dat $-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$ de zijde is eens regelmatigen tienhoeks, beschreven in den cirkel die de eenheid tot straal heeft, zoo hebben wij ook

$$Sin.\ \phi = Koorde\ 36^\circ = 2\ Sin.\ 18^\circ,$$

waardoor men voor ϕ dezelfde waarde verkrijgt als boven.

LII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Van welken boog is de som van de Sinus en Cosinus gelijk aan de Tangens?

OPGELOST door C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, A. VOS, J. BASSAN, H. W. BLOEM, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNSZ., B. LUBBERS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, en F. C. RADIJS.

OPLOSSING van C. J. BOLTEN.

Den begeerden boog door ϕ voorstellende, moeten wij hebben

$$Sin.\ \phi + Cos.\ \phi = Tang.\ \phi;$$

vermenigvuldigen wij deze vergelijking met $Sec.\ \phi = \sqrt{(1 + Tang.^2\phi)}$, dan komt er

$$Sin.\phi\ Sec.\phi + Cos.\phi\ Sec.\phi = Tang.\phi\sqrt{(1 + Tang.^2\phi)}$$

of $$Tang.\phi + 1 = Tang.\phi\sqrt{(1 + Tang.^2\phi)},$$

brengende nu de beide leden in het vierkant, dan verkrijgen wij

$$Tang.^2\phi + 2\ Tang.\phi + 1 = Tang.^2\phi + Tang.^4\phi$$

of $$Tang.^4\phi - 2\ Tang.\ \phi - 1 = 0;$$

deze vergelijking heeft eenen positieven wortel tusschen 1 en 2, eenen negatieven tusschen 0 en -1, benevens twee onbestaanbare wortels; de bestaanbare wortels benaderende, vindt men: $Tang.\phi = 1{,}395337$, dat is $\phi = 54^\circ\ 22'\ 18'',69$;
en $Tang.\phi = -0{,}474626$, » » $\phi = 154^\circ\ 36'\ 35'',\ 2$.

AANMERKING. Door de oplossing der vergelijking van ons voorstel, is tevens de vergelijking

$$Sin.\ \phi + Cos.\ \phi = - Tang.\ \phi,$$

die dezelfde eindvergelijking geeft, opgelost; alsdan behoort echter voor

$$Tang.\ \phi = \quad 1,395337, \quad \phi = 234^\circ\ 22'\ 18'',69$$

en voor $Tang.\ \phi = -\ 0,474626, \quad \phi = 334^\circ\ 36'\ 35'',\ 2$ genomen te worden.

De vergelijking

$$Sin.\ \phi + Cos.\ \phi = \pm\ Cot.\ \phi$$

willende oplossen, zoude men dezelve, door $\phi = 90^\circ - \psi$ te stellen, terstond tot de bovenstaande oplossing terug brengen.

LIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Van welken boog is de som van Sinus en Tangens gelijk aan de Cosinus?

Opgelost *door* C. J. Bolten, J. Acquoy, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos, J. Bassan, H. W. Bloem, C. Brunings, S. Dik, Cornsz., B. Lubbers, W. J. C. Rammelman Elsevier, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Den begeerden hoek wederom ϕ noemende, moet men hebben $\quad Sin.\ \phi + Tang.\ \phi = Cos.\ \phi$

of $\quad Sin.\ \phi - Cos.\ \phi = - Tang.\ \phi;$

behandelt men deze vergelijking even als die van het voorgaande voorstel, dan verkrijgt men achtervolgens

$$Sin.\ \phi\ Sec.\ \phi - Cos.\ \phi\ Sec.\ \phi = - Tang.\ \phi \sqrt{(1 + Tang.^2 \phi)};$$

$$Tang.\ \phi - 1 = - Tang.\ \phi \sqrt{(1 + Tang.^2\ \phi)},$$

$$Tang.^2\ \phi - 2\ Tang.\ \phi + 1 = Tang.^2\ \phi + Tang.^4 \phi$$

en eindelijk $\quad Tang.^4\ \phi + 2\ Tang.\ \phi - 1 = 0;$

deze vergelijking heeft dezelfde wortels, doch met het omgekeerde teeken, als in het voorgaande voorstel; wij hebben dus

$$Tang.\ \phi = -\ 1,395337, \text{ dat is } \phi = 125^\circ\ 37'\ 41''\ 31;$$

$$\text{en } Tang.\ \phi = \quad 0,474626, \ \text{»} \ \text{»}\ \phi = \quad 25^\circ\ 23'\ 24'',\ 8.$$

Aanmerking. De vergelijking

$$Cos.\ \phi + Tang.\ \phi = Sin.\ \phi$$

oplossende, komt men tot dezelfde eindvergelijking als in het laatste voorstel, doch men heeft alsdan voor

$Tang.\ \phi = -1{,}395837,\quad \phi = 305°\ 37'\ 41'',31.$
en voor $Tang.\ \phi = 0{,}474626,\quad \phi = 205°\ 23'\ 24'',8.$
De vergelijking

$$Sin.\ \phi \pm Cos.\ \phi = Cos.\ \phi$$

willende oplossen, zoude men dezelve, door te stellen $\phi = 90° - \psi$, terstond tot de bovenstaande oplossing terugbrengen.

LIV. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

Wanneer gegeven is $Sin.\ \phi + Cos.\ \phi + Tang.\ \phi = Cosec.\ \phi$, vraagt men daaruit het aantal graden enz. van den boog ϕ te bepalen?

Opgelost door C. J. Bolten, J. Acquoy, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos, C. Brunings, S. Dik, Cornsz., B. Lubbers, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Bassan, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

In de opgegevene vergelijking substituërende

$$= \frac{Tang.\ \phi}{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}},\ Cos.\ \phi = \frac{1}{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}}\ \text{en}\ Cosec.\ \phi = \frac{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}}{Tang.\ \phi},$$

gaat dezelve over in

$$\frac{Tang.\ \phi}{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}} + \frac{1}{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}} + Tang.\ \phi = \frac{\sqrt{(1+Tang.^2\phi)}}{Tang.\ \phi}$$

of met $Tang.\ \phi \sqrt{(1+Tang.^2\phi)}$ vermenigvuldigende, in

$$Tang.^2\phi + Tang.\ \phi + Tang.^2\phi\sqrt{(1+Tang.^2\phi)} = 1 + Tang.^2\phi,$$

dat is $Tang.^2\phi\sqrt{(1+Tang.^2\phi)} = 1 - Tang.\ \phi;$

brengende de beide leden dezer vergelijking in het vierkant, zoo komt er $Tang.^4\phi + Tang.^6\phi = 1 - 2\,Tang.\ \phi + Tang.^2\phi$

of, na verplaatsing der termen,

$$Tang.^6\phi + Tang.^4\phi - Tang.^2\phi + 2\,Tang.\ \phi - 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft eenen positieven wortel tusschen 0 en 1 en eenen negatieven tusschen -1 en -2, terwijl de overige wortels onbestaanbaar zijn. De bestaanbare wortels benaderende, vindt men

$Tang.\ \phi = 0{,}59228$ en dus $\phi = 30°\ 38'\ 12'',1;$
en $Tang.\ \phi = -1{,}18704$ » » $\phi = 310°\ 6'\ 42'',23.$

Aanmerking. De vergelijking

$$Sin.\ \phi + Cos.\ \phi - Tang.\ \phi = Cosec.\ \phi$$

heeft dezelfde eindvergelijking als de in het voorstel opgeloste, en dus ook dezelfde wortels, doch alsdan behoort voor

$$Tang.\ \phi = 0{,}59228,\quad \phi = 210^\circ\ 38'\ 12'',1$$

en voor $Tang.\ \phi = -1{,}18704,\quad \phi = 130^\circ\ 6'\ 42'',23$ genomen te worden.

De vergelijking

$$Sin.\ \phi + Cos.\ \phi \pm Cot.\ \phi = Sec.\ \phi$$

willende oplossen, zoude men dezelve, door $\phi = 90^\circ - \psi$ te stellen, onmiddelijk tot de bovenstaande oplossing terug brengen.

LV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men begeert eene harmonische reeks van vier termen, in geheele positieve of negatieve getallen, te vinden, waarvan de som gelijk nul is?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNAZ., L. J. ULMAN, A. VOS, C. F. JULIUS, B. DE JONGH, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, I. WARNSINCK, J. BASSAN, H. W. BLOEM *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Als men voor den eersten term der reeks a en voor den tweeden term b stelt, zoo is de derde term $\frac{ab}{2a-b}$ en de vierde $\frac{ab}{3a-2b}$; volgens het voorstel moet dan

$$a + b + \frac{ab}{2a-b} + \frac{ab}{3a-2b} = 0$$

zijn; stellen wij verder $b = ax$, zoo gaat onze vergelijking over in

$$a + ax + \frac{a^2x}{2a-ax} + \frac{a^2x}{3a-2ax} = 0$$

of, de breuken verkleinende en de vergelijking door a deelende, in

$$1 + x + \frac{x}{2-x} + \frac{x}{3-2x} = 0,$$

deze vergelijking nu met $(2-x)\,(3-2x)$ vermenigvuldigende, komt er, na behoorlijke herleiding,

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 3 = 0,$$

dat hetzelfde is als

$$(x - 3)(x^2 - x - 1) = 0;$$

daar er nu geheele getallen gevraagd worden en het stellen van $x^2 - x - 1 = 0$ aan x slechts onmeetbare waarden zou geven, kunnen wij alleen $x - 3 = 0$ stellen, waaruit volgt dat $x = 3$ is; derhalve is $b = ax = 3a$ en de gestelde reeks verandert in

$$a,\ 3a,\ -3a \text{ en } -a,$$

welke nu voor alle mogelijke geheele getallen waarden van a aan het voorstel voldoet.

LVI. Voorstel.

Door Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Twee reeksen, eene meetkunstige en eene rekenkunstige, elk van drie termen in geheele getallen, hebben dezelfde twee eerste termen, en de laatste term der rekenkunstige reeks is gelijk aan $\frac{5}{9}$ van den laatsten term der meetkunstige; men vraagt naar deze reeksen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, E. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, S. T. Boas, C. F. Julius, L. Warnsinck, Mr. G. W. de Bruijn Kops, S. Dik, Cornsz., M. H. Godefroi, M. L. Goede, G. Graafland, B. de Jongh, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, M. G. Snoek, H. A. Hartogh en G. de Waal.

Oplossing *van* B. Lubbers.

De meetkunstige reeks zij x, xy en xy^2,

dan moeten x, xy en $\frac{5}{9}xy^2$

volgens de opgegevene voorwaarden eene rekenkunstige reeks uitmaken; derhalve moet men hebben

$$x + \frac{5}{9}xy^2 = 2xy$$

of, door $\frac{5}{9}x$ deelende en de termen verplaatsende,

$$y^2 - \frac{18}{5}y = -\frac{9}{5},$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$y = 3 \text{ of } y = \frac{3}{5}.$$

Nemende $y = 3$, dan heeft men:
voor de meetkunstige reeks x, $3x$ en $9x$
en voor de rekenkunstige x, $3x$ en $5x$,
waarin men voor x een willekeurig geheel getal kan nemen.

Nemende $y = \frac{3}{5}$, dan heeft men:

voor de meetkunstige reeks x, $\frac{3}{5}x$ en $\frac{9}{25}x$

en voor de rekenkunstige x, $\frac{3}{5}x$ en $\frac{1}{5}x$,

waarin men voor x alleen het getal 25 of deszelfs veelvouden kan nemen.

Stelt men bijv. in het eerste geval $x = 1$ en in het tweede $x = 25$, zoo verkrijgt men voor de gevraagde reeksen:

1°. *Meetk.* 1, 3, 9; *Rekenk.* 1, 3, 5.

2°. *Meetk.* 25, 15, 9; *Rekenk.* 25, 15, 5.

LVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Een getal van vier cijfers heeft de volgende eigenschappen: de cijfers van de tien-, duizend- en honderd-tallen, vormen eene rekenkunstige reeks; die van de duizendtallen, honderdtallen en eenheden vormen eene meetkunstige reeks; en het cijfer der tientallen, de vierkantswortel uit dat der eenheden, en het cijfer der honderdtallen maken eene harmonische reeks uit. Welk is dit getal?

OPGELOST *door* C. BRUNINGS, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, S. DIK, CORNSZ., M. H. GODEFROI, M. I. GOEDE, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHÈS, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS, I. WARNSINCK, H. W. BLOEM *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* C. BRUNINGS.

Indien het cijfer der tientallen door x, dat der duizendtallen door $x + y$, en dat der honderdtallen door $x + 2y$

voorgesteld wordt, is aan de eerste voorwaarde voldaan; opdat eveneens aan de tweede voorwaarde voldaan worde, zal het cijfer der eenheden gelijk aan $\frac{(x+2y)^2}{x+y}$ moeten zijn; en eindelijk vereischt de derde voorwaarde, dat men dan hebbe

$$x : x+2y = x - \frac{x+2y}{\sqrt{(x+y)}} : \frac{x+2y}{\sqrt{(x+y)}} - (x+2y).$$

Uit deze evenredigheid volgt de vergelijking

$$\frac{x(x+2y)}{\sqrt{(x+y)}} - x(x+2y) = x(x+2y) - \frac{(x+2y)^2}{\sqrt{(x+y)}},$$

die men door $x+2y$ kan deelen, omdat uit den aard der zaak volgt, dat deze factor niet gelijk nul kan wezen, derhalve is

$$\frac{x}{\sqrt{(x+y)}} - x = x - \frac{x+2y}{\sqrt{(x+y)}},$$

$$\frac{2(x+y)}{\sqrt{(x+y)}} = 2x,$$

$$\sqrt{(x+y)} = x,$$

$$x+y = x^2,$$

en eindelijk

$$y = x^2 - x;$$

hierdoor verkrijgt men:

voor het cijfer der eenheden $(2x-1)^2$,
» » » » tientallen x,
» » » » honderdtallen $x(2x-1)$,
» » » » duizendtallen x^2;

daar $x = 0$ geen eigenlijk getal van 4 cijfers zou geven, en $x = 3$ of $x > 3$ het cijfer der eenheden grooter dan 9 zou maken, kan alleen $x = 1$ of $x = 2$ genomen worden;

voor $x = 1$, wordt het gevraagde getal, 1111,
» $x = 2$, » » » » 4629,

welke beide getallen dus de twee eenigste antwoorden op het voorstel zijn.

LVIII. Voorstel.

Door J. Bassan.

De zijden eens driehoeks te berekenen, indien behalve den omtrek ook nog bekend zijn de twee lijnen, die uit een der hoekpunten naar de overstaande zijde getrokken zijn, en dien hoek in drie gelijke deelen verdeelen?

Opgelost door H. W. Bloem, W. J. C. Bammelman Elsevier, J. Acquoy, C. F. Julius, A. Vos, C. J. Bolten, C. Brunings, J. Bassan, D. van Lankeren Matthes, L. J. Ulman, S. Dik, Cornsz., B. de Jongh, F. C. Hadijs en I. Warnsinck.

I. Oplossing van H. W. Bloem.

Laat ABC (Fig. 26) de bedoelde driehoek zijn, waarin, benevens den omtrek p, gegeven zijn de lijnen BD $= a$ en BE $= b$, die den hoek ABC in drie gelijke deelen verdeelen; stellen wij dan *hoek* ABC $= 3\phi$, dus *hoek* ABD $=$ *hoek* DBE $=$ *hoek* EBC $= \phi$, verder AB $= x$, BC $= y$ en bijgevolg AC $= p - (x + y)$; zoo is

Inh. drieh. ABE $= \frac{1}{2} bx \, Sin. \, 2\phi$,
Inh. drieh. DBC $= \frac{1}{2} ay \, Sin. \, 2\phi$,
Inh. drieh. ABD $= \frac{1}{2} ax \, Sin. \, \phi$,
Inh. drieh. DBE $= \frac{1}{2} ab \, Sin. \, \phi$,
Inh. drieh. EBC $= \frac{1}{2} by \, Sin. \, \phi$;

daar nu uit de figuur blijkt, dat de inhoud van elk der beide eerstgenoemde driehoeken gelijk is aan de som van de inhouden van twee der drie laatstgenoemden, hebben wij de vergelijkingen

$$\tfrac{1}{2} bx \, Sin. \, 2\phi = \tfrac{1}{2} ax \, Sin. \, \phi + \tfrac{1}{2} ab \, Sin. \, \phi$$

en
$$\tfrac{1}{2} ay \, Sin. \, 2\phi = \tfrac{1}{2} by \, Sin. \, \phi + \tfrac{1}{2} ab \, Sin. \, \phi,$$

of indien wij $2 \, Sin. \, \phi \, Cos. \, \phi$ in plaats van $Sin. \, 2\phi$ schrijven en door $\frac{1}{2} \, Sin. \phi$ deelen

$$2bx \, Cos. \, \phi = ax + ab,$$
$$2ay \, Cos. \, \phi = by + ab,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{ab}{2b \, Cos. \phi - a} \text{ en } y = \frac{ab}{2a \, Cos. \phi - b}.$$

Verder is

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \, AB \times BC \times Cos. \, ABC$$

of
$$(p - (x + y))^2 = x^2 + y^2 - 2xy \, Cos. \, 3\phi,$$

het eerste lid dezer vergelijking ontwikkelende, komt er na herleiding

$$p^2 - 2p(x + y) + 2xy(Cos. 3\phi + 1) = 0,$$

hierin de bovengevondene waarden van x en y overbrengende, en in aanmerking nemende, dat $Cos. \, 3\phi = 4 \, Cos.^3\phi - 3 \, Cos. \, \phi$ is, verkrijgen wij

$$p^2-\frac{2abp}{2bCos.\phi-a}-\frac{2abp}{2aCos.\phi-b}+\frac{2a^2b^2(Cos^3.\phi-3Cos.\phi+1)}{(2bCos.\phi-a)(2aCos.\phi-b)}=0;$$

en indien wij uit deze vergelijking de noemers verdrijven, en alles naar de magten van $Cos.\phi$ rangschikken, verkrijgen wij eindelijk de derde-magtsvergelijking

$$\left.\begin{array}{l} 8a^2b^2\ Cos^3.\phi + 4ap^2\ Cos^2.\phi \\ -2(a^2p^2+b^2p^2+2abp\ (a+b)+3a^2b^2)\ Cos.\phi \\ +ab\ (p^2+2p\ (a+b)+2ab) \end{array}\right\}=0,$$

uit welke $Cos.\phi$ door benadering kan berekend worden, zoodra a, b en p in getallen gegeven zijn; $Cos.\phi$ gevonden zijnde, kan men door de vroeger uitgebragte vergelijkingen x en y berekenen, waardoor alle drie de zijden des driehoeks bekend worden.

II. Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Volgens eene bekende eigenschap des driehoeks (Zie J. de Gelder *Beg. der Meetk.* 3de druk § 340) hebben wij in Fig. 26

$$AB : BE = AD : DE,$$
$$BD^2 = AB \times BE - AD \times DE,$$
$$BC : BD = CE : DE,$$
$$BE^2 = BC \times BD - CE \times DE;$$

gebruiken wij nu voor de bekenden dezelfde letters als in de vorige oplossing, maar nemen wij voor onbekenden aan $AD = t$, $DE = u$ en $EC = v$, dan volgt uit de genoemde evenredigheden

$$AB = \frac{bt}{u} \quad \text{en} \quad BC = \frac{av}{u},$$

terwijl, door tevens deze waarden van AB en BC te gebruiken, de bovenvermelde vergelijkingen overgaan in

$$a^2 = \frac{b^2t}{u} - tu \text{ en } b^2 = \frac{a^2v}{u} - uv,$$

waaruit men t en v afzonderende vindt

$$t = \frac{a^2u}{b^2-u^2} \text{ en } v = \frac{b^2u}{a^2-u^2}.$$

Verder is

$$p = AB + BC + AC$$

of

$$p = \frac{bt}{u} + \frac{av}{u} + (t+v+u)$$

hierin nu voor t en v de gevondene waarden stellende, komt er

$$p = \frac{a^2 b}{b^2 - u^2} + \frac{a b^2}{a^2 - u^2} + \frac{a^2 u}{b^2 - u^2} + \frac{b^2 u}{a^2 - u^2} + u,$$

de breuken twee aan twee vereenigende, verkrijgt men

$$p = \frac{a^2 (b + u)}{b^2 - u^2} + \frac{b^2 (a + u)}{a^2 - u^2} + u.$$

of $$p = \frac{a^2}{b - u} + \frac{b^2}{a - u} + u;$$

indien men nu uit deze laatste vergelijking de breuken verdrijft, alles behoorlijk ontwikkelt en naar de magten van u rangschikt, komt men tot de derde magtsvergelijking

$$(u-a)(u-b)(u-p) = a^2 (u-a) + b^2 (u-b)$$

of

$$u^3 - (a+b+p)u^2 + (p(a+b) - (a^2 - ab + b^2))u + a^3 + b^3 - abp = 0,$$

waaruit men de waarde van u kan berekenen; de waarde van u bekend zijnde, kan men door de boven uitgebragte vergelijkingen ook t en v, en vervolgens alle drie de zijden des driehoeks berekenen.

Aanmerking. Indien $a = b$ gegeven was, zoude de driehoek gelijkbeenig zijn; in dat geval zou onze derde magtsvergelijking door $u - a = u - b$ deelbaar worden, weshalve alsdan u zou gevonden worden, door de vierkantsvergelijking

$$(u - a)(u - p) = 2a^2.$$

LIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert eenen driehoek te bepalen, indien behalve den omtrek ook nog bekend zijn de twee lijnen, die uit een der hoekpunten naar de overstaande zijde getrokken zijn en die zijde in drie gelijke deelen verdeelen?

Opgelost door W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, C. Brunings, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, L. J. Ulman, A. Vos, I. Warnsinck, F. C. Radijs en S. Dix, Cornsz.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABC (Fig. 27) de begeerde driehoek zijn, waarin de lijnen BD en BE de overstaande zijde in drie gelijke deelen verdeelen, zoodat AD = DE = EC = $\frac{1}{3}$ AC is; stel dan BD $= 2a$, BE $= 2b$, AB + BC + AC $= 3p$, AB $= 3x + y$,

$BC = 3x - y$, zoo is $AC = 3p - (AB + BC) = 3p - 6x$ en dus $AD = DE = EC = \frac{1}{3} AC = p - 2x$; nu heeft men, volgens eene bekende eigenschap der driehoeken,

in *drieh.* ABE $AB^2 + BE^2 = 2BD^2 + 2DE^2$

en in *drieh.* DBC $BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2DE^2$,

trekt men deze vergelijkingen van elkander af, zoo vindt men

$$AB^2 - BC^2 = 3BD^2 - 3BE^2,$$

dat is $(3x + y)^2 - (3x - y)^2 = 12a^2 - 12b^2$,

of wel $xy = a^2 - b^2$

en dus $y = \frac{a^2 - b^2}{x}$.

De bovenaangehaalde vergelijking

$$AB^2 + BE^2 = 2BD^2 + 2DE^2$$

is eigenlijk geene andere dan

$$(3x + y)^2 + 4b^2 = 8a^2 + 2(p - 2x)^2,$$

hierin de gevondene waarde voor y stellende, komt er

$$\left\{3x + \frac{a^2 - b^2}{x}\right\}^2 + 4b^2 = 8a^2 + 2(p - 2x)^2$$

of, na ontwikkeling, herleiding en rangschikking volgens de magten van x,

$$x^4 + 8px^3 - 2(a^2 + b^2 + p^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0;$$

uit deze vierde magtsvergelijking nu kan x berekend worden, als dan wordt y door de vergelijking $xy = a^2 - b^2$ gevonden, zoodat dan de drie zijden des driehoeks $AB = 3x + y$, $BC = 3x - y$ en $AC = 3p - 6x$ insgelijks bekend zijn.

LX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, als gegeven zijn: de lijn die den tophoek midden door deelt en de beide deelen waarin die lijn de basis verdeelt?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, A. VOS, I. WARNSINCK, J. BASSAN, B. DE JONGH en S. DIK, CORNSR.

I. OPLOSSING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Zij ABC (Fig. 28) de begeerde driehoek, waarin de lijn BD den hoek ABC midden door deelt, dan zijn gegeven $AD = a$, $CD = b$ en $BD = C$; omdat nu AB en BC

evenredig zijn met AD en CD, kan men stellen AB $= ax$ en BC $= bx$, terwijl men volgens eene bekende eigenschap des driehoeks heeft

$$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC$$

of $$c^2 = abx^2 - ab,$$

waaruit volgt $x = \sqrt{\frac{c^2 + ab}{ab}}$;

men heeft derhalve

$$AB = ax = a\sqrt{\frac{c^2+ab}{ab}} = \sqrt{\frac{a}{b}(c^2+ab)}$$

en $$BC = bx = b\sqrt{\frac{c^2+ab}{ab}} = \sqrt{\frac{b}{a}(c^2+ab)},$$

zoodat nu alle drie de zijden des driehoeks bekend zijn.

Men had ook eerst den hoek ADB $= \phi$ kunnen bepalen; hiertoe heeft men de evenredigheid

$$AB^2 : BC^2 = AD^2 : CD^2$$

of, omdat

$AB^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos.\ \phi$ en $BC^2 = b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\ \phi$ is,

$$a^2 + c^2 - 2ac\ Cos.\ \phi : b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\ \phi = a^2 : b^2;$$

deze evenredigheid geeft de vergelijking

$$b^2\,(a^2 + c^2 - 2ac\ Cos.\ \phi) = a^2\,(b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\ \phi),$$

waaruit men vindt

$$Cos.\ \phi = \frac{c\,(b^2 - a^2)}{2ab\,(a+b)} = \frac{c\,(b-a)}{2ab};$$

alzoo ϕ gevonden zijnde, heeft men in elk der driehoeken ABD en CBD twee zijden met den ingesloten hoek bekend, waar door al het overige volgens de gewone regels kan berekend worden. Om den begeerden driehoek te construeren, kan men zich voorstellen, dat om denzelven een cirkel is beschreven, dan zal de lijn BD verlengd wordende den boog AEC in E midden door deelen, om dat die zelfde lijn den hoek ABC midden door deelt; indien men verder eene lijn PQ regthoekig door het midden M van AC trekt, zal deze lijn niet alleen door het middelpunt des cirkels, maar ook door het punt E gaan; voorts zal volgens de eigenschappen des cirkels DE vierde evenredig tot c, a en b zijn. Hieruit volgt dan deze constructie: men neme op eene regte lijn, AD $= a$, CD $= b$, trekke door het midden M van AC eene onbepaal-

de loodlijn PQ, beschrijve met DE, geconstrueerde vierde evenredige tot a, a en b, uit D een cirkelboogje, dat PQ in E snijdt, trekke vervolgens DE en verlenge dezelve tot dat DB $=$ c zij, indien men dan uit B de lijnen AB en BC trekt, zal ABC de begeerde driehoek wezen. De lijn PQ wordt door het gebezigde cirkelboogje nog in een tweede punt gesneden; dit snijpunt gebruikende zoude men een tweede driehoek verkrijgen, die aan het voorstel beantwoordde, maar die, met den eersten driehoek gelijk en gelijkvormig zijnde, daarvan alleen in stand zou verschillen.

II. Oplossing *door Constructie*, *van* J. Acquoy.

Men neme op eene onbepaalde lijn ZC (Fig. 29.) AD $= a$, CD $= b$; voorts neme men op dezelve het punt E, zoodanig dat CE : AE $= b : a$ zij; beschrijft men nu op DE als middellijn eenen cirkel, dan zal (Zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* 3de druk § 432.) het toppunt van den begeerden driehoek en den omtrek van dezen cirkel gelegen zijn. Indien men dus uit D als middelpunt met BD $= c$ als straal eenen cirkelboog beschrijft, dan zullen de punten B en B′, waar die cirkelboog den eerstgenoemden cirkel snijdt, de toppunten zijn van twee driehoeken, die beide aan de vraag voldoen en die bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn.

Aanmerking. Uit de constructie blijkt, dat BD $= c <$ DE moet zijn, nu is CE : AE $= b : a$

en dus CE $-$ AE : $b - a$ $=$ AE : a,

of $b + a : b - a =$ AE : a,

hieruit volgt
$$\text{AE} = \frac{a(b+a)}{b-a}$$

en
$$\text{DE} = \text{AD} + \text{AE} = a + \frac{a(b+a)}{b-a} = \frac{2ab}{b-a};$$

tot de mogelijkheid der oplossing wordt alzoo gevorderd, dat
$$c < \frac{2ab}{b-a}$$
gegeven zij.

LXI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen vierhoek, in eenen cirkel beschreven, zijn gegeven twee hoeken, benevens de loodlijnen, die uit de twee

andere hoekpunten op de overstaande diagonalen vallen. Men vraagt hierdoor dien vierhoek te berekenen en te construeren?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, C. F. Julius, A. Vos, J. Bassan, C. J. Bolten, C. Brunings, W. J. C. Rammelman Elsevier, S. Dik, Cornsz. *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Zij ABCD (Fig. 30) de vierhoek in den cirkel beschreven, waarvan gegeven zijn *hoek* BAD $= \alpha$ en *hoek* ABC $= \beta$; laat verder de loodlijnen, uit de andere hoekpunten D en C des vierhoeks op de diagonalen AC en BD nedergelaten, DH $= a$ en CF $= b$ gegeven zijn; stellen wij vervolgens *hoek* DAC $= \phi$, dan is ook *hoek* DBC $= \phi$, omdat deze hoeken beiden aan den omtrek des cirkels op denzelfden boog DC staan; omdat even zoo *hoek* ACD $=$ *hoek* ABD en *hoek* BDC $=$ *hoek* BAC is, hebben wij dus ook

$$\textit{hoek}\ ACD = \beta - \phi \quad \text{en} \quad \textit{hoek}\ BDC = \alpha - \phi.$$

Nu hebben wij uit den driehoek DHC

$$DC = \frac{DH}{Sin.\,ACD} = \frac{a}{Sin.(\beta-\phi)}$$

en uit den driehoek CFD

$$DC = \frac{CF}{Sin.\,BDC} = \frac{b}{Sin.(\alpha-\phi)},$$

deze beide waarden van DC geven de vergelijking

$$\frac{a}{Sin.(\beta-\phi)} = \frac{b}{Sin.(\alpha-\phi)}$$

of

$$a\,Sin.\,(\alpha-\phi) = b\,Sin.\,(\beta-\phi),$$

hierin *Sin.* $(\alpha-\phi)$ en *Sin.* $(\beta-\phi)$ ontwikkelende en de vergelijking daarna door *Cos.* ϕ deelende, komt er

$$a\,Sin.\,\alpha - a\,Cos.\,\alpha\,Tang.\,\phi = b\,Sin.\,\beta - b\,Cos.\,\beta\,Tang.\,\phi,$$

waaruit terstond volgt

$$Tang.\,\phi = \frac{a.Sin.\alpha - b.Sin.\beta}{a.Cos.\alpha - b.Cos.\beta}.$$

Hierdoor den hoek ϕ bekend zijnde, kan men de zijden des vierhoeks gemakkelijk berekenen; vooreerst is reeds boven gevonden

$$DC = \frac{a}{Sin.(\beta-\phi)} = \frac{a}{Sin.(\alpha-\phi)};$$

verder volgt uit den driehoek AHD

$$AD = \frac{DH}{Sin. DAH} = \frac{a}{Sin. \phi}$$

en uit den driehoek CFB

$$BC = \frac{CF}{Sin. CBF} = \frac{b}{Sin. \phi};$$

terwijl men om de zijde AB te vinden, elk der driehoeken ADB of ACB kan gebruiken. Men heeft namelijk

hoek ADB $= 180° -$ *hoek* BAD $-$ *hoek* ABD

of *hoek* ADB $= 180° - \alpha - (\beta - \phi) = 180° - (\alpha + \beta - \phi)$,

dus ook *hoek* ACB $= 180° - (\alpha + \beta - \phi)$

en $Sin.$ ADB $= Sin.$ ACB $= Sin. (\alpha + \beta - \phi)$;

nu is in den driehoek ADB

$$AB = \frac{AD \times Sin. ADB}{Sin. ABD} = \frac{a\, Sin. (\alpha + \beta - \phi)}{Sin. \phi\, Sin. (\beta - \phi)},$$

of uit den driehoek ACB

$$AB = \frac{BC \times Sin. ACB}{Sin. BAC} = \frac{b\, Sin. (\alpha + \beta - \phi)}{Sin. \phi\, Sin. (\alpha - \phi)},$$

waardoor nu de geheele vierhoek berekend is.

Wij behoeven echter die waarden niet te kennen om denzelven te construeren; het is daartoe genoeg op te merken, dat uit de gevondene waarden voor AD en BC de evenredigheid volgt:

$$AD : BC = a : b$$

en dat dus elke vierhoek, waarin deze evenredigheid plaats heeft en welks hoeken bovendien gelijk zijn aan die des gevraagden vierhoeks met den laatstgenoemden gelijkvormig moet wezen.

Trekken wij dan vier lijnen MM, NN, PP, QQ, zoodanig door elkander, dat zij onderling dezelfde hoeken maken, als de gegevene in den vierhoek, dat is: maken wij (Fig. 31) *hoek* DA'B' $= \alpha$, *hoek* A'B'C' $= \beta$, *hoek* B'C'D $= 180° - \alpha$ en *hoek* C'DA' $= 180° - \beta$, dan is A'B'C'D een vierhoek, die dezelfde hoeken heeft als de begeerde. Nemen wij verder op B'C' een stuk B'E, zoodanig dat A'D : B'E $= a : b$ zij, trekken wij door E evenwijdig met MM eene lijn, die PP in C' snijdt, voorts door C' evenwijdig met NN eene lijn C'B', welke MM in B' ontmoet, dan zal A'B'C'D een vierhoek zijn, die met den begeerden vierhoek gelijkvormig

is. Trekken wij nu de diagonaal A′C′, laten wij daarop uit D eene loodlijn DH′ vallen, nemen wij op deze loodlijn DH = *a*, trekken wij door H eene lijn evenwijdig met A′C′ en uit de punten A en C, waar de laatst getrokkene lijn, de lijnen QQ en PP snijdt, lijnen AB en CB evenwijdig met MM en NN, dan zal ABCD de begeerde vierhoek zijn.

Door deze constructie zijn twee der hoeken gelijk aan de gegevene gemaakt, de beide andere hoeken zoodanig genomen dat om den vierhoek een cirkel beschreven kan worden, en de loodlijn DH is almede gelijk genomen aan de gegevene *a*; om dus voldingend te doen blijken, dat de vierhoek ABCD de begeerde is, zal alleen nog moeten aangetoond worden, dat als men uit C eene loodlijn CF op de diagonaal BD trekt, CF = *b* is. Daar nu, zoo als reeds gezegd is, om den vierhoek ABCD een cirkel kan beschreven worden, is *hoek* DAC = *hoek* DBC, de driehoeken ADH en BCF hebben behalve deze gelijke hoeken, ieder nog eenen regten hoek en zijn dus gelijkvormig, derhalve is

$$DH : CF = AD : BC;$$

wegens de evenwijdigheid der getrokkene lijnen is de driehoek A′DC′ gelijkvormig met ADC, insgelijks A′B′C′ gelijkvormig met ABC, en dus ook den vierhoek A′B′C′D gelijkvormig met ABCD, waaruit volgt

$$AD : BC = A'D : B'C';$$

wijders hebben wij door de constructie

$$A'D : B'C' = a : b;$$

uit het verband dezer drie evenredigheden volgt

$$DH : CF = a : b$$

maar DH = *a* genomen zijnde, is dus ook CF = *b*, waardoor de deugdelijkheid onzer constructie bewezen is.

LXII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer men uit een punt S, (Fig. 32) *in eene lijn* XY *genomen, eene loodlijn* RS *op de lijn* XY *oprigt, vervolgens in elk der hoeken* RSX *en* RSY *cirkels met willekeurige stralen beschrijft en daarna eene nieuwe lijn trekt, die de beide cirkels tevens aanraakt; dan zal de laatstgenoemde raaklijn, van de lijn* RS *een stuk* AS *afsnijden, dat gelijk is*

aan de som van de stralen der cirkels. Men vraagt dit te bewijzen?

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, C. Brunings, J. Acquoy, J. Bassan, H. W. Bloem, C. J. Bolten, S. Dik, Cornsz., B. de Jongh, C. F. Julius, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, I. Warnsinck *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Uit de middelpunten M en N der cirkels trekke men de lijnen MA en NA naar het punt A, gelijk mede loodlijnen MW en NV op de lijn RS; zij X'Y' de laatstgetrokkene raaklijn in het voorstel bedoeld en P derzelver snijpunt met XY, zoo deele men den hoek YPY' midden door, dan zal de deellijn PQ klaarblijkelijk door de middelpunten M en N gaan.

Nu zijn de hoeken PAS en SAY' te zamen gelijk aan twee regte hoeken, de lijnen AM en AN deelen ieder een dezer hoeken midden door, bijgevolg is MAN een regte hoek. Verder is

$$\textit{hoek}\ AMN = \textit{hoek}\ APM + \textit{hoek}\ PAM,$$

maar *hoek* APM $= \frac{1}{2}$ *hoek* APS en *hoek* PAM $= \frac{1}{2}$ *hoek* PAS,

dus $\textit{hoek}\ AMN = \frac{1}{2}(\textit{hoek}\ APS + \textit{hoek}\ PAS) = 45°$;

de driehoek AMN is derhalve een gelijkbeenige regthoekige driehoek en alzoo

$$AM = AN;$$

voorts is $\textit{hoek}\ MAW = \textit{hoek}\ ANV$,

want beide deze hoeken hebben, elk in het bijzonder, den hoek VAN tot complement. De regthoekige driehoeken AMW en ANV hebben dus gelijke schuinsche zijden en gelijke scherpe hoeken, bijgevolg zijn deze driehoeken gelijk en gelijkvormig en alzoo is $AV = MW$,

ook is klaarblijkelijk $VS = NV$,

en deze twee gelijkheden bij elkander optellende, komt er

$$AS = MW + NV,$$

hetgeen bewezen moest worden.

Aanmerking *van* C. Brunings. Behalve de in het voorstel bedoelde raaklijn X'Y', kan men aan de beide cirkels nog eene raaklijn R'S' trekken, die tusschen dezelve doorgaat; het stuk aS, dat deze raaklijn van RS afsnijdt, voldoet echter

gelijkenis aan de bewezene stelling, hetwelk duidelijk blijkt, indien men de lengte van het stuk aS berekent. Om deze berekening in het werk te stellen, merken wij vooreerst op, dat de raaklijn R'S', door het snijpunt a der lijnen RS en MN moet gaan, zijnde het klaar, dat de raaklijnen RS en R'S', evenzeer als de raaklijnen XY en X'Y', elkander moeten snijden in een punt van de lijn, die door de middelpunten der beide cirkels gaat. Stellen wij nu $aS = x$, $MW = r$, $NV = r'$, dan is $aW = x - r$, $aV = r' - x$; de, uit de figuur terstond blijkende, evenredigheid

$$MW : aW = NV : aV$$

geeft dus

$$r : x - r = r' : r - x,$$

waaruit men x oplossende vindt

$$x = \frac{2rr'}{r+r'}.$$

Daar nu $aS = \frac{2rr'}{r+r'}$ en volgens de bewezene stelling $AS = r + r'$ is, heeft men

$$AS \times aS = 2rr'.$$

Het is voorts duidelijk dat R'S' loodregt op X'Y', alsmede dat $A'S' = AS$ en $aS' = aS$ is.

LXIII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Twee ongelijke regte cirkelvormige cilinders doorsnijden elkander, zoodanig dat hunne assen loodregt op elkander staan; men begeert de projectie der doorsnede te vinden, op het vlak dat door de beide assen gaat?

Opgelost *door* I. Warnsinck, H. van Blanken, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos, B. de Jongh *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* I. Warnsinck.

Nemen wij drie onderling regthoekige coördinaten-assen aan, zoodanig dat het snijpunt van de assen der cilinders inden oorsprong, dat de as van den eersten cilinder, welks straal wij gelijk r stellen, in den as der x, en dat de as van den tweeden cilinder, welks straal r' zij, in den as der y ligt, dan zijn de vergelijkingen der beide cilindervlakken klaarblijkelijk

$$y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{en} \quad x^2 + z^2 = r'^2,$$

welke beide vergelijkingen tevens de vergelijkingen zijn van de

projectien der gemeene doorsnede op de vlakken der yz en xz.

Om de vergelijking van de projectie dier doorsnede, op het vlak waarin de assen der cilinders gelegen zijn, dat is op het vlak der xy, te vinden, behoeven wij uit de genoemde vergelijkingen slechts z te elimineren, waaruit voor de vergelijking der bedoelde projectie volgt

$$x^2 - y^2 = r'^2 - r^2.$$

Deze projectie is bij gevolg een gelijkzijdige hijperbool, waarvan de assen langs de assen der cilinders liggen, en in lengte gelijk aan $2\sqrt{(r'^2 - r^2)}$ zijn.

AANMERKING. Stelt men dat de stralen der cilinders even groot zijn en dus $r' = r$, dan gaat de vergelijking, die wij voor de projectie op het vlak der xy gevonden hebben, over in

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ of } x = \pm y,$$

welke vergelijking tot een stelsel van twee regte lijnen behoort, die elkander in den oorsprong regthoekig snijden. Daar dus de projectie op het xy vlak een stelsel van twee regte lijnen is, terwijl de projectiën op de vlakken der xz en yz cirkels zijn, zoo is de gemeene doorsnede der cilindervlakken in dit geval tevens de gemeene doorsnede van een der cilindervlakken met twee platte vlakken, loodregt op het vlak der xy staande; derhalve bestaat deze doorsnede uit twee ellipsen, waarvan de vlakken loodregt staan op het vlak dat door de assen der cilinders gaat, waarvan de middelpunten in het snijpunt van de assen der cilinders liggen, die tot kleine as hebben de middellijn der cilinders en tot groote assen de diagonalen van het vierkant, dat op het vlak der cilinder-assen door de snijding der cilindervlakken wordt gevormd. De lengte van de halve assen dezer ellipsen wordt alzoo door r en $r\sqrt{2}$ uitgedrukt.

LXIV. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Twee gelijke regte cirkelvormige cilinders doorsnijden elkander, zoodanig dat hunne assen eenen hoek a met elkander maken: men begeert den vorm en de afmetingen van de doorsnede der oppervlakken te vinden?

OPGELOST *door* I. WARNSINCK, H. VAN BLANKEN, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

Oplossing van I. Warnsinck.

Nemen wij weder drie regthoekige coördinaten-assen aan, zoodanig dat het snijpunt van de assen der cilinders in den oorsprong, dat de as van den eersten cilinder in de as der x, en dat de as van den tweeden cilinder in het vlak der xy ligt, dan is, de gelijke stralen der cilinders r noemende, de vergelijking van het eerste cilindervlak weder

$$y^2 + z^2 = r^2.$$

Om de vergelijking van het tweede cilindervlak te bepalen, stellen wij dat (Fig. 35) OX, OY en OZ de coördinaten-assen zijn, dan is OX de as van den eersten cilinder en, in het vlak XOY de lijn OQ zoodanig getrokken hebbende dat hoek XOQ $= \alpha$ is, zal OQ de as des tweeden cilinders zijn. Laat nu P een willekeurig punt van het oppervlak van dien cilinder, AC $= x$, BC $= y$, PC $= z$, de coördinaten van dat punt zijn, brengen wij dan door P een vlak loodregt op CQ, het cilindervlak volgens den cirkel EPF, en de as OQ in het punt M snijdende, zoo is

$$PC^2 + CM^2 = MP^2$$

of

$$z^2 + CM^2 = r^2;$$

maar nu is

$$AD = AO \times Tang.\ AOD = y\ Cot.\ \alpha,$$

$$CD = AC - AD = x - y\ Cot.\ \alpha,$$

$$CM = CD \times Sin.\ MDC = CD \times Sin.\ \alpha = x\ Sin.\ \alpha - y\ Cos.\ \alpha,$$

door substitutie dezer waarde van CM, verkrijgen wij dus

$$z^2 + (x\ Sin.\ \alpha - y\ Cos.\ \alpha)^2 = r^2$$

voor de vergelijking van het tweede cilindervlak.

Indien wij nu z tusschen de vergelijkingen der beide cilindervlakken elimineren, waartoe het genoegzaam is deze vergelijkingen van elkander af te trekken, dan verkrijgen wij voor de vergelijking van de projectie der gevraagde doorsnede op het vlak der xy

$$(x\ Sin.\ \alpha - y Cos.\ \alpha)^2 - y^2 = 0$$

of

$$x\ Sin.\ \alpha - y\ Cos.\ \alpha = \pm\ y$$

en

$$x = y\ \frac{Cos.\ \alpha \pm 1}{Sin.\ \alpha},$$

dat is, naar gelang wij het bovenste of benedenste teeken gebruiken,

$$x = y\ Cot.\ \tfrac{1}{2}\ \alpha \quad \text{of} \quad x = -\ y\ Tang.\ \tfrac{1}{2}\ \alpha;$$

deze projectie is dus een stelsel van twee regte lijnen, die elkander in den oorsprong regthoekig snijden, en de diagonalen zijn van de ruit, welke op het vlak der xy door de snijding der cilindervlakken gevormd wordt.

Volgt men nu dezelfde redenering, die wij in de AANMERKING op het voorgaande voorstel gebruikt hebben, dan blijkt dat de gevraagde doorsnede der twee cilindervlakken bestaat uit twee ellipsen, wier middelpunten in het snijpunt van de assen der cilinders liggen, wier vlakken loodregt staan op het vlak dat door de cilinder-assen gaat, die tot kleine as hebben eene middellijn der cilinders, en tot groote assen de diagonalen van de bovengenoemde ruit. De halve kleine as van beide deze ellipsen wordt dus door r uitgedrukt, terwijl men voor de halve groote assen gemakkelijk zal vinden $r\,Sec.\,\frac{1}{2}\,\alpha$ en $r\,Cosec\,\frac{1}{2}\,\alpha$.

AANMERKING. Stelt men hier $\alpha = 90°$, zoo komt men op hetzelfde geval terug, dat in de aanmerking op het voorgaande voorstel is vermeld.

LXV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Indien gegeven zijn de zes vergelijkingen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \;(1), \quad aa' + bb' + cc' = 0 \;(4),$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \;(2), \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0 \;(5),$$
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1 \;(3), \quad a''a + b''b + c''c = 0 \;(6)$$

zullen ook de zes andere vergelijkingen

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \quad ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \quad bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \quad ca + c'a' + c''a'' = 0,$$

plaats hebben; men vraagt de laatste uit de eerste af te leiden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, A. VOS, C. J. BOLTEN, J. ACQUOY *en* C. F. JULIUS.

I. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

In de opgegevene vergelijkingen heeft eene zoodanige symmetrie plaats, dat men overal a in b, b in c, c in a veranderende, dezelfde vergelijkingen zal behouden; dit zelfde gebeurt indien men overal de accenten bij de letters gesteld met één accent vermeerdert en daar, waar zoodoende drie accenten zouden te voorschijn komen, die accenten

weglaat. Deze opmerking kan dienen om het herhalen van dezelfde bewerkingen noodeloos te maken, want daar deze verandering van letters of van accenten in de oorspronkelijke vergelijkingen plaats mag hebben, kan zij ook toegepast worden op elke vergelijking, die wij uit de oorspronkelijke vergelijkingen zullen hebben afgeleid.

Vermenigvuldigen wij nu de vergelijkingen (4) met a'' en (5) met a, dan vinden wij

$$aa'a'' + bb'a'' + cc'a'' = 0$$

en

$$aa'a'' + ab'b'' + ac'c'' = 0,$$

het verschil hiervan geeft

$$b'(ba'' - ab'') + c'(ca'' - ac'') = 0$$

of

$$\left.\begin{aligned} b'(ba'' - ab'') &= - c'(ca'' - ac''); \\ \text{even zoo is: } b''(b'a - a'b) &= - c''(c'a - a'c), \\ b(b''a' - a''b') &= - c(c''a' - a''c'), \\ c'(cb'' - bc'') &= - a'(ab'' - ba''), \\ c''(c'b - b'c) &= - a''(a'b - b'a), \\ c(c''b' - b''c') &= - a(a''b' - b''a'), \\ a'(ac'' - ca'') &= - b'(bc'' - cb''), \\ a''(a'c - c'a) &= - b''(b'c - c'b), \\ a(a''c' - c''a') &= - b(b''c' - c''b'), \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (7);$$

zijnde uit de eerste dezer negen vergelijkingen de twee volgende, door verandering der accenten, en uit de drie eerste, door verandering der letters, de zes laatste afgeleid.

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (1) en (2) met elkander, en verheft men de vergelijking (4) tot de tweede magt, dan verkrijgt men

$$\left.\begin{aligned} a^2 a'^2 + a^2 b'^2 + a'^2 b^2 \\ + b^2 b'^2 + b^2 c'^2 + b'^2 c^2 \\ + c^2 c'^2 + c^2 a'^2 + c'^2 a^2 \end{aligned}\right\} = 1$$

en

$$\left.\begin{aligned} a^2 a'^2 + 2\,aa'bb' \\ + b^2 b'^2 + 2\,bb'cc' \\ + c^2 c'^2 + 2\,cc'aa' \end{aligned}\right\} = 0,$$

het verschil hiervan geeft

$$(ab' - a'b)^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 = 1$$

met a''^2 vermenigvuldigende, wordt dit

$$a''^2 (ab' - a'b)^2 + a''^2 (bc' - b'c)^2 + a''^2 (ca' - c'a)^2 = a''^2$$

of volgens (7),

$a''^2(ab'-a'b)^2 = c''^2(bc'-b'c)^2$ en $a''^2(ca'-c'a)^2 = b''^2(bc'-b'c)^2$
zijnde

$$c''^2(bc'-b'c)^2 + a''^2(bc'-b'c)^2 + b''^2(bc'-b'c)^2 = a''^2$$

of, daar $a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$ gegeven is,

$$\left.\begin{array}{l} (bc'-b'c)^2 = a''^2, \\ (b'c''-b''c')^2 = a^2, \\ (b''c-bc'')^2 = a'^2, \\ (ca'-c'a)^2 = b''^2, \\ (c'a''-c''a')^2 = b^2, \\ (c''a-ca'')^2 = b'^2, \\ (ab'-a'b)^2 = c''^2, \\ (a'b''-a''b')^2 = c^2, \\ (a''b-ab'')^2 = c'^2, \end{array}\right\} \quad \text{even zoo is} \quad \ldots\ldots\ldots (8);$$

zijnde wederom de acht laatste dezer vergelijkingen uit de eerste, door verandering der accenten en letters, afgeleid.

Brengt men de vergelijkingen (7) in het vierkant, zoo zullen dezelve door behulp der vergelijkingen (8) alle tot identiteit gebragt worden.

Uit de vergelijkingen (1) en (2) volgt

$$b^2 + c^2 = 1 - a^2$$

en

$$b'^2 + c'^2 = 1 - a'^2;$$

het product hiervan geeft

$$b^2b'^2 + b^2c'^2 + b'^2c^2 + c^2c'^2 = 1 - a^2 - a'^2 + a^2a'^2;$$

nu is volgens (4) $bb' + cc' = -aa'$ en dus door de verheffing tot de tweede magt,

$$b^2b'^2 + 2\,bb'\,cc' + c^2c'^2 = a^2a'^2;$$

het verschil der twee laatste vergelijkingen geeft

$$(bc'-b'c)^2 = 1 - a^2 - a'^2$$

of, daar volgens (8) $(bc'-b'c)^2 = a''^2$ is,

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1; \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1; \end{array}\right\} \quad \text{even zoo is} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

uit (9) is $1 - a^2 = a'^2 + a''^2$, uit (1) is $1 - a^2 = b^2 + c^2$, derhalve

$$\left.\begin{array}{l} b^2 + c^2 = a'^2 + a''^2; \\ b'^2 + c'^2 = a^2 + a''^2, \\ b''^2 + c''^2 = a^2 + a'^2, \\ a^2 + c^2 = b'^2 + b''^2, \\ a'^2 + c'^2 = b^2 + b''^2, \\ a''^2 + c''^2 = b^2 + b'^2, \\ a^2 + b^2 = c'^2 + c''^2, \\ a'^2 + b'^2 = c^2 + c''^2, \\ a''^2 + b''^2 = c^2 + c'^2, \end{array}\right\} \quad \text{even zoo is} \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Nemen wij uit deze laatste vergelijkingen

$$a^2 + b^2 = c'^2 + c''^2,$$

en stellen wij daarin voor c'^2 en c''^2 hunne waarden volgens (8), dan komt er

$$a^2 + b^2 = (a''b - ab'')^2 + (ab' - a'b)^2$$

of

$$a^2 + b^2 = a''^2b^2 + a^2b''^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2aba''b'' - 2aba'b',$$

de termen verschikkende vindt men

$$a^2(1 - b'^2 - b''^2) + b^2(1 - a'^2 - a''^2) + 2ab(a'b' + a''b'') = 0$$

maar volgens (9) $1 - b'^2 - b''^2 = b^2$, $1 - a'^2 - a''^2 = a^2$ zijnde, verandert de laatste vergelijking in

$$2a^2b^2 + 2ab(a'b' + a''b'') = 0,$$

waaruit alsnu door $2ab$ deelende volgt

$$\left.\begin{array}{l} ab + a'b' + a''b'' = 0; \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'a' + c''a'' = 0; \end{array}\right\} \ldots\ldots (11);$$

(even zoo is de tweede)

de vergelijkingen (9) en (11) juist de begeerde zijnde, is hierdoor het voorstel opgelost.

II. Oplossing van A. Vos.

Stellen wij dat

$$p = aq + a'q' + a''q'' \quad \ldots \quad (A),$$
$$p' = bq + b'q' + b''q'' \quad \ldots \quad (B),$$
$$p'' = cq + c'q' + c''q'' \quad \ldots \quad (C),$$

zij, dan hebben wij drie nieuwe vergelijkingen met zes onbekenden ingevoerd en kunnen dus over drie dezer onbekenden naar welgevallen beschikken. Indien wij nu deze nieuwe vergelijkingen respectievelijk met a, b en c vermenigvuldigen, bekomen wij

$$ap = a^2q + aa'q' + aa''q''$$
$$bp' = b^2q + bb'q' + bb''q'',$$
$$cp'' = c^2q + cc'q' + cc''q'',$$

waarvan de som is

$$ap + bp' + cp'' = (a^2 + b^2 + c^2)q + (aa' + bb' + cc')q' + (aa'' + bb'' + cc''q'')$$

of omdat volgens de opgaaf

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $aa' + bb' + cc' = 0$, $aa'' + bb'' + cc'' = 0$ is

$$ap + bp' + cp'' = q \ldots\ldots (D);$$

op dezelfde wijze verkrijgen wij, door de vergelijkingen (A), (B) en (C) met a', b' en c' te vermenigvuldigen en daarna derzelver som te nemen,

$$a'p + b'p' + c'p'' = q' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E);$$

en door (A), (B) en (C) met a'', b'', c'' vermenigvuldigd, te adderen

$$a''p + b''p' + c''p'' = q'' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (F).$$

Nemen wij nu $p' = 0$ en $p'' = 0$, dan hebben wij door (D), en (E) en (F)

$$q = ap,\ q' = a'p \text{ en } q'' = a''p,$$

brengen wij deze waarden over in (A) en (B), dan vinden wij

$$p = a^2p + a'^2p + a''^2p$$

en $$0 = abp + a'b'p + a''b''p,$$

waaruit, door p deelende, volgt

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0.$$

Nemen wij echter $p'' = 0$ en $p = 0$, dan hebben wij door (D), (E) en (F)

$$q = bp',\ q' = b'p' \text{ en } q'' = b''p'$$

en deze waarden in (B) en (C) overbrengende, komt er

$$p' = b^2p' + b'^2p' + b''^2p'$$

en $$0 = bcp' + b'c'p' + b''c''p',$$

waaruit, door p' deelende, volgt

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$$

en $$bc + b'c' + b''c'' = 0.$$

Nemen wij eindelijk $p = 0$ en $p' = 0$, dan geven (D), (E) en (F)

$$q = cp'',\ q' = c'p'' \text{ en } q'' = c''p'',$$

brengen wij nog deze waarden in (C) en (A) over, dan verkrijgen wij

$$p'' = c^2p'' + c'^2p'' + c''^2p''$$

en $$0 = acp'' + a'c'p'' + a''c''p'',$$

waaruit, door p'' deelende, volgt

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

en $$ac + a'c' + a''c'' = 0.$$

Hierdoor is dus aan het gevraagde voldaan.

III. Oplossing van C. J. Bolten.

Dewijl a^2, b^2, enz. geen van allen negatief kunnen zijn; volgt uit de drie eerste der gegevene vergelijkingen, dat elk dezer grootheden kleiner dan de eenheid moet wezen; wij mogen derhalve stellen

$$a = Cos.\, x,\ b = Cos.\, y,\ c = Cos.\, z,$$
$$a' = Cos.\, x',\ b' = Cos.\, y',\ c' = Cos.\, z',$$
$$a'' = Cos.\, x'',\ b'' = Cos.\, y'',\ c'' = Cos.\, z'',$$

waardoor de opgegevene vergelijkingen overgaan in:

$$Cos^2.\, x + Cos^2.\, y + Cos^2.\, z = 1 \quad \ldots \quad (\alpha),$$
$$Cos^2.\, x' + Cos^2.\, y' + Cos^2.\, z' = 1 \quad \ldots \quad (\beta),$$
$$Cos^2.\, x'' + Cos^2.\, y'' + Cos^2.\, z'' = 1 \quad \ldots \quad (\gamma),$$
$$Cos.\, x\ Cos.\, x' + Cos.\, y\ Cos.\, y' + Cos.\, z\ Cos.\, z' = 0 \quad (\delta),$$
$$Cos.\, x'\ Cos.\, x'' + Cos.\, y'\ Cos.\, y'' + Cos.\, z'\ Cos.\, z'' = 0 \quad (\epsilon),$$
$$Cos.\, x''\ Cos.\, x + Cos.\, y''\ Cos.\, y + Cos.\, z''\ Cos.\, z = 0 \quad (\eta),$$

Uithoofde der vergelijking (α) kunnen, zoo als genoegzaam bekend is, (*) x, y en z beschouwd worden als de hoeken, die eene regte lijn met drie onderling regthoekige assen van coördinaten maakt; uit de vergelijkingen (β) en (γ) volgt, dat hetzelfde ten opzigte van van x', y' en z', als mede van x'', y'' en z'' kan geschieden.

Noemen wij dan drie onderling regthoekige coördinaten-assen X, Y en Z en laten respectievelijk met deze assen

eene lijn P de hoeken x, y en z,
— — Q — —— x', y' en z',
— — R — —— x'', y'' en z''

maken, zoo is aan de vergelijkingen (α), (β) en (γ) voldaan; terwijl dan, gelijk mede genoegzaam bekend is (†), uit de vergelijkingen (δ), (ϵ) en (η) volgt, dat de lijnen P, Q en R onderling regthoekig op elkander staan.

Beschouwen wij nu deze drie lijnen P, Q en R, als drie nieuwe coördinaten assen, en de eerstgenoemde coördinaten-assen X, Y en Z als drie lijnen ten opzigte van deze, dan maken respectievelijk met deze nieuwe assen

de lijn X de hoeken x, x' en x'',
— — Y — —— y, y' en y'',
— — Z — —— z, z' en z'';

hieruit volgt, dat men dan ook hebben moet

$$Cos^2.\, x + Cos^2.\, x' + Cos^2.\, x'' = 1,$$
$$Cos^2.\, y + Cos^2.\, y' + Cos^2.\, y'' = 1,$$
$$Cos^2.\, z + Cos^2.\, z' + Cos^2.\, z'' = 1;$$

(*) Zie, onder anderen, het 16e Voorstel van het IIde Deel dezer *Verzameling van Wisk. Voorstellen.*

(†) Zie ter aangeh. pl., het 17e Voorstel.

terwijl uit den onderling loodregten stand der lijnen X, Y en Z volgt, dat ook

$$Cos. x\, Cos. y + Cos. x'\, Cos. y' + Cos. x''\, Cos. y'' = 0;$$
$$Cos. y\, Cos. z + Cos. y'\, Cos. z' + Cos. y''\, Cos. z'' = 0,$$
$$Cos. z\, Cos. x + Cos. z'\, Cos. x' + Cos. z''\, Cos. x'' = 0,$$

moet wezen.

In de zes laatste vergelijkingen nu weder voor *Cos. x*, *Cos. y* ens. hunne waarden *a*, *b*, ens. stellende verkrijgen wij

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1;$$

$$ab + a'b' + a''b'' = 0,$$
$$bc + b'c' + b''c'' = 0,$$
$$ca + c'a' + c''a'' = 0;$$

hetwelk juist de gevraagde vergelijkingen zijn.

LXVI. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Eene harmonische reeks van vier termen te vinden, als de som der termen en de som van derzelver vierkanten gegeven is?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Wij stellen de beide middelste termen der gevraagde reeks door

$$x - y \quad \text{en} \quad x + y$$

voor, dan volgt, uit de eigenschappen der harmonische reeksen, dat

$$\frac{x^2 - y^2}{x + 3y} \quad \text{en} \quad \frac{x^2 - y^2}{x - 3y}$$

de beide uiterste termen van de reeks zullen zijn.

Laat nu de som der termen *a* en de som van derzelver vierkanten *b* zijn, dan hebben wij de vergelijkingen

$$\frac{x^2 - y^2}{x + 3y} + (x - y) + (x + y) + \frac{x^2 - y^2}{x - 3y} = a$$

$$\text{en } \left(\frac{x^2 - y^2}{x + 3y}\right)^2 + (x - y)^2 + (x + y)^2 + \left(\frac{x^2 - y^2}{x - 3y}\right)^2 = b,$$

welke door vereeniging der termen, waaruit het eerste lid van elke der vergelijkingen bestaat, overgaan in

$$\frac{2x(2x^2-10y^2)}{x^2-9y^2}=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$\frac{4(x^6-5x^4y^2+23x^2y^4+45y^6)}{(x^2-9y^2)^2}=b \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit de vergelijking (1) y^2 afzonderende, verkrijgt men

$$y^2=\frac{a-4x}{9a-20x}\times x^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en deze waarde van y^2 in (2) overbrengende, komt er na behoorlijke herleiding

$$x^6\{160x^3-168ax^2+(64a^2-20b)x-9a(a^2-b)\}=0 \ (4);$$

daar wij nu blijkbaar de vraag moeten oplossen, zonder $x=0$ te stellen, waardoor ook volgens (3) $y=0$ zoude worden, zoo deelen wij de vergelijking (4) door x^6, gelijk mede door 160, waardoor wij de eenvoudige derde magts vergelijking

$$x^3-\frac{21}{20}ax^2+\left(\frac{2}{5}a^2-\frac{1}{8}b\right)x-\frac{9}{160}a(a^2-b)=0 \quad (5)$$

verkrijgen; zoodra dus a en b in getallen gegeven zijn, kan men door (5) de waarde van x, en vervolgens door (3) de waarde van y berekenen, zoodat dan de geheele reeks gevonden is.

Zij ten voorbeelde $a=100$, $b=3280$, dan wordt de vergelijking (5)

$$x^3-105x^2+3590x-37800=0,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt $x=20$, terwijl de beide andere wortels onbestaanbaar zijn; door (3) vindt men nu verder $y=4$, weshalve de verlangde reeks is 12, 16, 24 en 48.

LXVII. Voorstel.

Door K. Smit.

Een vader deelt 4100 Rijksdaalders onder zijne vier kinderen, drie zonen en eene dochter, zoodanig, dat die deelen eene harmonische reeks uitmaken; het vierkant van het getal Rijksdaalders van het deel der dochter is 135838 meer dan de som der drie vierkanten van de deelen der zonen. Hoeveel bekomt ieder? (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, L. J. Ulman, J. Bassan, J. Acquoy, C. F. Julius *en* A. Vos.

OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Laat de bedoelde harmonische reeks voorgesteld worden door

$$\frac{z}{x+3y},\quad \frac{z}{x+y},\quad \frac{z}{x-y} \text{ en } \frac{z}{x-3y}$$

en gemakshalve $4100 = a$, $135838 = b$ zijn, dan geeft het voorstel, omdat de laatste term der reeks de grootste is en dus het deel van de dochter verbeeldt, aanleiding tot de vergelijkingen

$$\frac{z}{x+3y} + \frac{z}{x+y} + \frac{z}{x-y} + \frac{z}{x-3y} = a$$

en $$\frac{z^2}{(x-3y)^2} - \frac{z^2}{(x+3y)^2} - \frac{z^2}{(x+y)^2} - \frac{z}{(x-y)^2} = b,$$

welke vergelijkingen door eenvoudige herleiding overgaan in

$$\frac{4zx(x^2-5y^2)}{(x^2-y^2)(x^2-9y^2)} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$\frac{12z^2 xy}{(x^2-9y^2)^2} - \frac{2z^2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2} = b \quad . \quad . \quad (2)$$

uit (1) volgt oogenblikkelijk

$$z = \frac{a(x^2-y^2)(x^2-9y^2)}{4x(x^2-5y^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

terwijl, door substitutie dezer waarde van z, de vergelijking (2) verandert in

$$\frac{3a^2 xy(x^2-y^2)^2}{4x^2(x^2-5y^2)^2} - \frac{a^2(x^2+y^2)(x^2-9y^2)^2}{8x^2(x^2-5y^2)^2} = b.$$

of

$$6a^2xy(x^2-y^2)^2 - a^2(x^2+y^2)(x^2-9y^2)^2 = 8bx^2(x^2-5y^2)^2 \;(4).$$

Stellen wij nu $x = ny$ . . . . (5),

dan verandert (4), na deeling door y^6, in

$$6a^2 n(n^2-1)^2 - a^2(n^2+1)(n^2-9)^2 = 8bn^2(n^2-5)^2,$$

welke vergelijking, behoorlijk ontwikkeld en naar de magten van n gerangschikt, geeft

$$(a^2+8b)n^6 - 6a^2 n^5 - (17a^2+80b)n^4 + 12a^2 n^3$$
$$+ (63a^2+200b)n^2 - 6a^2 n + 81a^2 = 0;$$

hierin voor a en b derzelver getallen waarde substituerende, komt er, na deeling door 16,

$$1118544\, n^6 - 6303750\, n^5 - 18539815\, n^4 + 12607500\, n^3$$
$$+ 67887350\, n^2 - 6303750\, n + 85100625 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

(*) P. HALCKEN, *Zinnen Confect.* pag. 331. No. 216.

welke zesde-magtsvergelijking eene meetbare wortel $s = 7\frac{1}{2}$ heeft. Men heeft bijgevolg door (5)

$$x = 7\tfrac{1}{2}\,y$$

en deze waarde van x in (3) overbrengende, komt er na vereenvoudiging

$$s = \frac{13923}{8200}\,a\,y$$

of, voor a deszelfs waarde 4100 stellende,

$$s = 6961\tfrac{1}{2}\,y;$$

deze waarden van x en s eindelijk in de gestelde reeks substituerende, verkrijgen wij voor derzelver termen de getallen

663, 819, 1071 en 1547,

waardoor het aandeel, dat elk der kinderen bekomt gevonden is.

LXVIII. Voorstel.

Door K. Smit.

In eenen regthoekigen driehoek ABD (Fig. 34) *wordt uit den hoek* A *getrokken eene lijn* AC, *deelende de basis* BD *in twee ongelijke deelen, doch zoodanig dat de drie lijnen* AB, AC *en* AD *eene rekenkunstige reeks uitmaken; het verschil in lengte tusschen* AC *en* AB *is evenveel als het verschil tusschen* BC *en* CD. *Indien nu de som van* AB, AC, AD *en* BD 100 *is, hoe veel is dan ieder dezer lijnen in het bijzonder?* (*)

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, J. Bassan, C. J. Bolten, W. G. van Delden, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoek, A. Vos, B. de Jongh, *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stel $AC = x$, $BD = y$ en $BC - CD = s$, dan is ook $AC - AB = s$, bijgevolg is $BC = \frac{1}{2}(y + s)$, $CD = \frac{1}{2}(y - s)$, $AB = x - s$ en $AD = x + s$. Nu is, uit de eigenschappen der regthoekige driehoeken,

$$AB^2 + BD^2 = AD^2$$

en

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

terwijl

$$AB + AC + AD + BD = 100$$

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect.* pag. 454. No. 453.

gegeven is; wij hebben dus de vergelijkingen

$$(x - z)^2 + y^2 = (x + z)^2,$$

$$(x - z)^2 + \tfrac{1}{4}(y + z)^2 = x^2$$

en

$$3x + y = 100.$$

De beide eerste vergelijkingen ontwikkelende, vindt men

$$y^2 = 4xz,$$

en

$$y^2 + 2yz + 5z^2 = 8xz,$$

dus is

$$y^2 + 2yz + 5z^2 = 2y^2$$

of

$$y^2 - 2yz = 5z^2,$$

welke laatste vergelijking, als eene gewone vierkantsvergelijking behandeld wordende, geeft

$$y = z \pm z\sqrt{6};$$

daar y echter positief moet zijn en $\sqrt{6} > 1$ is, hebben wij alleenlijk

$$y = z(1 + \sqrt{6}).$$

De vergelijkingen $3x + y = 100$ en $y^2 = 4xz$ gaan hierdoor over in

$$3x + z(1 + \sqrt{6}) = 100 \text{ en } z^2(7 + 2\sqrt{6}) = 4xz,$$

zondert men nu uit ieder dezer beide vergelijkingen x af en stelt men deze waarden aan elkander gelijk, dan komt er

$$x = \frac{100 - z(1 + \sqrt{6})}{3} = \frac{z(7 + 2\sqrt{6})}{4},$$

waaruit men terstond vindt

$$z = \frac{80}{5 + 2\sqrt{6}} = 80(5 - 2\sqrt{6}) = 400 - 160\sqrt{6};$$

derhalve is

$$y = z(1 + \sqrt{6}) = 80(-7 + 3\sqrt{6}) = -560 + 240\sqrt{6}$$

$$\text{en } x = \tfrac{1}{4}z(7 + 2\sqrt{6}) = 20(11 - 4\sqrt{6}) = 220 - 80\sqrt{6}.$$

Wij verkrijgen hierdoor voor de gezochte lijnen:

$AB = -180 + 80\sqrt{6}$, $AC = 220 - 80\sqrt{6}$, $AD = 620 - 240\sqrt{6}$ en $BD = -560 + 240\sqrt{6}$.

LXIX. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Twee lijnen BC *en* DE (Fig. 35) *snijden elkander in een punt* A; *indien nu* AB = 7, AC = 7, AD = 10 *en* AE = 5 *is, begeert men den hoek waaronder die lijnen elkander snijden zoodanig te bepalen, dat de afstand* BD 3 *langer is dan de afstand* EC? (*)

(*) P. HALCKEN, *Zinnen-Confect.* pag. 455. No. 462.

Opgelost *door* A. Vos, J. Acquoy, C. Brunings, C. F. Julius, J. Bassan, C. J. Bolten, B. de Jongh, F. C. Radijs, L. J. Ulman, M. L. Goede, D. van Lankeren Matthes *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* A. Vos.

Uit de gegevene figuur volgt terstond, dat wij hebben

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2.\ AB \times AD\ Cos.\ A$$

en $$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2.\ AC \times AE\ Cos.\ A;$$

of, indien wij CE $= x$ en dus BD $= x + 3$ stellen, en voor de lijnen hunne gegevene getallen waarden substitueren,

$$(x+3)^2 = 149 - 140\ Cos.\ A$$

en $$x^2 = 74 - 70\ Cos.\ A;$$

trekken wij nu de eerste vergelijking van het dubbel der laatste af, dan komt er

$$x^2 - 6x - 9 = -1$$

of $$x^2 - 6x = 8,$$

waaruit volgt $$x = 3 \pm \sqrt{17}$$

en $$x + 3 = 6 \pm \sqrt{17};$$

uit de tweede vergelijking volgt verder

$$70\ Cos.\ A = 74 - x^2,$$

hierin de gevondene waarde van x overbrengende, verkrijgt men

$$70\ Cos.\ A = 74 - (26 \pm 6\sqrt{17})$$

of $$Cos.\ A = \frac{24 \mp 3\sqrt{17}}{35};$$

het benedenste teeken zoude voor *Cos.* A eene waarde grooter dan de eenheid geven en alzoo *hoek* A onbestaanbaar maken; alleen het bovenste teeken is dus bruikbaar, en geeft

$$Cos.\ A = 0{,}3323052,$$

waarmede men door de gewone tafels vindt

$$hoek\ A = 70^\circ\ 25'\ 28'',5.$$

LXX. Voorstel.

Door K. Smit.

Indien in de voorgaande figuur gegeven is BD $= 7$ *en* EC $= 6$, *als ook, dat de som der beide lijnen* BC *en* DE *te zamen* 24 *is, vraagt men het snijpunt* A *zoodanig te be-*

palen, dat AB, AC, AD *en* AE *alle door rationale getallen worden uitgedrukt?* (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, J. Bassan, C. F. Julius, A. Vos, *en* L. J. Ulman.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij

$$AB = x,\ AC = y,\ AD = z \text{ en } AE = u,$$

dan is vooreerst

$$x + y + z + u = 24; \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ten andere hebben wij uit den driehoek ABD, omdat BD = 7 is,

$$Cos.\ A = \frac{x^2 + z^2 - 49}{2xz},$$

en uit den driehoek ACE, omdat CE = 6 is,

$$Cos.\ A = \frac{y^2 + u^2 - 36}{2yu},$$

derhalve is

$$\frac{x^2 + z^2 - 49}{xz} = \frac{y^2 + u^2 - 36}{yu}$$

of de beide leden dezer vergelijking met 2 vermeerderende

$$\frac{(x + z)^2 - 49}{xz} = \frac{(y + u)^2 - 36}{yu} \quad \ldots\ldots (2),$$

zijnde de beide vergelijkingen (1) en (2) de eenige, waartoe het voorstel aanleiding geeft; omdat de som van de twee zijden eens driehoeks grooter dan de derde is, moet bovendien

$$x + z > 7 \quad \text{en} \quad y + u > 6$$

zijn, en wij kunnen dus beginnen met het getal 24 in twee deelen te verdeelen, waarvan het eene grooter dan 7, het andere grooter dan 6 is, en deze deelen voor de waarden van $x + z$ en $y + u$ te nemen; stellen wij dus

$$x + z = a,\quad y + u = b \ldots\ldots\ldots (3),$$

dan moet

$$a > 7 \quad b > 6 \quad \text{en} \quad a + b = 24 \ldots\ldots (4),$$

zijn, terwijl onder deze beperkingen de waarden van a en b overigens willekeurig kunnen worden genomen. Door (3) en (4) is aan de vergelijking (1) voldaan; de vergelijking (2) aan welke nog moet voldaan worden, verandert door (3) in

(*) P. Halcken, *Zinnen Confect.* pag. 455. No. 463.

$$\frac{a^2-49}{(a-z)z}=\frac{b^2-36}{(b-y)y};$$

stellen wij nu hierin $z=ry$, dan gaat deze vergelijking, na deeling der noemers door y, over in

$$\frac{a^2-49}{(a-ry)r}=\frac{b^2-36}{b-y}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(5),$$

waaruit men terstond vindt

$$\left.y=\frac{b(a^2-49)-ar(b^2-36)}{(a^2-49)-r^2(b^2-36)}\right\}\;\ldots\;(6)$$

terwijl dan $\quad z=ry,\; u=b-y$ en $x=a-z$

is. Men neme dus voor a en b getallen, die aan de voorwaarden (4) voldoen, doch overigens willekeurig zijn, voorts voor r eene willekeurige waarde, mits zoodanig dat y positief blijve, dan zullen de vergelijkingen (6) rationale waarden voor y, z, u en x geven, waardoor het voorstel is opgelost.

Voor $a=14$, $b=10$ en $r=\frac{7}{4}$, verkrijgt men:

AC $=y=2$, AD $=z=3\frac{1}{2}$, AE $=u=8$ en AB $=x=10\frac{1}{2}$.

Aanmerking. Indien men a en b in rede als 7 tot 6 verkoos te nemen, zouden de driehoeken ABD en ACE blijkbaar gelijkvormig zijn, omdat alsdan de zijden BD en CE, over de gelijke hoeken BAD en CAE staande, evenredig zouden zijn met de omtrekken der driehoeken. Deze driehoeken zouden echter ten aanzien van elkander twee verschillende standen kunnen hebben, namelijk zoo als in Fig. 36 waar de zijden BD en CE koorden van eenen zelfden cirkel zijn, of zoo als in Fig. 37 waar de zijden BD en CE evenwijdig loopen. In deze gevallen kunnen de vergelijkingen (6) eene vereenvoudiging ondergaan; stelt men namelijk $a=7m$, $b=6m$, als wanneer, uit hoofde van

$a+b=24$, $m=\frac{24}{13}$ is, dan wordt

$$y=\frac{6m(49m^2-49)-7mr(36m^2-36)}{(49m^2-49)-r^2(36m^2-36)}$$

of, teller en noemer door m^2-1 deelende, welke factor niet gelijk nul is, na verdere vereenvoudiging

$$y=\frac{42m(7-6r)}{49-6r^2}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(7).$$

Begeert men nu de oplossing in gedaante van Fig. 36, dan is blijkbaar AD $=\frac{7}{6}$ AC of $z=\frac{7}{6}y$ en dus, daar wij

$x = ry$ gesteld hebben, $r = \frac{7}{6}$, daardoor wordt $y = \frac{0}{0}$; y is dus onbepaald, waarvan men zich bovendien overtuigen kan, door op te merken dat $u = 7m$, $b = 6m$ en $r = \frac{7}{6}$ aan de vergelijking (5) voldoen, onafhankelijk van eenige waarde van y. In dit geval neme men dus

$$\left.\begin{array}{l} y \text{ geheel willekeurig, mits } < 6m, \\ x = \frac{7}{6}y,\ u = 6m - y,\ z = 7m - x \end{array}\right\} \ldots\ldots (8);$$

bij voorbeeld, $y = 4\frac{4}{13}$ nemende, heeft men:

$AC = y = 4\frac{4}{13}$, $AD = x = 5\frac{1}{39}$, $AE = u = 6\frac{10}{13}$ en $AB = z = 7\frac{35}{39}$,

welk antwoord door HALCKEN is opgegeven.

Begeert men de oplossing in de gedaante van Fig. 37, dan deele men teller en noemer der breuk (7) door $7 - 6r$, (welke factor in dat geval niet gelijk nul is, tenzij $AB = AD$ en $AC = AE$ ware), zoodat men alsdan nemen moet:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{42m}{7 + 6r}, \\ x = ry,\ u = 6m - y,\ z = 7m - x \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9);$$

voor $r = \frac{11}{6}$, verkrijgt men:

$AC = y = 4\frac{4}{13}$, $AD = z = 7\frac{35}{39}$, $AE = u = 6\frac{10}{13}$ en $AB = x = 5\frac{1}{39}$,

welke getallen wederom dezelfde zijn als die door HALCKEN opgegeven, echter met verplaatsing der figuur uit den toestand van Fig. 36 in dien van Fig. 37; zijnde het duidelijk dat men in (9) voor r eene zoodanige waarde nemen kan, dat y elke willekeurige waarde kleiner dan $6m$ verkrijgt.

Begeerde men eindelijk de oplossing zoodanig, dat de figuur te gelijker tijd in de toestanden van Fig. 36 en van Fig. 37 verkeerde, dan zoude wel $7 - 6r = 0$ zijn, maar dan zoude men voor y de waarde moeten nemen, die dezelve door $6r = 7$ te stellen verkreeg, nadat de uitdrukking $y = \frac{42m(7 + 6r)}{49 - 36r^2}$ van den gemeenen factor $7 - 6r = 0$ gezuiverd was; voor dit geval heeft men dus

$$y = 3m,\ z = \frac{7}{2}m,\ u = 3m,\ x = \frac{7}{2}m \ldots (10),$$

of voor m de waarde $\frac{24}{13}$ stellende,

$$AC = y = 5\frac{7}{13},\ AD = z = 6\frac{6}{13},\ AE = u = 5\frac{7}{13},\ AB = x = 6\frac{6}{13}.$$

LXXI. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Iemand neemt op Intrest f375.- voor x maanden, tegen ½ x ten honderd 's jaars; de tijd verschenen zijnde verkrijgt hij op zijn verzoek nog ½ x maanden uitstel, mits van dien tijd af één ten honderd 's jaars van het kapitaal meer aan Intrest betalende dan te voren; op de eindelijke verschijndag, betaalt hij nu in alles f25.- aan Intrest. Men vraagt hieruit te vinden hoe lang die leening geduurd heeft? (*)

OPGELOST *door* A. VOLKERSE, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, J. BASSAN, C. BRUNINGS, E. BOAS, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* A. VOLKERSE.

Bij de eerste leening is de Intrest in 12 maanden $\frac{1}{2}x$ ten honderd, en dus in x maanden $\frac{x}{12} \times \frac{1}{2}x = \frac{x^2}{24}$ ten honderd; verder bedraagt $\frac{x^2}{24}$ ten honderd van 375, $\frac{375}{100} \times \frac{x^2}{24} = \frac{5x^2}{32}$ en dus beloopt de Intrest der eerste leening $\frac{5x^2}{32}$ gulden.

Bij de tweede leening is de Intrest in 12 maanden $\frac{1}{2}x + 1$ ten honderd, en dus in $\frac{1}{2}x$ maanden $\frac{\frac{1}{2}x}{12} \times (\frac{1}{2}x + 1) = \frac{x^2 + 2x}{48}$ ten honderd; verder is $\frac{x^2 + 2x}{48}$ ten honderd van 375, $\frac{375}{100} \times \frac{x^2 + 2x}{48} = \frac{5x^2 + 10x}{64}$ en zoo veel guldens is is dus de Intrest der tweede leening.

Daar nu de Intrest in alles met 25 gulden betaald wordt, hebben wij de vergelijking

(*) MARTEN JELLES, *Rekenkundige Bijzonderheden*, Voorstel 131.

$$\frac{5x^2}{32}+\frac{5x^2+10x}{64}=25,$$

dat is $$15x^2+10x=1600$$
of $$x^2+\tfrac{2}{3}x=106\tfrac{2}{3},$$
waaruit men op de gewone wijze vindt
$$x=10 \quad \text{of} \quad x=-10\tfrac{2}{3};$$
dewijl nu blijkbaar alleen de positieve waarde van x in aanmerking kan komen, heeft de leening eerst 10 en vervolgens nog 5 maanden geduurd.

AANMERKING *van* J. ACQUOY. Was het voorstel geweest: *Iemand moet over zekeren tijd* ƒ 375.- *betalen, met vrijheid om dezelve x maanden vroeger te voldoen, tegen eene korting van $\frac{1}{2}$ x ten honderd 's jaars; op zijn verzoek wordt hem toegestaan de betaling nog $\frac{1}{2}$ x maanden te vervroegen, mits de korting één ten honderd 's jaars minder rekenende. Indien nu de geheele korting* ƒ 25.- *bedraagt, vraagt men hieruit te vinden hoe veel maanden hij te vroeg betaald heeft?* dan zoude de waarde van $x=10\frac{2}{3}$ aan den letterlijken zin van het voorstel voldaan hebben, en hij zoude alzoo in het geheel 16 maanden te vroeg hebben betaald.

LXXII. VOORSTEL.

Door H. VAN BLANKEN.

Wanneer men het gebroken $1:3^p$, *p een geheel positief getal grooter dan 1 zijnde, in eene tiendeelige breuk ontwikkelt, dan zal het aantal cijfers in het repetendum* 3^{p-2} *zijn. Men vraagt naar het bewijs?*

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, L. J. ULMAN, H. VAN BLANKEN, J. ACQUOY, A. VOS, C. F. JULIUS, M. G. SNOEK, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS *en* B. DE JONGH.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Indien $\frac{1}{3^p}$ in eene tiendeelige breuk ontwikkeld wordt, zal het repeteren der decimalen eerst dan beginnen, wanneer men bij het verrigten der deeling eene 1 voor rest heeft verkregen; het aantal nullen, dat men, alvorens tot zoodanige rest te geraken, achter den teller der opgegevene breuk heeft moeten plaatsen, is klaarblijkelijk even groot als het aantal cijfers, dat men in het repetendum zal verkrijgen. Dit aan-

tal cijfers derhalve door x voorstellende, zal $\frac{10^x}{3^p}$ eene rest 1 moeten overlaten, of met andere woorden $\frac{10^x-1}{3^p}$ zal een geheel getal moeten zijn, terwijl tevens x het kleinste getal moet wezen, waardoor aan deze voorwaarde kan voldaan worden.

Omdat $p > 1$ is, kan men schrijven

$$\frac{10^x-1}{3^p}=\frac{10^x-1}{3^2\,3^{p-2}}=\frac{10^x-1}{(10-1)\,3^{p-2}}=\frac{1-10^x}{(1-10)\,3^{x-2}},$$

daar nu $1-10^x$ door $1-10$ deelbaar is, is deze uitdrukking dezelfde als

$$\frac{1+10+10^2+10^3+10^4+\text{enz.}\ldots+10^{x-2}+10^{x-1}}{3^{p-2}}\quad\text{(A)}$$

en deze breuk moet nu een geheel getal wezen; omdat een getal niet door 3 deelbaar kan zijn, ten zij de som van deszelfs cijfers door 3 deelbaar is, moet het aantal termen van den teller van (A) een veelvoud van 3 zijn; men kan dus deze breuk ontbinden in de factoren

$$\frac{1+10+10^2}{3}\times\frac{1+10^3+10^6+\text{enz.}\ldots+10^{x-3}}{3^{p-3}};$$

de eerste dezer factoren een geheel getal zijnde, moet ook de tweede factor zulks zijn; de teller van dien tweeden factor moet dus door 3 deelbaar en bijgevolg het aantal termen van dien teller een veelvoud van 3 wezen; men kan dus dien tweeden factor wederom ontbinden in

$$\frac{1+10^3+10^6}{3}\times\frac{1+10^9+10^{18}+\text{enz.}\ldots+10^{x-9}}{3^{p-4}};$$

op dezelfde wijze voortredenerende, en in het ooghoudende, dat de noemer van (A) $p-2$ malen den factor 3 bevat, blijkt het klaar, dat de breuk (A), om een geheel getal te kunnen zijn, de volgende $p-2$ factoren moet bevatten:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1+10+10^2}{3},\ \frac{1+10^3+10^6}{3},\\ \frac{1+10^9+10^{18}}{3},\ \frac{1+10^{27}+10^{54}}{3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \text{enz. tot}\quad\frac{1+10^{(3^{p-3})}+10^{(2.3^{p-3})}}{3}\end{array}\right\}\ldots\text{(B.)}$$

Zal nu x tevens de kleinste waarde hebben, waarbij de breuk (A) een geheel getal kan blijven, dan moet de teller van die breuk, indien men de factoren (B) er successievelijk uit wegneemt, geheel uitgeput worden; derhalve moet het product der tellers van (B) identiek zijn met den teller van (A), en men verkrijgt alzoo, door de hoogste magt van 10 die in het genoemde product voorkomt gelijk te stellen aan de hoogste magt van 10 in den teller van (A) voorkomende;

$10^2 \times 10^6 \times 10^{18} \times 10^{54} \times$ *enz.* $\ldots \times 10^{(2.3^{p-3})} = 10^{x-1}$,

waaruit terstond volgt

$$2 + 6 + 18 + 54 + \text{enz.} + 2.3^{p-3} = x - 1,$$

$$2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \text{enz.} + 3^{p-3}) = x - 1$$

of, daar $1 + 3 + 3^2 + 3^3 +$ *enz.* $+ 3^{p-3}$ de ontwikkeling der breuk $\dfrac{1 - 3^{p-2}}{1 - 3}$ is,

$$2 \times \frac{1 - 3^{p-2}}{1 - 3} = x - 1,$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$x = 3^{p-2};$$

zijnde hierdoor het gestelde bewezen.

LXXIII. Voorstel.

Door H. van Blanken.

Wanneer men het gebroken $1 : 11^p$ *in eene tiendeelige breuk ontwikkelt, zal het aantal cijfers in het repetendum* $2 \times 11^{p-1}$ *zijn. Men vraagt naar het bewijs?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, L. J. Ulman, H. van Blanken, J. Acquoy, A. Vos, C. F. Julius, M. G. Snoek, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs *en* B. de Jongh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Het aantal cijfers dat in het repetendum voorkomt x noemende, zal, overeenkomstig hetgeen in het voorgaande voorstel is aangetoond, x het kleinste getal moeten zijn, dat $\dfrac{10^x - 1}{11^p}$ tot een geheel getal maakt; blijkens het gewone kenmerk van deelbaarheid door 11, namelijk dat de sommen der cijfers van evenen en onevenen rang een verschil van den vorm 11 a hebben, valt dadelijk in het oog, dat $10^x - 1$ niet door 11

deelbaar kan wezen, ten zij x een even getal zij; stellen wij dus $x = 2y$, dan is, omdat $10^{2y} - 1$ ontbonden kan worden in de factoren

$$(10+1)(10-1)(10^{2y-2}+10^{2y-4}+enz.+10^4+10^2+1)$$

$$\frac{10^x-1}{11^p} = \frac{9(1+10^2+10^4+enz...+10^{2y-4}+10^{2y-2})}{11^{p-1}} (A);$$

zal nu de teller der laatste breuk door 11 deelbaar zijn, dan moet, blijkens het reeds genoemde kenmerk van deelbaarheid door 11, het aantal termen van dien teller een veelvoud van 11 zijn, en men kan dus de breuk (A) ontbinden in de factoren

$$9 \times \frac{1+10^2+10^4+enz.+10^{20}}{11} \times \frac{1+10^{22}+10^{44}+enz.+10^{2y-22}}{11^{p-2}}.$$

Zet men nu deze redenering, op gelijke wijze als in de oplossing van het voorgaande voorstel, voort, dan blijkt het dat de breuk (A) om een geheel getal te kunnen zijn, behalve den factor 9, de volgende $p-1$ factoren moeten bevatten:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1+10^2+10^4+enz....+10^{20}}{11}, \\ \dfrac{1+10^{22}+10^{44}+enz..+10^{220}}{11}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{enz. tot} \\ \dfrac{1+10^{(2.11^{p-2})}+10^{(4.11^{p-2})}+enz.+10^{(20.11^{p-2})}}{11} \end{array}\right\}(B).$$

Opdat nu tevens x en dus ook y de kleinste waarde zal hebben, die (A) een geheel getal laat blijven, moet de teller der breuk (A), door successievelijk de factoren (B) er uit weg te nemen, geheel uitgeput worden; zoo dat er alleen den factor 9 overblijve; het product der tellers van (B) moet dus identiek zijn met den veelledigen factor des tellers van (A), zoodat wij door gelijkstelling der hoogste magt van 10, die in deze identieke uitdrukkingen voorkomt, verkrijgen

$$10^{20} \times 10^{220} \times 10^{2420} \times enz... \times 10^{(20.11^{p-2})} = 10^{2y-2},$$

waaruit terstond volgt

$$20+220+2420+enz....+20.11^{p-2} = 2y-2,$$

$$10(1+11+11^2+enz....+11^{p-2}) = y-2,$$

of, dewijl $1 + 11 + 11^2 + enz.... + 11^{p-2}$ de ontwikkeling is van het gebroken $\frac{1-11^{p-1}}{1-11}$,

$$10 \times \frac{1-11^{p-1}}{1-11} = y - 1,$$

waaruit men dadelijk vindt

$$y = 11^{p-1},$$

zoodat dan $x = 2.11^{p-1}$

is; zijnde hierdoor het gestelde bewezen.

LXXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar eene breuk, die eene volkomene derde magt is en de eigenschap heeft, dat, als men den teller met 1 *vermeerdert er eene breuk komt, die gelijk is:* 1°. *aan de helft van den derde-magtswortel uit de gevraagde breuk; en* 2°. *aan de breuk die er komt als men den teller van dien derde-magtswortel met* 1 *vermindert?*

Opgelost *door* M. de Leon, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, J. Bassan, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, L. J. Ulman, A. Vos, E. Boas, C. van Schaick *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* M. de Leon.

Stellen wij de breuk door $\frac{x^3}{y^3}$ voor, dan is aan de eerste voorwaarde des voorstels voldaan, terwijl de overige voorwaarden geven

$$\frac{x^3+1}{y^3} = \frac{x}{2y} = \frac{x-1}{y};$$

uit
$$\frac{x}{2y} = \frac{x-1}{y},$$

volgt terstond
$$xy = 2xy - 2y,$$
$$2y = xy$$

en dus, daar y niet gelijk aan nul kan zijn,

$$x = 2;$$

stelt men deze waarde van x in

$$\frac{x^3+1}{y^3}=\frac{x}{2y},$$

dan komt er $$\frac{9}{y^3}=\frac{1}{y}$$

of $$y^2=9$$

en $$y=3;$$

de begeerde breuk is dus $$\frac{x^3}{y^3}=\frac{8}{27}.$$

LXXV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar eene breuk, die een volkomen vierkant is, zoodanig, dat als men in de breuk en in haren wortel, of de tellers met 1 *verhoogt, of de noemers met* 1 *vermindert, in beide gevallen de veranderde breuk de helft zij van haren veranderden wortel?*

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, J. Bassan, E. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoek, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de breuk zijn $\frac{x^2}{y^2}$, dan is volgens de opgave

$$\frac{2(x^2+1)}{y^2}=\frac{x+1}{y}$$

en $$\frac{2x^2}{y^2-1}=\frac{x}{y-1};$$

uit de eerste vergelijking vindt men, na vermenigvuldiging met y

$$y=\frac{2(x^2+1)}{x+1},$$

uit de tweede vindt men, na vermenigvuldiging met $y-1$ en deeling door x,

$$y=2x-1,$$

dus is $$\frac{2(x^2+1)}{x+1}=2x-1$$

of $$2x^2 + 2 = 2x^2 + x - 1,$$
waaruit volgt $$x = 3,$$
derhalve is $$y = 2x - 1 = 5;$$
en bijgevolg bekomen wij voor de gevraagde breuk $\frac{x^2}{y^2} = \frac{9}{25}$.

LXXVI. Voorstel.

Door M. G. Snoer.

Men vraagt eene formule voor de som van n *termen der reeks* $\frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{10}{8} + \frac{15}{16} +$, *enz. waarin de tellers der breuken de driehoekige getallen zijn, terwijl de noemers de opklimmende magten zijn van het getal 2?*

Opgelost door F. C. Radijs, D. van Lankeren Matthes, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, H. Kloos, M. G. Snoer, L. J. Ulman, A. Vos, B. de Jongh en H. van Assendelft de Coningh.

Oplossing *van* F. C. Radijs.

Indien wij de som van n termen dezer reeks door S voorstellen en gemakshalve a in plaats van $\frac{1}{2}$ schrijven, hebben wij klaarblijkelijk

$$S = 1 + 3a + 6a^2 + enz. \ldots + \tfrac{1}{2}(n-1)n\, a^{n-2} + \tfrac{1}{2}n\,(n+1)\, a^{n-1};$$

vermenigvuldigen wij deze vergelijking met $1 - a$, dan komt er

$$(1 - a)\, S = 1 + 2a + 3a^2 + enz. \ldots + (n-1)a^{n-2} + n\, a^{n-1} - \tfrac{1}{2}n\,(n+1)\, a^n;$$

deze vergelijking nogmaals met $1 - a$ vermenigvuldigende, verkrijgen wij

$$(1-a)^2\, S = 1 + a + a^2 + enz. \ldots + a^{n-2} + a^{n-1} - \tfrac{1}{2}n\,(n+3)\, a^n + \tfrac{1}{2}n\,(n+1)\, a^{n+1},$$

maar zoo als men algemeen weet is

$$1 + a + a^2 + enz. \ldots + a^{n-2} + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a},$$

derhalve is ook

$$(1-a)^2 S = \frac{1 - a^n}{1 - a} - \tfrac{1}{2} n (n+3) a^n + \tfrac{1}{2} n (n+1) a^{n+1},$$

waaruit, na behoorlijke herleiding, gevonden wordt

$$S = \frac{1 - \frac{1}{2}(n+1)(n+2)a^n + n(n+2)a^{n+1} - \frac{1}{2}n(n+1)a^{n+2}}{(1-a)^3} \text{ (A)};$$

substitueert men hierin voor a deszelfs waarde $\frac{1}{2}$, dan komt er na herleiding

$$S = 8 - \frac{n^2 + 5n + 8}{2^n},$$

waardoor de begeerde som gevonden is.

Aanmerkingen. 1°. Indien men n grooter laat worden, wordt de tweede term der gevondene waarde voor S kleiner, tot dat voor $n = \infty$, $\frac{n^2 + 5n + 8}{2^n} = 0$ wordt; hoe meer termen men dus van de opgegevene reeks neemt, hoe nader derzelver som bij het getal 8 zal komen, zonder ooit grooter dan 8 te kunnen worden; terwijl de som der oneindig voortloopende reeks juist 8 is.

2°. Door de formule (A) is eigenlijk de som gevonden van de n eerste termen eener reeks, die ontstaat wanneer men de overeenkomstige termen der reeksen

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ enz.$$

en

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ enz.$$

met elkander vermenigvuldigt; door alzoo aan a andere waarden dan $\frac{1}{2}$ te geven, zal men de sommen van een aantal andere reeksen kunnen vinden. Neemt men, bij voorbeeld, $a = 2$, zoo is de reeks:

$$1,\ 3 \times 2,\ 6 \times 4,\ 10 \times 8,\ 15 \times 16,\ enz.,$$

en voor de som van derzelver n eerste termen, vindt men door in de formule (A) $a = 2$ te nemen

$$S = (n^2 - n + 2)\, 2^{n-1} - 1.$$

Neemt men $a = \frac{1}{4}$, zoo is de reeks:

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{6}{16},\ \frac{10}{64},\ \frac{15}{256},\ enz.,$$

werdende wederom de som van n termen gevonden, door in (A) $a = \frac{1}{4}$ te nemen, als wanneer men verkrijgt

$$S = \frac{1}{27}\left\{64 - \frac{9n^2 + 33n + 32}{2^{2n-1}}\right\}.$$

3°. Voor $a = 1$ zoude de formule (A) onbruikbaar worden, daar men in dat geval zou vinden $S = \frac{0}{0}$; daar echter voor $a = 1$ de reeks eenvoudig uit de opvolgende driehoekige getallen bestaan zou, weet men van elders, dat in dat geval zijn zou

$$S = \frac{1}{6}n\,(n+1)\,(n+2).$$

LXXVII. Voorstel.

Door J. Acquoy.

Men verlangt de betrekking, tusschen de zijden van eenen regthoekigen driehoek, zoodanig te bepalen, dat, wanneer men uit den regten hoek eene loodlijn op de schuinsche zijde nederlaat, uit het voetpunt dezer loodlijn wederom eene loodlijn op eene der regthoekszijden trekt, uit het voetpunt dezer loodlijn weder eene loodlijn op de schuinsche zijde laat vallen, en zoo tot in het oneindige voortgaat, de som van alle deze loodlijnen gelijk zij aan n *malen den omtrek van den regthoekigen driehoek?*

Opgelost *door* J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Boltek, B. de Jongh, C. F. Julius, F. C. Radijs, H. A. van der Speck Obreen, L. J. Ulman, A. Vos, M. L. Goede *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Zij ABC (Fig. 38) een regthoekige driehoek, regthoekig in C, en stelle men deszelfs zijden $AB = x$, $AC = y$ en $BC = z$; laten voorts CD, DE, EF, FG, enz. de bedoelde loodlijnen zijn en stelle men derzelver som door S voor. Nu blijkt uit de figuur terstond, dat de driehoeken ABC, CBD, DCE, EDF, FEG, enz. alle gelijkvormig zijn, waaruit de volgende aaneengeschakelde evenredigheid voortvloeit

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{CD} = \frac{DC}{DE} = \frac{ED}{EF} = \frac{FE}{FG} = enz.;$$

volgens eene bekende eigenschap der aaneengeschakelde evenredigheden is dus ook

$$\frac{AB + CB + DC + ED + FE + \textit{enz.}}{AC + CD + DE + EF + FG + \textit{enz.}} = \frac{AB}{AC},$$

waarvoor wij door de aangenomene stellingen kunnen schrijven

$$\frac{x + z + S}{y + S} = \frac{x}{y};$$

hieruit S afzonderende, verkrijgen wij

$$S = \frac{yz}{x - y},$$

en daar deze som der loodlijnen gelijk moet zijn aan n malen den omtrek des driehoeks, hebben wij de vergelijking

$$\frac{yz}{x-y} = n\,(x + y + z) \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1),$$

terwijl ook nog $x^2 = y^2 + z^2$ . . . . . . (2)

is. Uit (1) volgt $yz = n(x^2 - y^2) + nz\,(x - y)$

of, omdat $x^2 - y^2 = z^2$ is,

$$yz = nz^2 + nz\,(x - y)$$

en

$$y = nz + nx - ny,$$

waaruit volgt

$$x + z = \frac{n+1}{n}\,y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (3);$$

deelende nu deze vergelijking in $x^2 - z^2 = y^2$, zoo vindt men

$$x - z = \frac{n}{n+1}\,y \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (4);$$

en alsnu de halve som en het halve verschil van (3) en (4) nemende, verkrijgt men

$$x = \frac{2n^2 + 2n + 1}{2n\,(n+1)}\,y \quad \text{en} \quad z = \frac{2n+1}{2n\,(n+1)}\,y$$

of

$$\frac{x}{y} = \frac{2n^2 + 2n + 1}{2n\,(n+1)} \quad \text{en} \quad \frac{y}{z} = \frac{2n\,(n+1)}{2n+1};$$

stelt men dus $x = (2n^2 + 2n + 1)\,P$,

dan is $y = 2n\,(n+1)\,P$

en $z = (2n+1)\,P$,

waardoor de gevraagde betrekking gevonden is; neemt men $n = 1$ dan is

$$x = 5\,P,\quad y = 4\,P \quad \text{en} \quad z = 3\,P.$$

Aanmerking. Indien men bij de opgaaf bepaald had, op welke van beide de regthoekszijden de loodlijnen moesten

nedergelaten worden, zoude het getal n niet geheel willekeurig genomen kunnen worden; moesten de loodlijnen op de langste regthoekszijde vallen, dan moest $AC > BC$, dus $2n(n+1)P > (2n+1)P$, $2n^2 > 1$ en $n > \frac{1}{2}\sqrt{2}$ zijn; moesten de loodlijnen op de kortste regthoekszijde vallen, dan zoude $n < \frac{1}{2}\sqrt{2}$ moeten gegeven zijn. Wil men echter onbepaald laten of de loodlijnen op de langste of kortste regthoekszijde moeten getrokken worden, dan kan het getal n geheel willekeurig worden genomen, maar dan zal men, naar gelang $n >$ of $< \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is, de loodlijnen op de langste of kortste regthoekszijde moeten trekken, terwijl voor $n = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $AC = BC$ en dus de driehoek gelijkbeenig is, zoodat dan de loodlijnen onverschillig op de eene of andere regthoekszijde kunnen nedergelaten worden.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door J. ACQUOY.

Eenen driehoek te berekenen en te construeren, als gegeven zijn: de bazis, de hoogte en de betrekking der opstaande zijden?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, A. VOS, M. L. GOEDE, J. G. W. MERKES, B. DE JONGH, M. DE LEON *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Zij ABC (Fig. 39) de begeerde driehoek, waarin gegeven is de bazis $AB = a$, de hoogte $CD = h$ en de betrekking der opstaande zijden $AC : BC = p : q$; onderstellen wij dan, dat de bazis AB in O zoodanig verdeeld is, dat $AO : BO = p : q$ zij, zoo is

$$AO = \frac{p}{p+q}a \text{ en } BO = \frac{q}{p+q}a.$$

Nemen wij verder de onbepaalde lijn XX', waarin de bazis AB gelegen is, als as der abscissen en de lijn YY', snijdende XX' regthoekig in O, als as der ordinaten aan, dan zijn de coördinaten der hoekpunten A, B en C alle gegeven, met uitzondering slechts der abscis OD van het hoekpunt C;

stellen wij om dezelve te bepalen OD $= x$, dan hebben wij uit de regthoekige driehoeken ADC en BDC,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 = \left(\frac{p}{p+q}a + x\right)^2 + h^2 \;..\; (1)$$

$$\text{en } BC^2 = BD^2 + CD^2 = \left(\frac{q}{p+q}a - x\right)^2 + h^2 \;..\; (2),$$

waaruit, omdat AC : BC $= p : q$ of $AC^2 : BC^2 = p^2 : q^2$ is, volgt

$$q^2\left(\frac{p}{p+q}a + x\right)^2 + q^2h^2 = p^2\left(\frac{q}{p+q}a - x\right)^2 + p^2h^2,$$

welke vergelijking door ontwikkeling en rangschikking der termen, verandert in

$$x^2 - \frac{2pq}{p^2-q^2}ax + h^2 = 0 \;......\; (3),$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$x = \frac{pq}{p^2-q^2}a \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2 - h^2\right\}} \;....\; (4);$$

door deze waarde van x in (1) en (2) over te brengen, verkrijgt men

$$AC = \pm\frac{p}{p^2-q^2}\sqrt{\left\{(p^2+q^2)a^2 \pm 2a\sqrt{(p^2q^2a^2-(p^2-q^2)^2h^2)}\right\}} \; (5)$$

en

$$BC = \pm\frac{q}{p^2-q^2}\sqrt{\left\{(p^2+q^2)a^2 \pm 2a\sqrt{(p^2q^2a^2-(p^2-q^2)^2h^2)}\right\}} \; (6),$$

zoodat nu alle drie de zijden des driehoeks bekend zijn, en het voorstel derhalve door berekening is opgelost.

De gegevene oplossing hebben wij daarom verkozen, omdat zij zeer geschikt is, om er van elders bekende meetkunstige waarheden analytisch uit af te leiden, en hierdoor eene geschikte oplossing door constructie voor ons voorstel te vinden.

Beschouwt men in de vergelijking (3) de waarde van h als veranderlijk, dan bevat deze vergelijking de betrekking tusschen de coördinaten van het alsdan onbepaalde punt C; zij zal dus de meetkunstige plaats aanwijzen van al de punten, wier afstanden tot de uiteinden eener gegevene lijn AB $= a$ in reden zijn als $p : q$. Die vergelijking (3) is nu (zie J. R. SCHMIDT, *Hoogere Meetk.*, 1e dr. § 45) de ver-

gelijking van eenen cirkel, van welken de straal en de abscis van het middelpunt $\frac{pq}{p^2-q^2}a$ en de ordinaat van het middelpunt O is; onderstellen wij dus het punt M in de lijn XX' zoodanig genomen te zijn, dat OM $= \frac{pq}{p^2-q^2}a$ is, en beschrijven wij uit M als middelpunt met OM als straal eenen cirkel, dan zal deszelfs omtrek de genoemde meetkunstige plaats zijn. Ten aanzien van de beide punten O en E, waar deze cirkel den as XX' snijdt, moet dus zoo wel AE : BE $= p : q$ als AO : BO $= p : q$ zijn, en daar de afstand van die punten de middellijn van den cirkel is, zoo besluiten wij dat:

Als men in eene gegevene lijn AB *en in haar verlengde twee punten* O *en* E *zoodanig neemt, dat* AO : BO = p : q *en* AE : BE = p : q *is, dan zal de omtrek des cirkels, op* OE *als middellijn beschreven, de meetkunstige plaats zijn van al de punten, wier afstanden tot de uiteinden* A *en* B *der lijn* AB *in reden zijn, als* p : q.

Hierdoor hebben wij dan voor ons voorstel de volgende constructie:

Men neme op eene onbepaalde lijn XX' een stuk AB $= a$ en de punten O en E zoodanig dat AO : BO $= p : q$ en AE : BE $= p : q$ zij (*); men beschrijve op OE als middellijn eenen cirkel en trekke de lijnen RS en R'S' op eenen afstand h evenwijdig met XX', dan zullen de punten C, C', C'', C''', in welke de omtrek des cirkels door de lijnen RS en R'S' gesneden wordt, de toppunten van vier driehoeken zijn, die alle aan het gevraagde voldoen, doch van welke de driehoeken ABC en ABC'', alsmede ABC' en ABC''' in alles overeenkomen, behalve dat hun stand ten opzigte van de lijn AB verschillend is. Het bestaan van deze vier driehoeken was uit de vier verschillende waarden, welke wij in (5) en (6) voor AC en BC vonden, duidelijk op te maken.

(*) Zie de 4de Aanmerking.

AANMERKINGEN. 1°. Uit de voor x gevondene waarde (4) ziet men, dat de gevraagde driehoek onbestaanbaar zal zijn, indien $h > \frac{pq}{p^2-q^2}a$ is; daar nu $\frac{pq}{p^2-q^2}a$ de waarde, van den straal OM is, zoo blijkt de onbestaanbaarheid des driehoeks in dit geval evenzeer uit de constructie, want het is toch klaar dat tot derzelver mogelijkheid vereischt wordt, dat de lijnen RS en R′S′ ten minste één punt met den cirkel gemeen hebben. Is $h = \frac{pq}{p^2-q^2}a$ of de hoogte des driehoeks gelijk aan den straal OM, dan is de hoogte en bijgevolg ook de inhoud van den driehoek zoo groot mogelijk, en wij zien dus hierdoor het voorstel opgelost, om:

Op eene gegevene lijn als basis eenen driehoek te beschrijven, zoodanig dat de betrekking der opstaande zijden als p *tot* q, *en dat de inhoud een maximum zij.*

2°. De begeerde driehoek zal klaarblijkelijk stomphoekig, regthoekig, of scherphoekig in B zijn, naar gelang x grooter, gelijk, of kleiner dan OB is; gebruikt men nu in de waarde van x het bovenste teeken, dan is

$$x = OD' = \frac{pq}{p^2-q^2}a + \sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2 - h^2\right\}},$$

terwijl $$OB = \frac{q}{p+q}a = \frac{pq-q^2}{p^2-q^2}a$$

is; in dit geval is dus altijd $x > OB$, derhalve zullen de driehoeken ABC′ en ABC‴ altijd stomphoekig in B wezen.

Gebruikt men in de waarde van x het benedenste teeken, dan is

$$x = OD = \frac{pq}{p^2-q^2}a - \sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2 - h^2\right\}}$$

en nu zal x grooter, gelijk of kleiner dan OB wezen, naar gelang men heeft

$$\frac{pq}{p^2-q^2}a-\sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2-h^2\right\}} > = \text{ of } > \frac{pq-q^2}{p^2-q^2}a,$$

$$-\sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2-h^2\right\}} > = \text{ of } < -\frac{q^2}{p^2-q^2}a,$$

$$\sqrt{\left\{\left(\frac{pq}{p^2-q^2}a\right)^2-h^2\right\}} < = \text{ of } > \frac{q^2}{p^2-q^2}a,$$

$$\frac{p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}a^2-h^2 < = \text{ of } > \frac{q^4}{(p^2-q^2)^2}a^2,$$

$$-h^2 < = \text{ of } > \frac{q^4-p^2q^2}{(p^2-q^2)^2}a^2,$$

$$h^2 > = \text{ of } < \frac{p^2q^2-q^4}{(p^2-q^2)^2}a^2,$$

$$h^2 > = \text{ of } < \frac{q^2}{p^2-q^2}a^2,$$

of eindelijk $$h > = \text{ of } < \frac{q}{\sqrt{(p^2-q^2)}}a;$$

de driehoeken ABC en ABC″ zullen dus in B stomp-, regt- of scherphoekig zijn, naar gelang $h > = \text{ of } < \frac{q}{\sqrt{(p^2-q^2)}}a$ is.

3°. Wij hebben tot hiertoe ondersteld dat $p > q$ was en, daar alsdan $\frac{pq}{p^2-q^2}a$ positief is, het punt M ter regterzijde van O genomen. Is echter $p < q$, dan zal $\frac{pq}{p^2-q^2}a$ negatief zijn en het punt M zal dus in dat geval ter linkerzijde van O genomen moeten worden, terwijl dan alles, wat wij tot nu toe ter regterzijde van O hebben opgemerkt, op dezelfde wijs ter linkerzijde van O zal plaats vinden. Is $p = q$, dan is $\frac{pq}{p^2-q^2}a = \infty$, hetgeen aantoont, dat men alsdan het punt M in de as XX′ op een oneindig verren afstand van O zal moeten nemen, waardoor de cirkel, die de meetkunstige plaats van het punt C is, overgaat in de regte lijn YY′; daar nu in de onderstelling van $p = q$ ook AC = BC en AO = BO is, zoo zien wij hieruit, dat:

de meetkunstige plaats van alle punten, die even ver van de uiteinden eener regte lijn verwijderd zijn, eene andere regte lijn is, die regthoekig door het midden van de eerste gaat.

4°. Daar elke hoek ACB, welks hoekpunt C in den

cirkel omtrek OCC'E ligt, door de lijn CO wordt midden door gedeeld, terwijl de lijn CE met CO eenen regten hoek maakt, kan men om de punten O en E te vinden, ook den volgenden weg inslaan. Men beschrijve op AB eenen overigens willekeurigen driehoek ABC, waarvan de zijden AC en BC in reden als p tot q zijn; men deele den hoek ACB midden door, door eene lijn CO, en stelle uit C eene lijn CE regthoekig op CO, dan zullen de lijnen CO en CE de lijn AB en haar verlengde in de begeerde punten O en E snijden.

LXXIX. Voorstel.

Door Mr. G. W. de Bruijn Kops.

Men begeert zonder worteltrekking drie getallen te vinden, zoodanig: dat de som hunner vierkanten gelijk zij aan de som van vijfmaal het eerste en derde en driemaal het tweede; dat de som der beide eerste gelijk zij aan tweemaal het derde; en dat de som der beide laatste gelijk zij aan driemaal het eerste?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, J. G. W. Merkes, J. Bassan, C. J. Bolten, Mr. G. W. de Bruijn Kops, C. Brunings, W. G. van Delden, M. L. Goede, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoer, A. Vos *en* B. de Jongh.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stellen wij voor de getallen x, y en z, dan hebben wij volgens de opgave

$$x^2 + y^2 + z^2 = 5x + 3y + 5z,$$

$$x + y = 2z$$

en

$$y + z = 3x;$$

uit de beide laatste vergelijkingen volgt terstond

$$y = 2z - x \quad \text{en} \quad y = 3x - z,$$

derhalve is

$$2z - x = 3x - z$$

of

$$3z = 4x$$

en

$$z = \frac{4}{3}x,$$

waardoor

$$y = \frac{5}{3}x$$

gevonden wordt.

Stellen wij nu $x = 3p$, dan is $y = 5p$ en $z = 4p$, waardoor de eerste vergelijking verandert in

$$9p^2 + 25p^2 + 16p^2 = 15p + 15p + 20p,$$

dat is:

$$50p^2 = 50p$$

of

$$p^2 = p,$$

waaruit volgt $p = 0$ of $p = 1$; alleen de laatste waarde van p kunnende dienen om eigenlijke getallen te verkrijgen, zoo hebben wij dienvolgens

$$x = 3,\quad y = 5 \text{ en } z = 4.$$

LXXX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De waarde te vinden van

$$x = \frac{a^2 + 4ab + b^2 - ac - bc}{2(a+b-c)} \pm \sqrt{\left\{\frac{(a^2 + 4ab + b^2 - ac - bc)^2}{4(a+b-c)^2} - \frac{2a^2b + 2ab^2}{a+b-c}\right\}}$$

ingevalle $a + b - c = 0$ *is?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, C. BRUNINGS, L. J. ULMAN, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, W. G. VAN DELDEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Voor de opgegevene uitdrukking kunnen wij schrijven

$$x = \frac{(a+b)(a+b-c) + 2ab}{2(a+b-c)} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{(a+b)(a+b-c) + 2ab}{2(a+b-c)}\right)^2 - \frac{2ab(a+b)}{a+b-c}\right\}},$$

of ook

$$x = \tfrac{1}{2}\left\{(a+b) + \frac{2ab}{a+b-c}\right\} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\left((a+b) + \frac{2ab}{a+b-c}\right)^2 - 4(a+b)\cdot\frac{2ab}{a+b-c}\right\}};$$

stellen wij nu

$$a + b = p \text{ en } \frac{2ab}{a+b-c} = q,$$

dan verandert de uitdrukking in

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\{(p+q)^2 - 4pq\}},$$

of, daar de grootheid onder het wortelteeken blijkbaar een volkomen vierkant is, in

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) \pm \tfrac{1}{2}(p-q).$$

Onafhankelijk van eenigerlei betrekking tusschen a, b en c, heeft men dus voor x de twee waarden

$$x = p = a + b \text{ en } x = q = \frac{2ab}{a+b-c};$$

en stelt men nu hierin $a + b - c = 0$ of $a + b = c$, dan verkrijgt men, voor de begeerde waarden van x,

$$x = c \text{ en } x = \infty.$$

LXXXI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men begeert de waarde van ϕ *te vinden, uit de vergelijking*
$1 + 3\,Sin.\,\phi + 5\,Sin.^2\phi + 7\,Sin.^3\phi + 9\,Sin.^4\phi + enz. = a?$

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, M. DE LEON, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, H. A. VAN DER SPECK OBREEN, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

Indien men de opgegevene vergelijking vermenigvuldigt met $1 - Sin.\,\phi$, verandert zij in

$$1 + 2Sin.\phi + 2Sin.^2\phi + 2Sin.^3\phi + 2Sin.^4\phi + enz. = a(1 - Sin.\phi);$$

deze vergelijking nogmaals met $1 - Sin.\,\phi$ vermenigvuldigende, verkrijgt men

$$1 + Sin.\,\phi = a\,(1 - Sin.\,\phi)^2,$$

welke vergelijking nu door herleiding achtervolgens verandert in

$$1 + Sin.\,\phi = a - 2a\,Sin.\,\phi + a\,Sin.^2\phi,$$

$$a\,Sin.^2\phi - (2a+1)\,Sin.\,\phi = 1 - a,$$

$$Sin.^2\phi - \frac{2a+1}{a}\,Sin.\,\phi = \frac{1-a}{a},$$

waaruit men vindt

$$Sin.\ \phi = \frac{2a+1}{2a} \pm \sqrt{\left\{\frac{(2a+1)^2}{4a^2} + \frac{1-a}{a}\right\}}$$

$$= \frac{2a+1 \pm \sqrt{(8a+1)}}{2a}.$$

LXXXII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men den tophoek van eenen driehoek in drie gelijke deelen verdeelt, wordt door die deellijnen de driehoek zelve verdeeld in drie kleinere driehoeken; indien nu gegeven zijn de stralen der cirkels, om laatstgenoemde driehoeken beschreven, vraagt men, den oorspronkelijken driehoek, zoo wel door constructie als door berekening te bepalen?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. BASSAN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, H. A. VAN DER SPECK OBREEN, L. J. ULMAN, A. VOS, M. DE LEON en D. VAN LANKEREN MATTHES.

I. OPLOSSING *door berekening, van* J. ACQUOY.

Zij ABC (Fig. 40) de begeerde driehoek waarin de lijnen CD en CE den hoek C in drie gelijke deelen verdeelen; laten voorts de stralen der cirkels om de driehoeken ACD, DCE en ECB beschreven, respectievelijk gelijk r, r' en r'' gegeven zijn en stellen wij *hoek* ACD = *hoek* DCE = *hoek* ECB = ϕ, dan is, volgens eene bekende formule,

$$AD = 2r\ Sin.\ \phi,\quad DE = 2r'\ Sin.\ \phi \quad en \quad EB = 2r''\ Sin.\ \phi.$$

In de driehoeken ACE en DCB worden de tophoeken ACE en DCB door de lijnen CD en CE midden doorgedeeld, men heeft derhalve de evenredigheden:

$$AC : CE = AD : DE = 2r\ Sin.\ \phi : 2r'\ Sin.\ \phi = r : r'$$

$$en \quad CD : BC = DE : EB = 2r'\ Sin.\ \phi : 2r''\ Sin.\ \phi = r' : r'';$$

stellen wij dus

$$AC = r\,x \quad en \quad CD = r'y$$

dan is

$$CE = r'x \quad en \quad BC = r''y.$$

Uit de figuur volgt verder:

Inh. drieh. ACE = *Inh. drieh.* ACD + *Inh. drieh.* DCE
en *Inh. drieh.* DCB = *Inh. drieh.* BCE + *Inh. drieh.* DCE,
waaruit wij, omdat de inhoud van eenen driehoek gelijk is

aan het halve product van twee zijden, vermenigvuldigd met de sinus van den ingesloten hoek, de volgende vergelijkingen verkrijgen:

$$r r' x^2 \, Sin. 2\phi = r r' xy \, Sin. \phi + r'^2 xy \, Sin. \phi \quad . \; . \; . \; (1)$$

en $$r' r'' y^2 \, Sin. 2\phi = r' r'' xy \, Sin. \phi + r'^2 xy \, Sin. \phi \quad . \; . \; . \; (2);$$

deelen wij nu (1) door $r'x$ *Sin.* ϕ en (2) door $r'y$ *Sin.* ϕ, daarbij opmerkende dat *Sin.* $2\phi = 2$ *Sin.* ϕ *Cos.* ϕ is, dan verkrijgen wij

$$2r x \, Cos. \phi = ry + r'y \text{ of } \frac{x}{y} = \frac{r + r'}{2r \, Cos. \phi} \quad . \; . \; . \; (3)$$

en $$2r'' y \, Cos. \phi = r'' x + r' x \text{ of } \frac{y}{x} = \frac{r' + r''}{2r'' \, Cos. \phi} \quad . \; . \; . \; (4);$$

en alsnu het product der vergelijkingen (3) en (4) nemende, komt er

$$1 = \frac{(r + r')(r' + r'')}{4rr'' \, Cos.^2 \phi},$$

waaruit terstond volgt

$$Cos.^2 \phi = \frac{(r + r')(r' + r'')}{4rr''} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

of $$Cos. \phi = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(r + r')(r' + r'')}{rr''}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

komende voor deze waarde van *Cos.* ϕ geen dubbel teeken te pas, alzoo *hoek* ACB $< 180°$, dus $\phi < 60°$ en bijgevolg *Cos.* ϕ positief moet wezen.

Uit (5) volgt

$$Sin.^2 \phi = 1 - Cos.^2 \phi = 1 - \frac{(r + r')(r' + r'')}{4rr''} = \frac{4rr'' - (+rr')(r' + r'')}{4rr''}$$

en derhalve is

$$Sin. \phi = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{4rr'' - (r + r')(r' + r'')}{rr''}} = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{3rr'' - r'(r + r' + r'')}{rr''}} \; (7);$$

daar nu

$$AB = AD + DE + EB = 2(r + r' + r'') \, Sin. \phi$$

is, zoo heeft men, door hierin voor *Sin.* ϕ de waarde (7) over te brengen,

$$AB = (r + r' + r'') \sqrt{\frac{4rr'' - (r + r')(r' + r'')}{rr''}}$$

of ook

$$AB = (r + r' + r'') \sqrt{\frac{3rr'' - r'(r + r' + r'')}{rr''}}.$$

Door eindelijk voor *Cos.* ϕ de waarde (6) over te brengen in (3), verkrijgt men na behoorlijke herleiding

$$\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{r''(r+r')}{r(r''+r')}},$$

derhalve is

$$\frac{AC}{BC} = \frac{rx}{r''y} = \frac{r}{r''}\sqrt{\frac{r''(r+r')}{r(r''+r')}} = \sqrt{\frac{r(r+r')}{r''(r''+r')}};$$

hierdoor is dan nu in den gevraagden driehoek de bazis, de tophoek en de betrekking der opstaande zijden bepaald en wij hebben dus het voorstel terug gebragt tot een ander, dat meermalen is opgelost.

Begeert men echter de zijden AC en BC in ϕ en de gegevens uit te drukken, dan trekke men uit den driehoek ACE de vergelijking

$$(AD + DE)^2 = AC^2 + CE^2 - 2\,AC \times CE \times Cos.\,2\phi$$

of $(2\,r\,Sin.\,\phi + 2\,r'\,Sin.\,\phi)^2 = r^2\,x^2 + r'^2 x^2 - 2\,rr'\,x^2\,Cos.\,2\phi$, waaruit onmiddelijk gevonden wordt

$$x = \frac{2(r+r')\,Sin.\,\phi}{\sqrt{(r^2 - 2rr'\,Cos.\,2\phi + r'^2)}};$$

uit den driehoek BCD zal men even zoo vinden

$$y = \frac{2(r''+r')\,Sin.\,\phi}{\sqrt{(r''^2 - 2\,r''r'\,Cos.\,2\phi + r'^2)}};$$

waardoor men dan heeft

$$AC = rx = \frac{2\,r(r+r')\,Sin.\,\phi}{\sqrt{(r^2 - 2\,rr'\,Cos.\,2\phi + r'^2)}}$$

en $$BC = r''y = \frac{2\,r''(r''+r')\,Sin.\,\phi}{\sqrt{(r''^2 - 2r''r'\,Cos.\,2\phi + r'^2)}}.$$

Aanmerking. Ter bepaling van de voorwaarden waaraan de gegevens moeten voldoen, om eene bestaanbare uitkomst te verkrijgen, merken wij op:

1°. dat *Cos.* $\phi < 1$ en dus ook *Cos.* $^2\phi < 1$ moet wezen en 2°. dat $\phi < 60°$, dus ook *Cos.* $\phi > \frac{1}{2}$ en *Cos.* $^2\phi > \frac{1}{4}$ zijn moet; uit de gevondene waarde (5) voor *Cos.* ϕ volgt dan terstond, dat

$$(r+r')\,(r'+r'') < 4\,rr''.$$
$$(r+r')\,(r'+r'') > r\,r''$$

zal moeten gegeven zijn.

II. Oplossing *door Constructie*, van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Uit de gevondene waarde voor *Cos.* ϕ is het zeer gemakkelijk den hoek ϕ zelve te construeren; men neme namelijk eene lijn AP (Fig. 41.), die midden evenredig tusschen $2r$ en $2r''$ is, op dezelve beschrijve men eenen halven cirkel, in dezen halven cirkel plaatse men eene koorde AQ, die midden evenredig tusschen $r + r'$ en $r' + r''$ genomen is, dan zal *hoek* PAQ $= \phi$ wezen; want *hoek* AQP, als in eenen halven cirkel staande, is regt, en bijgevolg

$$Cos.\,PAQ = \frac{AQ}{AP} = \frac{\sqrt{(r+r')(r'+r'')}}{\sqrt{4rr''}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(r+r')(r'+r'')}{rr''}} = Cos.\,\phi.$$

Stelt men dan nu uit A, op AQ eene loodlijn AM $= r$, en beschrijft men uit M, met AM $= r$ als straal, eenen cirkelboog ACD, de lijn AP in D snijdende, dan zal ACD een cirkelsegment zijn, dat den hoek ϕ bevat; derhalve is AD $= 2r\ Sin.\ \phi$, en AD zal dus de bazis kunnen zijn van een der drie deelen, waarin de begeerde driehoek verdeeld is, en waarvan dan de tophoek in den omtrek van den cirkel ACD moet liggen.

Trekt men uit D eene lijn DN $= r'$, evenwijdig met AM, en beschrijft men uit N, met DN $= r'$ als straal, weder eenen cirkelboog DCE, die de lijn AP in E snijdt, dan zal ook DCE een cirkelsegment zijn, dat den hoek ϕ bevat; DE $= 2r'\ Sin.\ \phi$, is dan de bazis van het tweede deel des begeerden driehoeks, en ook zal de tophoek van dat deel zich op den omtrek DCE moeten bevinden.

Het snijpunt C der beide cirkelbogen is derhalve de top des begeerden driehoeks; men trekke derhalve de lijnen AC, DC, EC en make *hoek* ECB $=$ *hoek* DCE $=$ *hoek* ACD $= \phi$, dan zal ABC de begeerde driehoek wezen.

Aanmerking. Het is klaar dat, indien men het middelpunt O van den cirkel, om den driehoek ECB beschreven, met het punt E vereenigt, de lijn OE $= r''$ evenwijdig met ND en MA zal zijn.

LXXXIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Als men in eenen gelijkzijdigen cirkelvormigen kegel eenen bol beschrijft, wordt daardoor die kegel in drie stukken ver-

deeld, namelijk: de bol, een bovenstuk en een benedenstuk: men vraagt naar de verhouding, waarin de inhouden dezer deelen onderling tot elkander en tot den inhoud des geheelen kegels staan?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN, A. VOS *en* B. DE JONGH.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat ABC (Fig. 42) de doorsnede van den kegel met een plat vlak, dat door deszelfs as gaat, voorstellen, dan zal deze doorsnede wegens de gegevene gelijkzijdigheid des kegels een gelijkzijdige driehoek zijn; de doorsnede van het genoemde vlak met den bol, die in den kegel beschreven is, zal een groote cirkel DEF des bols, en tevens de ingeschreven cirkel des driehoeks ABC zijn; de loodlijn CD in den driehoek is tevens de as van den kegel en het middelpunt M van den cirkel DEF, dat tevens het middelpunt van den bol is, ligt op de lijn CD zoodanig, dat MD $= \frac{1}{2}$ MC en dus MD $=$ MG $=$ GC $= \frac{1}{3}$ CD is; verder zal de lijn EF, die de punten E en F, waar de cirkel de opstaande zijden des driehoeks raakt, met elkander vereenigt, de loodlijn CD in H middendoor deelen.

Stellen wij nu de halve zijde des gelijkzijdigen driehoeks

$$AD = BD = BF = CF = AE = CE = a,$$

dan is ook $EF = a$ of $EH = \frac{1}{2}a$;

voorts $CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(4a^2 - a^2)} = a\sqrt{3}$,

$CH = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$,

$MD = GC = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$,

en $GH = CH - CG = \frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$.

De grootte van deze verschillende lijnen kennende, hebben wij dan verder

$$\textit{Inh. Kegel}\ ABC = \tfrac{1}{3}AD^2\pi \times CD = \tfrac{1}{3}a^3\pi\sqrt{3} \quad (1);$$

$$\textit{Inh. Kegel}\ EFC = \tfrac{1}{3}EH^2\pi \times CH = \frac{1}{24}a^3\pi\sqrt{3},$$

$$\textit{Inh. Bolv. Segm.}\ EHFG = \tfrac{1}{6}\pi \times GH(3EH^2 + GH^2) = \frac{5}{216}a^3\pi\sqrt{3},$$

$$\textit{Inh. Bovenst.}\ CEGF = \textit{Inh. Keg.}\ EFC - \textit{Inh. Bolv. Segm}\ EHFG,$$

$$= \frac{1}{24}a^3\pi\sqrt{3} - \frac{5}{216}a^3\pi\sqrt{3} = \frac{1}{54}a^3\pi\sqrt{3} \quad (2);$$

Inh.Bol DEF $= \frac{4}{3}$ MD$^3 \pi = \frac{4}{27} a^3 \pi \sqrt{3}$ . . . . (3);

Inh. Benedenst. $=$ *Inh.Kegel* ABC $-$ *Inh. Bovenst.* $-$ *Inh. Bol*

$$= \frac{1}{3} a^3 \pi \sqrt{3} - \frac{1}{54} a^3 \pi \sqrt{3} - \frac{4}{27} a^3 \pi \sqrt{3} = \frac{9}{54} a^3 \pi \sqrt{3} \; . \; . \; . \; (4);$$

en het blijkt dus uit de waarden (1), (2), (3) en (4), dat wij hebben

Inh. Kegel : *Inh. Benedenst.* : *Inh. Bol* : *Inh. Bovenst.* $=$

$$= \frac{1}{3} a^3 \pi \sqrt{3} : \frac{9}{54} a^3 \pi \sqrt{3} : \frac{4}{27} a^3 \pi \sqrt{3} : \frac{1}{54} a^3 \pi \sqrt{3} =$$

$$= 18 : 9 : 8 : 1.$$

waardoor de gevraagde betrekking gevonden is.

Uit dezelve blijkt dat het benedenstuk de helft van den geheelen kegel is; dat de bol en het bovenstuk te zamen de andere helft uitmaken; en dat de bol achtmaal zoo veel inhoud heeft als het bovenstuk.

LXXXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Als men in eenen gelijkzijdigen cirkelvormigen kegel eenen bol beschrijft, in den overschietenden top weder eenen bol, in den alsdan overblijvenden top nogmaals eenen bol plaatst en daarmede onophoudelijk voortgaat, vraagt men de betrekking te vinden, tusschen den inhoud des kegels en de som der inhouden van alle die bollen?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat DEF, in de figuur bij de vorige oplossing omschreven (Fig. 42), de eerste ingeschrevene bol zijn, indien men dan door het punt G een vlak brengt, loodregt op den as des kegels, en in den daardoor afgesneden kegel A′B′C weder eenen bol beschrijft, is dit de tweede ingeschrevene bol. Nu is de kegel A′B′C met deszelfs ingeschreven bol eene ligchamelijke figuur, die volkomen gelijkvormig is met den kegel ABC en den daarin beschreven bol; de inhouden dezer bollen zijn dus evenredig met de derde magten der gelijkstandige lijnen in deze gelijkvormige figuren voorkomende; en daar de hoogte CG des kegels A′B′C een derde gedeelte is van de hoogte

CD des kegels ABC, staan de inhouden der beide bollen tot elkander in reden als 1 tot $\frac{1}{3^3}$. Tusschen den tweeden en derden bol, moet klaarblijkelijk dezelfde verhouding bestaan, als tusschen den eersten en tweeden; en zoo vervolgens. Indien wij dus de inhouden der opvolgende bollen door B, B_1, B_2, B_3, *enz.* voorstellen, hebben wij

$$B : B_1 = 1 : \frac{1}{3^3} \text{ of } B_1 = \frac{1}{3^3} B,$$

$$B_1 : B_2 = 1 : \frac{1}{3^3} \text{ » } B_2 = \frac{1}{3^3} B_1 = \frac{1}{3^6} B,$$

$$B_2 : B_3 = 1 : \frac{1}{3^3} \text{ » } B_3 = \frac{1}{3^3} B_2 = \frac{1}{3^9} B,$$

enz. *enz.*;

de som van de inhouden der oneindige reeks van bollen in het voorstel bedoeld S noemende, is dus

$$S = B + \frac{1}{3^3} B + \frac{1}{3^6} B + \frac{1}{3^9} B + \textit{enz.}$$

$$= B(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^9} + \textit{enz.});$$

maar nu is de reeks, waarmede B vermenigvuldigd is, juist de ontwikkeling van het gebroken $\frac{1}{1 - \frac{1}{3^3}}$,

wij verkrijgen hierdoor

$$S = \frac{B}{1 - \frac{1}{3^3}} = \frac{27}{26} B.$$

Daar eindelijk blijkens de vorige oplossing

$$\textit{Inh. Kegel } ABC = \frac{1}{3} a^3 \pi \sqrt{3} \text{ en } B = \frac{4}{27} a^3 \pi \sqrt{3}$$

is, hebben wij

$$\textit{Inh. Kegel } ABC : S = \frac{1}{3} a^3 \pi \sqrt{3} : \frac{27}{26} \times \frac{4}{27} a^3 \pi \sqrt{3}$$

of *Inh. Kegel* ABC : S = 13 : 6,

hetwelk de gevraagde betrekking is.

LXXXV. VOORSTEL.

Door F. J. STAMKART.

Van eenen barometer met eenen controleur voorzien, zij gegeven de gedaante der buis, alsmede het soortelijk gewigt van de kwik en van het vocht in den controleur; dan vraagt men, naar de betrekking, tusschen de veranderingen van hoogte van den controleur en van eenen eenvoudigen barometer?

OPGELOST *door* F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* F. J. STAMKART.

Laat ABCDEFG (Fig. 43) de afbeelding der buis zijn, welke bij A gesloten en bij G open is; de ruimte AB is volkomen ledig; BCDE is met kwik gevuld en FE met zeker vocht, bij voorbeeld alkohol, ligter dan kwik. De lucht drukt op de oppervlakte van het vocht bij F; deze drukking, zamen genomen met de drukking van het vocht EF op het oppervlak E, maakt evenwigt met de drukking der kwikkolom BC.

Zij nu HI een horizontaal vlak naar welgevallen, en nemen wij de hoogte boven dit vlak HI:

van het vlak B . . . . x,
van het vlak C en dus ook van het vlak E . . . . x',
van het vlak F . . . . x'';

verder het soortelijk gewigt:

van de kwik . . . . K,
van het vocht FE of de alkohol . . . . A;

stellen wij eindelijk de hoogte eener kwikkolom, die met de drukking van den dampkring evenwigt maakt, of met andere woorden de hoogte van den eenvoudigen barometer, voor door . . . . h;

dan is:

het verschil in hoogte van B en C . . . . . $x-x'$,
het verschil in hoogte van F en E . . . . . $x''-x'$,
de drukking der kwikkolom BC op het vlak C evenredig met . . . . $K(x-x')$,
de drukking der vochtkolom FE op het vlak E evenredig met . . . . $A(x''-x')$
en de drukking van de dampkringslucht op het vlak F evenredig met . . . . Kh;

waaruit dan volgt de vergelijking

$$K(x - x') = Kh + A(x'' - x) \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Indien het nu gebeurt dat de drukking der lucht grooter wordt, dan is het duidelijk, dat de vlakken F en E zullen moeten dalen en het vlak B rijzen, tot dat het evenwigt hersteld zal wezen; stellen wij dat, ten gevolge van eene oneindig kleine vermeerdering van de drukking des dampkrings, de verplaatsing der vlakken B, E en F, naar b, e en f, mede oneindig klein zij, dan kunnen wij de vermeerdering van hoogte des eenvoudigen barometers door δh voorstellen, waardoor $Bb = \delta x$, $Ee = -\delta x'$ en $Ff = -\delta x''$ zal zijn.

Laten verder de inhouden, van de binnenste doorsneden der buis bij B, E en F, respectievelijk door α, α' en α'' voorgesteld worden, dan is het klaar, dat de hoeveelheden kwik en alkohol, die bij B, E en F verplaatst worden, zullen zijn $\alpha \times Bb = \alpha\delta x$, $\alpha' \times Ee = -\alpha'\delta x'$, $\alpha'' \times Ff = -\alpha''\delta x''$ en daar deze hoeveelheden natuurlijk even groot moeten zijn, hebben wij de vergelijkingen,

$$\alpha\delta x = -\alpha'\delta x' = -\alpha''\delta x'' \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Differentieren wij nu de vergelijking (1), dan komt er

$$K(\delta x - \delta x') = K\delta h + A(\delta x'' - \delta x),$$

maar hierin kunnen wij volgens (2) $\delta x = -\frac{\alpha''}{\alpha}\delta x''$ en $\delta x' = \frac{\alpha''}{\alpha'}\delta x''$ substitueren, waardoor wij verkrijgen

$$-K\left(\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\alpha''}{\alpha'}\right)\delta x'' = K\delta h + A\left(1 - \frac{\alpha''}{\alpha'}\right)\delta x'';$$

en hieruit $\delta x''$ afzonderende, vinden wij na behoorlijke herleiding

$$\delta x'' = -\frac{\alpha\alpha'}{(\alpha + \alpha')\alpha'' + \frac{A}{K}(\alpha' - \alpha'')\alpha}\delta h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3);$$

door behulp der vergelijkingen (2), verkrijgt men dadelijk ook

$$\delta x' = -\frac{\alpha\alpha''}{(\alpha + \alpha')\alpha'' + \frac{A}{K}(\alpha' - \alpha'')\alpha}\delta h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en $$\delta x = +\frac{\alpha'\alpha''}{(\alpha + \alpha')\alpha'' + \frac{A}{K}(\alpha' - \alpha'')\alpha}\delta h \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Men ziet uit de formule (3) dat, indien α, α' en α'' standvastig zijn, ten minste zoo ver als zich de veranderingen in hoogte van de vlakken B, E en F uitstrekken, dan ook de veranderingen in de hoogte des controleurs evenredig zullen zijn met de verandering in hoogte van den eenvoudigen barometer; want indien de coëfficient van δh in de vergelijking (3) standvastig is, mag men in plaats van die vergelijking ook schrijven

$$\Delta x'' = -\frac{\alpha\alpha'}{(\alpha+\alpha')\alpha'' + \frac{A}{K}(\alpha' - \alpha'')\alpha} \Delta h \; . \; . \; . \; (6)$$

waarin $\Delta x''$ en Δh niet meer oneindig kleine, maar bepaalde veranderingen in hoogte aanduiden. Het zelfde geldt ook voor de vergelijkingen (4) en (5).

Het blijkt alzoo hieruit, dat het bij het gebruik van den controleur, van belang is, dat de buis bij B, E en F eene naauwkeurig cilindervormige gedaante heeft; en dat, hieraan voldaan zijnde, de vergelijking (6) de gevraagde betrekking aangeeft.

Om den coëfficient van Δh in de genoemde vergelijking te berekenen, is het niet noodig α, α', α'', A en K, ieder afzonderlijk te kennen; het is hiertoe genoegzaam dat men de verhoudingen $\frac{\alpha}{\alpha''}$, $\frac{\alpha'}{\alpha''}$ en $\frac{A}{K}$ kent, want stelt men

$$\frac{\alpha}{\alpha''} = p, \; \frac{\alpha'}{\alpha''} = q \text{ en } \frac{A}{K} = r,$$

dan gaat de vergelijking (6) over in

$$\Delta x'' = -\frac{pq}{p+q+r(q-1)p} \Delta h \; . \; . \; . \; . \; (7).$$

Was de cilindervormige buis bij B en E even wijd, dan zoude men hebben $\alpha = \alpha'$ en dus $p = q$, waardoor de vergelijking (7) zoude veranderen in

$$\Delta x'' = -\frac{p}{2+r(p-1)} \Delta h \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8).$$

Neemt men voor het soortelijk gewigt van de kwik 13, 6, en voor dat van de alkohol 0,8, hetwelk nagenoeg naauwkeurig is, dan is $r = \frac{A}{K} = \frac{0,8}{13,6} = \frac{1}{17}$, waardoor

de formule (8) wordt

$$\Delta x'' = -\frac{17p}{33+p}\Delta h \dots\dots\dots (9)$$

Stellen wij dus tot een voorbeeld, dat de buis bij B en E eene vijfmaal grootere inwendige middellijn heeft dan bij F; dan is, omdat de doorsneden a en a' tot elkander in reden zijn als de vierkanten van hunne middellijnen, $p = 25$, waardoor wij volgens (9) verkrijgen

$$\Delta x'' = -\frac{25 \times 17}{33+25}\Delta h = -7,328 \times \Delta h.$$

Door in de vergelijkingen (4) en (5) Δx, $\Delta x'$, Δh, in plaats van δx, $\delta x'$, δh te schrijven, vindt men voor dit voorbeeld, na substitutie der aangenomene waarden

$$\Delta x' = -0,293 \times \Delta h$$

en

$$\Delta x = -0,293 \times \Delta h,$$

waardoor de verplaatsing der vlakken B en E bepaald is.

AANMERKING. De gevoeligheid van den controleur hangt af van den coefficient van Δh, in de vergelijkingen (6) of (7); naarmate deze coefficient grooter of kleiner is, is die gevoeligheid meer of minder. Schrijft men dezen coefficient in de gedaante

$$\frac{1}{r+\frac{1}{p}+\frac{1-r}{q}} = P,$$

en neemt men in aanmerking, dat het onmogelijk is eene soortelijk zwaardere vloeistof op eene soortelijk ligtere te plaatsen, zoo dat altijd $A < K$, dus $r < 1$ en $1-r$ positief is, dan ziet men dat P grooter zal worden, indien men p en q een van beide, of beide te gelijk grooter neemt, maar omdat, voor $p = \infty$ en $q = \infty$, $P = \frac{1}{r}$ wordt, zal $\frac{1}{r} = \frac{K}{A}$ de limiet in grootte van den coefficient P zijn. Zijn dus de buizen met kwik en alkohol gevuld, als wanneer $\frac{K}{A} = 17$ is, dan moeten de veranderingen in hoogte van den controleur altijd minder zijn, dan het 17-voud van de veranderingen der gewone barometerhoogte.

Omdat p, q en r positieve getallen verbeelden en $r < 1$ is,

zal P altijd positief zijn; en dus zal een dalen of rijzen van het vocht in den controleur altijd met een rijzen of dalen des gewonen barometers overeenkomen.

Zal de gevoeligheid van den controleur, die van den gewonen barometer overtreffen, dan moet $P > 1$ zijn, waaruit dan volgt

$$r + \frac{1}{p} + \frac{1-r}{q} < 1$$

of $$\frac{1}{p} + \frac{1-r}{q} < 1-r;$$

deze ongelijkheid door $1 - r$ deelende, hetwelk, omdat $1 - r$ positief is, veilig geschieden kan, komt er

$$\frac{1}{p} \times \frac{1}{1-r} + \frac{1}{q} < 1;$$

tegen welke voorwaarde men dadelijk in strijd zou zijn, indien men p en q beide of een van beide kleiner dan 1 wilde nemen.

Was de voorwaarde $r < 1$ geen noodzakelijk gevolg van de reeds genoemde omstandigheid, dan zoude men P negatief, $P > 1$ of zelfs $P = \infty$ kunnen maken, zonder dat het juist noodig ware p en q beide grooter dan 1 te nemen; zoo zou bijv. 1°. $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 5$ nemende, $P = -1$ en dus $\Delta x' = \Delta h$ worden; 2°. $p = 2$, $q = \frac{1}{2}$, $r = 2$ nemende, zou $P = 2$ en dus $\Delta x' = -2 \times \Delta h$ zijn; terwijl 3°. $q = \frac{p(r-1)}{pr+1}$ genomen wordende, als wanneer voor $r > 1$, q positief blijft, $P = \infty$ zou wezen.

LXXXVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Eene meetkunstige reeks van drie geheele getallen heeft die eigenschap, dat, wanneer de eerste term met 3 vermeerderd, de tweede met 2 verminderd, en de derde, na met 4 verminderd te zijn, door 2 gedeeld wordt, de drie komende getallen vierkanten zijn, wier wortels de eenheid van elkander verschillen. Men vraagt naar deze reeks?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., L. J. Ulman, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, H. Kloos, F. C. Radijs, M. G. Snoer, A. Vos, W. G. van Delden, M. L. Goede, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, H. van Assendelft de Coningh en C. van Schaick.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Men stelle voor de wortels der in het voorstel genoemde vierkanten $x - 1$, x en $x + 1$,
dan zijn die vierkanten zelve

$$(x - 1)^2, \quad x^2 \quad \text{en} \quad (x + 1)^2;$$

derhalve zullen dan

$$(x - 1)^2 - 3, \quad x^2 + 2 \quad \text{en} \quad 2(x + 1)^2 + 4 \quad . \; . \; . \; (A)$$

eene meetkunstige reeks inbeteen uitmaken; weshalve

$$(x^2 + 2)^2 = \{(x - 1)^2 - 3\} \times \{2(x + 1)^2 + 4\}$$

moet wezen; indien men deze vergelijking ontwikkelt en behoorlijk herleidt, komt er

$$x^4 - 10x^2 - 20x - 16 = 0.$$

Voor de wortels dezer vergelijking vindt men langs den gewonen weg

$$x = 4, \; x = -2 \text{ en } x = -1 \pm \sqrt{-1},$$

van welke alleen $x = 4$ aan de bedoeling des voorstels beantwoordt; deze waarde van x in de uitdrukkingen (A) overbrengende, verkrijgt men voor de gevraagde reeks de getallen. 6, 18 en 54.

Aanmerking van L. J. Ulman. Begeerde men, dat de wortels der vierkanten met de eenheid *afdaalden*; in plaats van met de eenheid *op te klimmen*, (dewijl de opgave slechts van *verschillen* spreekt) zoo zoude de bovenstaande vergelijking slechts in eenen term van teeken veranderen, en worden

$$x^4 - 10x^2 + 20x - 16 = 0;$$

wij zouden alsdan vinden $x = -4$ en dezelfde reeks als boven verkrijgen, terwijl dan alleen de wortels der vierkanten negatief moesten genomen worden.

LXXXVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De waarden van x en y te vinden, uit de vergelijkingen

$$x^3y^2 + xy^4 = a \quad \text{en} \quad x^2y^3 + x^4y = b?$$

Opgelost *door* C. F. Julius, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, W. G. van Delden, M. L. Goede, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, J. G. W. Merkes, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoer, L. J. Ulman, A. Vos, B. de Jongh *en* S. Dik, Cornsz.

Oplossing van C. F. Julius.

Schrijven wij de gegevene vergelijkingen onder den vorm,

$$x y^2 (x^2 + y^2) = a \text{ en } x^2 y (x^2 + y^2) = b,$$

dan vinden wij, door de eene in de andere te deelen,

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a};$$

wij kunnen derhalve stellen

$$x = bz \text{ en } y = az,$$

waardoor de opgegevene vergelijkingen veranderen in

$$b^3 a^2 z^5 + b a^4 z^5 = a \text{ en } b^2 a^3 z^5 + b^4 a z^5 = b,$$

uit elk van welke men vindt

$$z = \frac{1}{\sqrt[5]{ab(a^2 + b^2)}};$$

derhalve is

$$x = \frac{b}{\sqrt[5]{ab(a^2 + b^2)}} \text{ en } y = \frac{a}{\sqrt[5]{ab(a^2 + b^2)}}.$$

LXXXVIII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

In eenen gegeven cirkel is een vierkant beschreven, in dat vierkant wederom een cirkel; op dezen laatsten cirkel wordt dezelfde bewerking herhaald en men veronderstelt, dat aldus tot in het oneindige kan worden voortgegaan; men begeert nu de som te vinden van de inhouden van al de cirkels welke hierdoor ontstaan?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, C. J. Bolten, S. Dik, Cornsz., M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, M. G. Snoer, A. Vos, H. Kloos *en* J. G. W. Merkes.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Dewijl de middellijn des gegeven cirkels gelijk is aan den diagonaal van het ingeschreven vierkant, en de middellijn des in het vierkant beschreven cirkels gelijk is aan de zijde van dat vierkant, zoo staan die middellijnen tot elkander, als de diagonaal van een vierkant tot deszelfs zijde, dat is: als $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daar voorts de inhouden der cirkels tot elkander zijn als de vierkanten hunner middellijnen, zoo staat de inhoud des ge-

geven cirkels tot dien van den eerst ingeschrevenen, als 1 : $\frac{1}{2}$; terwijl gelijkerwijze de inhoud van elken cirkel tot den inhoud van den daaropvolgenden cirkel in deze zelfde verhouding staat.

Wanneer dus de inhoud van den gegevenen cirkel door C wordt voorgesteld, dan is die van den eerst ingeschrevenen cirkel $\frac{1}{2}$ C, die van den volgenden cirkel $\frac{1}{4}$ C, en zoo vervolgens; zoodat de som der inhouden van al de ingeschrevene cirkels, tot in het oneindige toe, wordt uitgedrukt door

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \textit{enz.}) \times C.$$

Nu is het bekend, dat

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \textit{enz.}) = 1$$

is, derhalve is de som van de inhouden van al de ingeschrevene cirkels gelijk aan den inhoud van den gegevenen cirkel.

LXXXIX. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

In een gegeven vierkant wordt een cirkel, in dezen cirkel weder een vierkant beschreven; op dit laatste vierkant wordt dezelfde bewerking herhaald en men onderstelt, dat aldus tot in het oneindige kan worden voortgegaan: men begeert nu de som te vinden van de inhouden van al de vierkanten welke hierdoor ontstaan?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Acquoy, C. J. Bolten, S. Dik, Cornsz, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, M. G. Snoek, A. Vos, H. Kloos *en* J. G. W. Merkes.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Het is blijkbaar dat elk vierkant het dubbel is van het daarin beschrevene; en dat dus, de inhoud des gegeven vierkants door V voorgesteld wordende, de som der inhouden van al de ingeschrevene vierkanten, even als in het vorige voorstel, door

$$(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \textit{enz.}) \times V = V$$

wordt uitgedrukt; zoodat ook nu weder de begeerde som gelijk aan het gegevene vierkant is.

XC. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Eenen gegeven regten kegel, waarvan de hoogte gelijk is aan den straal des grondvlaks, wil men, door een vlak dat door den top gaat, zoodanig snijden, dat de inhoud der driehoekige doorsnede de helft van den assedriehoek zij. Men vraagt dit snijdende vlak te bepalen, door aan te wijzen, waar hetzelve door het grondvlak des kegels zal moeten gaan?

Opgelost *door* L. J. Ulman, J. Aoquoy, C. F. Julius, S. Dik, Cornsz., M. L. Goede, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, J. G. W. Merkes, F. C. Radijs *en* A. Vos.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Zij ABC (Fig. 44) de gegevene kegel, waarin de hoogte AD gelijk is aan den straal BD des grondvlaks; zij AEF de gevraagde doorsnede, gaande door eene koorde EF van het cirkelvormige grondvlak; indien men dan loodregt op die koorde en door derzelver midden den straal DGB trekt, zal het er slechts op aankomen den afstand DG te bepalen. Men stelle hiertoe DG $= x$ en AD $=$ BD $= r$, dan is, na DE en AG getrokken te hebben, in de regthoekige driehoeken DGE en DGA,

$$EG = \sqrt{(DE^2 - DG^2)} = \sqrt{(r^2 - x^2)}$$

en

$$AG = \sqrt{(AD^2 + AG^2)} = \sqrt{(r^2 + x^2)},$$

derhalve is

$$Inh.\ drieh.\ AEF = EG \times AG = \sqrt{(r^4 - x^4)};$$

daar deze inhoud nu de helft van dien des assedriehoeks moet wezen, en deze laatste klaarblijkelijk

$$Inh.\ drieh.\ ABC = BD \times AD = r^2$$

is, heeft men de vergelijking

$$\sqrt{(r^4 - x^4)} = \tfrac{1}{2}\, r^2$$

of

$$r^4 - x^4 = \tfrac{1}{4}\, r^4,$$

waaruit volgt

$$x^4 = \tfrac{3}{4}\, r^4$$

en

$$x = r\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}.$$

Deze waarde van x is zeer gemakkelijk te construeren. Men trekke namelijk in het grondvlak (Fig. 45) twee middellijnen BC en LM regthoekig door elkander, neme CH $= r$, trekke HI loodregt op LM; beschrijve op LI eenen halven cirkel de lijn BC in G snijdende. Indien men dan verder

door G eene koorde EF trekt, die BC regthoekig doorsnijdt, zal deze koorde de doorsnede van het gevraagde vlak met het grondvlak zijn. Want CH $=$ DH $= r$ zijnde, is DK $=$ KC $=$ HI $= \frac{1}{2} r$, en dus DI $= \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} r^2)} = r \sqrt{\frac{3}{4}}$ en DG $= \sqrt{\text{DL} \times \text{DI}} = \sqrt{(r \times r \sqrt{\frac{3}{4}})} = r \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$.

Aanmerking. Wanneer algemeen gevraagd was, de plaats der doorsnijding zoo te bepalen, dat de driehoek AEF tot den assedriehoek stond als $m : n$ (mits $m < n$ zijnde), dan zoude de vergelijking zijn

$$\sqrt{(r^4 - x^4)} = \frac{m}{n} r^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = r \sqrt[4]{\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)}.$$

De constructie is in dat geval als volgt: deel DC (Fig. 45) in n gelijke deelen, neem DK gelijk aan m zulke deelen, rigt uit K op DC eene loodlijn HK op, trek uit H de lijn HI evenwijdig met DC, en beschrijf verder den halven cirkel IGL als boven; want dan is HI $=$ DK $= \frac{m}{n} r$,

$$\text{DI} = \sqrt{\left(r^2 - \frac{m^2}{n^2} r^2\right)} = r \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)}$$

$$\text{en}\quad \text{DG} = \sqrt{\left(r \times r \sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)}\right)} = r \sqrt[4]{\left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)}$$

XCI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Eenige personen willen te zamen handelen: 1°. Elk hunner geeft een driehoekig getal (a) *malen zoo veel guldens als er personen zijn; dit driehoekig getal* (a) *heeft een vierhoekig* (b) *en dit vierhoekig* (b) *een pronikgetal* (c) *tot wortel, terwijl* 10 *maal de pronikwortel* (d) *gelijk is aan het driehoekige getal* (a). 2°. *Zij winnen met een vierkant getal* (e) *guldens, een driehoekig getal* (f) *guldens meer dan er deelgenooten zijn; de trigonaalwortel* (g) *uit den wortel* (h) *van dat vierkant* (e) *is weder een vierkant* (g), *en de pronikwortel* (i) *uit den wortel* (k) *van dit laatste vierkant* (g) *is gelijk aan den pronikwortel* (l) *uit den trigonaalwortel* (m) *van den trigonaalwortel* (n) *van het driehoekige getal* (f), *dat aanwijst hoe veel guldens de genoemde winst het*

aantal deelgenooten overtreft; terwijl deze beide gelijke pronikwortels (i *en* l) *te zamen den pronik opleveren.* 3°. *Het getal guldens* (p) *dat zij in het geheel winnen is het product van een pronikgetal* (q) *met deszelfs geheelen positieven wortel* (r), *terwijl dat pronikgetal* (q) *gedeeld door deszelfs wortel* (r) *een geheel derdemagtsgetal* (s) *tot quotient geeft. Men vraagt, naar het getal deelgenooten, naar hunnen inleg en naar hunne winst?*

Opgelost *door* C. J. Bolten, J. Acquoy, M. L. Gorde, C. F. Julius, H. Kloos, B. Lubbers, M. G. Snoek, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

1°. Stellende voor den pronikwortel (d) . . . . x,
dan is het pronikgetal (c) . . . . $x(x+1)$
het vierhoekig getal (b) . . . . $x^2(x+1)^2$,
het driehoekig getal (a) . . . . $\frac{1}{2}x^2(x+1)^2\{x^2(x+1)^2+1\}$
en men heeft derhalve de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}x^2(x+1)^2\{x^2(x+1)^2+1\}=10x$$

of

$$x^4(x+1)^4+x^2(x+1)^2=20x;$$

dat is, na ontwikkeling en tevens, daar x niet gelijk nul kan zijn, na deeling door x,

$$x^7+4x^6+6x^5+4x^4+2x^3+3x^2+2x^2+x-20=0;$$

de eenigste wortel in geheele getallen dezer vergelijking is $x=1$, wij vinden dus voor het driehoekig getal (a) 10, en alzoo stellende, dat er x personen waren, is elks inleg $10x$ en de gezamenlijke inleg van allen $10x^2$ gulden geweest.

2°. Laten verder de gelijke pronikwortels (i en l) door y voorgesteld worden, dan moet, omdat deze beide pronikwortels te zamen den pronik opleveren,

$$2y=y(y+1)$$

wezen, waaruit men vindt $y=1$; wij verkrijgen dus:

voor den pronikwortel (i)	1,
derhalve is de pronik of vierkantswortel (k) . . .	2,
het vierkant of de trigonaalwortel (g)	4,
het driehoekig getal of de vierkantswortel (h) . .	10
en het vierkant (e)	100;
zoo is ook de pronikwortel (l)	1,
dus de pronik of trigonaalwortel (m)	2,
de trigonaal of trigonaalwortel (n)	3
en het driehoekig getal (f)	6;

Zij winnen dus met 100 gulden $x + 6$ gulden, waaruit men de geheele winst, met het kapitaal van $10x^2$ guldens verkregen, terstond kan bepalen; men vindt door eene gewone evenredigheid, voor dit getal guldens (p) . . . $\frac{x^2(x+6)}{10}$.

3°. Laat eindelijk de pronikwortel (r) door w, en het derde-magtsgetal (s) door v^3 worden voorgesteld, dan is het pronikgetal (q) $w(w+1)$; dus moet vooreerst

$$\frac{w(w+1)}{w} = v^3$$

en bijgevolg $$w = v^3 - 1$$
zijn: ten andere moet men hebben

$$w(w+1) \times w = \frac{x^2(x+6)}{10},$$

of $$x^3 + 6x^2 = 10w^2(w+1);$$
brengt men nu in de laatste vergelijking de waarde $w = v^3 - 1$ over, dan behoeft men nog maar alleen aan de komende vergelijking

$$x^3 + 6x^2 = 10v^3(v^3 - 1)^2 \text{ . . . . (A)}$$

te voldoen en het voorstel is dus onbepaald; zijnde echter de waarden van x en v nader beperkt, door de voorwaarde, dat het geheele getallen moeten wezen, en dat $v > 1$ moet zijn, opdat de pronikwortel (r), namelijk $w = v^3 - 1$, een geheel positief getal zij.

Men kan dus, in de vergelijking (A), voor v achtereenvolgens de getallen 2, 3, 4, *enz.* nemen en telkens beproeven of de derde-magts-vergelijking, die hierdoor ontstaat, een of meer meetbare positieve wortels heeft, zullende elke zoodanige wortel een antwoord op het voorstel geven. Beginnende met $v = 2$, heeft men de vergelijking

$$x^3 + 6x^2 = 3920,$$

welke tot wortels heeft $x = 14$ en $x = -10 \pm 6\sqrt{-5}$; er kunnen dus geweest zijn 14 deelgenooten, wier gezamenlijke inleg dan heeft bedragen $10x^2 = 1960$ guldens, terwijl hunne geheele winst $x + 6 = 20$ ten honderd, of

$$\frac{x^2(x+6)}{10} = 392$$

guldens heeft beloopen.

XCII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

De enkelvoudige naam van een aanmerkelijk dierengeslacht wordt met vijf letters geschreven; de getallen, die de plaats dezer letters in het alphabet aanwijzen, zijn alle vijfhoekige getallen, welker wortels de volgende eigenschappen hebben: de som van de tweede en vijfde is gelijk nul; even zoo de som van de derde en vierde; de vierde, vijfde en eerste maken eene opklimmende rekenkunstige reeks uit; het product der twee eerste is gelijk aan het product der drie laatste; en het product van allen is gelijk aan 36 maal de eerste. Welke is de naam van dit dierengeslacht.

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN-MATTHES, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS en H. KLOOS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laten de wortels der bedoelde vijfhoekige getallen voorgesteld worden door:

$$v, \quad w, \quad x, \quad y \quad \text{en} \quad z,$$

dan is, volgens de twee eerste der opgegevene eigenschappen,

$$w + z = 0 \text{ of } w = -z \text{ en } x + y = 0 \text{ of } x = -y;$$

hierdoor worden de wortels

$$v, -z, -y, y \text{ en } z.$$

Volgens de derde eigenschap, maken y, z en v eene rekenkunstige reeks uit, derhalve is

$$y + v = 2z \quad \text{of} \quad v = 2z - y$$

en alzoo worden de wortels

$$2z - y, -z, -y, y \text{ en } z.$$

Volgens de vierde eigenschap is verder

$$(2z - y)(-z) = (-y)(y)(z),$$

of
$$2z - y = y^2$$

en
$$z = \tfrac{1}{2}(y^2 + y),$$

waardoor de wortels andermaal overgaan in

$$y^2, -\tfrac{1}{2}(y^2 + y), -y, y \text{ en } \tfrac{1}{2}(y^2 + y).$$

Eindelijk is volgens de laatste eigenschap

$$(y^2)(-\tfrac{1}{2}(y^2 + y))(-y)(y)(\tfrac{1}{2}(y^2 + y)) = 36y^2,$$

of
$$\tfrac{1}{4}y^4(y^2 + y)^2 = 36y^2;$$

hieruit den vierkantswortel nemende en vervolgens door y deelende, komt er

$$\tfrac{1}{2}y\,(y^2+y)=6,$$

of $$y^3+y=12,$$

waaruit men op de gewone wijze vindt

$$y=2;$$

de wortels zijn derhalve

$$4,\ -3,\ -2,\ 2\ \text{en}\ 3;$$

de vijfhoekige getallen, tot deze wortels behoorende, zijn alzoo

$$22,\ 15,\ 7,\ 5\ \text{en}\ 12$$

en de letters, door deze getallen aangewezen wordende,

V O G E L.

XCIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt eene harmonische reeks van vier termen in geheele getallen te vinden, waarbij de som der twee uiterste termen gelijk is aan de som der twee middelste?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. J. Bolten, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, M. G. Snoek, A. Vos, en L. J. Ulman.

Oplossing van J. Acquoy.

Stelt men voor de termen der reeks

$$p,\ q,\ \frac{pq}{2p-q}\ \text{en}\ \frac{pq}{3p-2q},$$

dan is dezelve harmonisch en dan moet volgens de opgaaf

$$p+\frac{pq}{3p-2q}=q+\frac{pq}{2p-q}\ \ldots\ldots,$$

of $$\frac{3p^2-pq}{3p-2q}=\frac{3pq-q^2}{2p-q}$$

wezen; vermenigvuldigende de laatste vergelijking met $(3p-2q)\,(2p-q)$, dan heeft men

$$p\,(3p-q)\,(2p-q)=q\,(3p-q)\,(3p-2q)$$

of $$(2p^2-pq)\,(3p-q)=(3pq-2q^2)\,(3p-q)$$

of $$(2p^2-4pq+2q^2)\,(3p-q)=0$$

en dus, na deeling door 2,

$$(p-q)^2\,(3p-q)=0,$$

waaraan voldaan wordt door $p-q=0$ . . . . (1)

of door $3p-q=0$ . . . . (2).

Uit (1) volgt $q = p$, hetgeen eene reeks oplevert, waarvan al de termen aan elkander gelijk zijn.

Uit (2) volgt $q = 3p$, en dan verkrijgt men de reeks

$$p, \quad 3p, \quad -3p \quad \text{en} \quad -p,$$

waarin men aan p alle mogelijke waarden in geheele getallen kan geven.

XCIV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Een driehoekig en vierhoekig getal van denzelfden wortel te vinden, zoodanig dat de som en het verschil dezer getallen volkomen vierkanten zijn?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat x de gelijke wortel zijn, dan is het driehoekige getal $\frac{x^2+x}{2}$, het vierhoekige x^2 en alzoo moeten, volgens het voorstel,

$$x^2 + \frac{x^2+x}{2} \text{ (A) en } x^2 - \frac{x^2+x}{2} \text{ (B)}$$

volkomen vierkanten zijn; stellen wij hiertoe, dat de uitdrukking (B) tot wortel heeft $\frac{1}{2}ax$, dan is

$$x^2 - \frac{x^2+x}{2} = \frac{a^2x^2}{4},$$

waaruit men dadelijk vindt

$$x = \frac{2}{2-a^2} \text{ (C);}$$

deze waarde van x in de uitdrukking (A) substituerende, verandert dezelve in

$$\frac{8-a^2}{(2-a^2)^2} \text{ (D)}$$

en deze uitdrukking zal een vierkant zijn, indien slechts $8-a^2$ een vierkant is; het loopt terstond in het oog, dat $a = 2$ hieraan voldoet, doch alsdan wordt $x = -1$, bijgevolg het driehoekige getal 0 en het vierhoekige 1. Om eene andere waarde voor x te vinden, stelle men $a = 2 - n$, dan wordt

$$8 - a^2 = 4 + 4n - n^2;$$

laat hiervan $2 - mn$ de vierkantswortel zijn, dan heeft men

$$4 + 4n - n^2 = (2 - mn)^2,$$

waaruit gevonden wordt

$$n = \frac{4(m+1)}{m^2+1};$$

en dan is $\quad a = 2 - n = \dfrac{2(m^2 - 2m - 1)}{m^2+1}$

en $\quad x = \dfrac{2}{2 - a^2} = \dfrac{(m^2+1)^2}{8m(m^2-1) - (m^2+1)^2}.$

Neemt men nu bijv. $m = 3$, dan is $x = \frac{25}{23}$ en men verkrijgt voor het driehoekige getal $\frac{600}{529}$, voor het vierhoekige $\frac{625}{529}$; van welke beide getallen de som $\frac{1225}{529} = \left(\frac{35}{23}\right)^2$ en het verschil $\frac{25}{529} = \left(\frac{5}{23}\right)^2$ is.

AANMERKING. Bij de oplossing is verondersteld, dat het vierhoekige getal grooter dan het driehoekige moest zijn; begeerde men het voorstel in de veronderstelling van het tegendeel op te lossen, dan zouden

$$x^2 + \frac{x^2 + x}{2} \text{ (A}'\text{) en } \frac{x^2 + x}{2} - x^2 \text{ (B}'\text{)}$$

volkomen vierkanten moeten zijn; stelde men dat de wortel uit (B′) wederom $\frac{1}{2} a x$ ware, dan zoude men vinden

$$x = \frac{2}{2 + a^2} \text{ (C}'\text{)},$$

waardoor de uitdrukking A′ zou worden

$$\frac{8 + a^2}{(2 + a^2)^2} \text{ (D}'\text{)};$$

het loopt in het oog, dat $a = 1$ deze uitdrukking dadelijk tot een vierkant maakt, alsdan wordt $x = \frac{2}{3}$, waardoor wij voor het driehoekige getal $\frac{5}{9}$ en voor het vierhoekige $\frac{4}{9}$ verkrijgen.

Door $a = 1 \pm s$ te stellen, zoude men ook hier weder andere waarden voor a kunnen zoeken, die $8 + a^2$ tot een vierkant maakten en alzoo andere antwoorden op het voorstel verschaffen.

XCV. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke is de kleinste harmonische reeks van zes termen, in geheele positieve getallen, waarvan de som een volkomen vierkant is?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, J. ACQUOY, A. VOS, B. LUBBERS *en* M. G. SNOEK.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stellen wij de gevraagde reeks voor door

$$\frac{A}{x},\ \frac{A}{x+y},\ \frac{A}{x+2y},\ \frac{A}{x+3y},\ \frac{A}{x+4y}\ \text{en}\ \frac{A}{x+5y},$$

waarin x en y, zonder van de algemeenheid af te wijken, onderling ondeelbare getallen kunnen voorstellen, dan moet A door x, $x+y$, $x+2y$ *enz.* deelbaar zijn; daar voorts de reeks zoo klein mogelijk moet wezen, zal ook A zoo klein mogelijk moeten zijn; daartoe stellen wij x en y beide gelijk 1, dan gaat de reeks over in

$$\frac{A}{1},\ \frac{A}{2},\ \frac{A}{3},\ \frac{A}{4},\ \frac{A}{5}\ \text{en}\ \frac{A}{6}.$$

Was er nu alleen gevraagd, *de kleinst mogelijke harmonische reeks van zes termen, in geheele positieve getallen, te vinden,* dan zou men voor A het kleinste gemeene veelvoud der noemers, dat is $A=60$ moeten nemen, waardoor men voor de reeks zoude verkrijgen

$$60,\ 30,\ 20,\ 15,\ 12\ \text{en}\ 10,$$

waarvan de som is $147 = 49 \times 3$.

Deze som is echter geen vierkant, maar zoude een vierkant worden, indien wij dezelve met 3 vermenigvuldigden; nemende dus $A = 3 \times 60 = 180$, dan zouden wij voor de reeks verkrijgen

$$180,\ 90,\ 60,\ 45,\ 36\ \text{en}\ 30,$$

waarvan de som $441 = (21)^2$ en dus een volkomen vierkant is.

Daar nu deze laatste reeks, hoezeer het drievoud van de kleinste reeks in geheele getallen, nog kleiner zal zijn dan elke andere reeks in geheele getallen, die wij zouden hebben kunnen verkrijgen, door aan x en y andere, mits onderling ondeelbare, waarden te geven, zoo is het klaar, dat de reeks

$$180,\ 90,\ 60,\ 45,\ 36\ \text{en}\ 30,$$

aan de vraag beantwoordt.

XCVI. Voorstel.

Door J. Teixeira de Mattos, Bz.

Het getal mijner jaren wordt met twee cijfers geschreven, waarvan dat der eenheden het grootste is; deze cijfers zijn beide volkomen vierkanten; de som van hunne wortels is weder een vierkant; de wortel uit dit laatste staat tot den wortel uit het cijfer der tientallen, als het verschil der cijfers tot de som hunner wortels; en het cijfer der eenheden staat tot dat der tientallen, als het drievoudig product van de wortels uit de beide cijfers tot den wortel uit het cijfer der tientallen. Hoe oud ben ik?

Opgelost *door* J. Teixeira de Mattos, Bz., A. Vos, H. Kloos, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, W. G. van Delden, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoek *en* L. J. Ulman.

I. Oplossing *van* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Indien het cijfer der tientallen door x^2 en dat der eenheden door y^2 wordt voorgesteld, moeten de volgende evenredigheden plaats hebben:

$$\sqrt{(x+y)} : x = y^2 - x^2 : x+y$$

en

$$y^2 : x^2 = 3xy : x,$$

of na vereenvoudiging

$$\sqrt{(x+y)} : x = y - x : 1$$

en

$$y : x^2 = 3 : 1;$$

uit de laatste evenredigheid volgt terstond

$$y = 3x^2,$$

terwijl de eerste geeft

$$x\ (y-x) = \sqrt{(x+y)}$$

of

$$x^2\ (y-x)^2 = x+y;$$

hierin voor y de waarde $3x^2$ substituerende, komt er

$$x^2\ (3x^2 - x)^2 = (x + 3x^2)$$

of, na ontwikkeling en deeling door x,

$$9x^5 - 6x^4 + x^3 - 3x - 1 = 0;$$

deze vergelijking heeft slechts eenen meetbaren wortel, te weten $x = 1$; derhalve is $y = 3x^2 = 3$, de onbekende cijfers zijn dus $x^2 = 1$ en $y^2 = 9$, weshalve de begeerde ouderdom 19 jaren is.

II. Oplossing van A. Vos.

De onbekende cijfers even als in de vorige oplossing door x^2 en y^2 voorstellende, behoeven wij, ter oplossing van het voorstel, alleen de laatste evenredigheid

$$y^2 : x^2 = 3xy : x,$$

of liever de daaruit onmiddelijk volgende vergelijking

$$y = 3x^2,$$

te gebruiken; want uit die vergelijking blijkt, dat, zoo men voor x een ander geheel getal dan ± 1 nam, y en zoo veel te meer y^2 eene waarde grooter dan 9 zou verkrijgen, het welk tegen den aard van het voorstel zou strijden. Wij hebben dus $x = \pm 1$, bijgevolg $y = 3$, waaruit volgt dat 19 het gevraagde getal is.

III. Oplossing van H. Kloos.

Daar de cijfers vierkanten en kleiner dan 10 moeten zijn, kunnen het geene andere wezen, dan 1, 4 of 9; hieruit er twee kiezende, zoo dat de som der wortels weder een vierkant is, kan men alleen de cijfers 1 en 9 nemen; en daar het cijfer der eenheden het grootste moet zijn, is het gevraagde getal 19.

XCVII. Voorstel.

Door J. Teixeira de Mattos, Bz.

Eene rekenkunstige reeks van drie termen in geheele getallen te vinden, zoodanig, dat de eerste term een trigonaal, de tweede een pronik en de derde een vierkant zij; terwijl het product van de beide uiterste termen tot het vierkant van den middelsten staat, als 3 tot 4!

Opgelost *door* J. Teixeira de Mattos, Bz., J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, M. L. Goede, B. de Jongh, C. F. Julius, H. Kloos, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoek, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Teixeira de Mattos, Bz.

Men stelle voor de reeks

$$x, \; x + y \text{ en } x + 2y,$$

dan moet men hebben

$$x(x + 2y) : (x + y)^2 = 3 : 4$$

of $$4x^2 + 8xy = 3x^2 + 6xy + 3y^2,$$

dat is $$x^2 + 2xy = 3y^2.$$

waaruit volgt $\quad x = y$ of $x = -3y$.

Neemt men nu *vooreerst* $x = y$, dan wordt de reeks

$$y, \quad 2y \quad \text{en} \quad 3y;$$

stelt men verder $y = \frac{1}{2}(p^2 + p)$, dan is y een trigonaal en dan wordt $2y = p^2 + p$ van zelfs een pronik, er blijft dus slechts over $3y = \frac{3}{2}(p^2 + p)$ tot een vierkant te maken; hiertoe stelle men

$$\frac{3}{2}(p^2 + p) = p^2 q^2,$$

dan vindt men hieruit dadelijk

$$p = \frac{3}{2q^2 - 3};$$

om voor p een geheel getal te verkrijgen, neme men $q = 1$, dan is $p = -3$, bijgevolg $y = 3$ en de reeks is alzoo

$$3, \quad 6 \quad \text{en} \quad 9.$$

Neemt men *ten tweede* $x = -3y$, dan wordt de reeks

$$-3y, \quad -2y \quad \text{en} \quad -y;$$

zal nu de laatste term een vierkant zijn, dan moet y blijkbaar een negatief getal zijn; wij stellen alzoo $y = -p$, waardoor de reeks wordt

$$3p, \quad 2p \quad \text{en} \quad p;$$

stellende verder $2p = q^2 + q$, zoo is de middelste term een pronik en wij hebben vooreerst $3p = \frac{3}{2}(q^2 + q)$ tot eén trigonaal te maken; daartoe zij

$$\frac{3}{2}(q^2 + q) = \frac{1}{2}(r^2 + r)$$

of

$$r^2 + r = 3q + 3q^2,$$

dan is

$$r = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + 12q + 12q^2,)}$$

terwijl men, om deze worteluitdrukking rationaal te maken, kan stellen

$$1 + 12q + 12q^2 = (1 + 2q.s)^2,$$

waaruit men dadelijk vindt

$$q = \frac{s - 3}{3 - s^2},$$

en waardoor men verkrijgt

$$p = \tfrac{1}{2}(q^2 + q) = \frac{-s(s-1)(s-3)}{2(3 - s^2)^2};$$

voorts moet nog p tot een volkomen vierkant gemaakt worden, doch daar het ligtelijk in het oog valt, dat $s = 2$ hier aan voldoet, zoo nemen wij $s = 2$, dan wordt $p = 1$ en derhalve de reeks

3, 2 en 1.

XCVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men de loodlijnen, die uit de hoekpunten eens driehoeks op de overstaande zijden vallen, verlengt tot dat zij den omtrek des om dien driehoek beschreven cirkels snijden, en vervolgens deze snijpunten vereenigt, ontstaat er een nieuwe driehoek, welks ingeschreven cirkel het snijpunt der genoemde loodlijnen tot middelpunt zal hebben. Men vraagt naar het bewijs hiervan?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. G. W. MERKES, L. J. ULMAN, A. VOS, B. DE JONGH *en* F. C. BADIJS.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Daar er in de opgave ondersteld wordt, dat men de loodlijnen, die uit de hoekpunten des driehoeks op de overstaande zijden nedergelaten worden, verlengen moet, opdat zij den omtrek van den omgeschreven cirkel snijden, zoo is het duidelijk, dat de hoeken van den oorspronkelijken driehoek scherp zullen moeten zijn; en het is dan ook alleen in deze onderstelling, dat de opgegevene stelling regtstreeks doorgaat.

Zij dan ABC (Fig. 46) een scherphoekige driehoek; laten AE, BF en CG de loodlijnen zijn, uit de hoekpunten op de overstaande zijden nedergelaten, elkander zoo als bekend is in een zelfde punt P snijdende; dan is, als men die loodlijnen verlengt, tot zij in de punten H, I en K den omtrek van den om ABC beschrevenen cirkel snijden, en voorts de lijnen HI, IK en KH trekt, HIK de bedoelde nieuwe driehoek. Nu hebben de regthoekige driehoeken CGA en BFA den scherpen hoek in A gemeen, dus is

hoek ACG = *hoek* ABF,

bijgevolg *boog* AK = *boog* AI

en *hoek* AHK = *hoek* AHI,

de lijn HA deelt dus den hoek KHI midden door; op ge-

lijke wijze toont men aan, dat IB den hoek HIK en dat KC den hoek IKH midden door deelt. Het punt P, waarin die lijnen elkander snijden, is derhalve het snijpunt der lijnen, die de hoeken des driehoeks HIK midden door deelen, en bijgevolg het middelpunt van den cirkel, die in HIK kan beschreven worden.

Deze alzoo bewezene stelling is echter slechts een bijzonder geval van de volgende algemeene stelling:

Als men uit de hoekpunten eens driehoeks loodlijnen op de overstaande zijden laat vallen, en voorts de punten, waarin die loodlijnen of hare verlengden den om dien driehoek beschreven cirkel snijden, vereenigt, dan ontstaat er een nieuwe driehoek, welks zijden op gelijken afstand zullen gelegen zijn van het snijpunt der genoemde loodlijnen.

Voor den scherphoekigen driehoek is deze stelling reeds boven bewezen; om dezelve ook voor den stomphoekigen driehoek te bewijzen, onderstellen wij, dat de driehoek ABC (Fig. 47) stomphoekig zij in B; laten AE, BF en CG de loodlijnen zijn, elkander in het punt P en den cirkel om ABC beschreven in H, I en K snijdende, dan is HIK de bedoelde nieuwe driehoek. Nu is in de regthoekige driehoeken AEB en CGB

hoek ABE = *hoek* CBG,

dus ook *hoek* BAE = *hoek* BCG,

bijgevolg is *boog* BH = *boog* BK

en *hoek* BIH = *hoek* BIK.

De regthoekige driehoeken ABF en ACG hebben den scherpen hoek in A gemeen, derhalve is

hoek ABF = *hoek* ACG,

bijgevolg is *boog* AI = *boog* AK,

hoek AHI = *suppl. hoek* AHK

en, na IH verlengd te hebben,

hoek PHL = *hoek* PHK.

Op gelijke wijze betoogt men, na IK verlengd te hebben, dat *hoek* PKM = *hoek* PKH

is, en hieruit blijkt dus, dat de lijnen PH, PI en PK respectievelijk de hoeken KHL, HIK en HKM midden door deelen, weshalve het punt P, waarin die drie lijnen elkander snijden, gelijken afstand van de zijden des driehoeks HIK heeft. Dit punt P is alzoo niet het middelpunt van den

cirkel in den driehoek HIK beschreven, maar wel het middelpunt van den cirkel, die de zijden HI en IK des driehoeks inwendig en deszelfs zijde HK uitwendig aanraakt.

Was de driehoek ABC regthoekig in B, dan is het duidelijk, dat het punt P, alsmede de punten H en K, in B zouden komen. De driehoek HIK gaat dus voor dit geval over in de regte lijn IB, de afstanden van het punt P, tot de zijden des driehoeks HIK, zijn dan alle nul en dus aan elkander gelijk; en dit in aanmerking nemende, kan men alzoo zeggen, dat onze stelling voor alle driehoeken doorgaat.

Gevolg. I. Als men in Fig. 47 op de lijn BI den afstand BP′ = BP neemt, dan zal P′ het middelpunt zijn van den cirkel, die in den driehoek HIK kan beschreven worden; want, P′H, P′K, BH en BK getrokken hebbende, volgt uit de boven bewezene gelijkheid der boogen AI en AK

hoek ABI = *suppl. hoek* ABK
of *hoek* PBG = *hoek* KBG,
dus is ook *hoek* BPG = *hoek* BKG,

waaruit volgt dat de driehoek PBK gelijkbeenig en

PG = GK

is; daar nu ook PB = BP′

genomen is, zijn BG en P′K evenwijdig, alzoo is de hoek PKP′ regt en dus, daar wij reeds aangetoond hebben, dat PK den hoek HKM midden door deelt, wordt de hoek HKI door P′K midden door gedeeld; op gelijke wijze blijkt, dat P′H den hoek KHI midden door deelt en bijgevolg is P′ het bedoelde middelpunt.

Gevolg. II. Op dezelfde wijze als men in het voorgaande gevolg de gelijkbeenigheid van den driehoek PBK heeft aangetoond, kan men in de beide Figuren 46 en 47 de gelijkbeenigheid bewijzen van de driehoeken

PAK, PAI, PBH, PBK, PCI en PCH;

derhalve is AI = AP = AK,
BH = BP = BK
en CH = CP = CI,

waaruit volgt, dat A, B en C de middelpunten zijn der cirkels, die om de driehoeken IPK, HPK en HPI beschreven kunnen worden.

Gevolg. III. Uit de genoemde gelijkbeenigheid volgt nog, dat in beide de Figuren 46 en 47 de afstanden PH, PI en

PK, door de zijden des oorspronkelijken driehoeks ABC, midden door gedeeld worden.

AANMERKING *van* C. J. BOLTEN. Vereenigt men in de beide Figuren 46 en 47 de punten E, F en G door regte lijnen, dan is, volgens het CLXXII. VOORSTEL van het III. DEEL dezer *Verzam. van Wisk. Voorst.*, het punt P mede het middelpunt van den cirkel, die in den driehoek EFG kan beschreven worden; de zijden van dezen driehoek EFG loopen dus evenwijdig met, en liggen op gelijken afstand van de zijden des driehoeks HIK.

XCIX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De waarde te vinden van de uitdrukking

$$\frac{a^2}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,Log.\,\frac{x-\sqrt{(x^2-a^2)}}{a},$$

voor het geval dat $x=a$ *genomen wordt?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, A. VOS, C. F. JULIUS *en* L. J. ULMAN.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De opgegevene uitdrukking in de gedaante

$$a^2\,\frac{Log.\,(x-\sqrt{(x^2-a^2)})-Log.\,a}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$$

schrijvende, zoo vinden wij, door $x=a$ te stellen, dat het gebroken, waarmede a^2 vermenigvuldigd is, $\frac{0}{0}$ wordt. Stellen wij derhalve

$$X = Log.\,(x-\sqrt{(x^2-a^2)})-Log.\,a,$$
$$X' = \sqrt{(x^2-a^2)},$$

en differentiëren wij deze vormen ten opzigte van x, dan vinden wij na vereenvoudiging.

$$\delta X = -\frac{1}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,\delta x$$

en
$$\delta X' = \frac{x}{\sqrt{(x^2-a^2)}}\,\delta x.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\delta X}{\delta X'} = -\frac{1}{x},$$

hierin $x=a$ stellende, komt er voor de waarde van het gebroken $-\frac{1}{a}$, en deze met a^2 vermenigvuldigende, vin-

den wij dat de opgegevene uitdrukking voor $x = a$ de waarde $-a$ verkrijgt.

AANMERKING *van* C. J. BOLTEN. In de 2de AANMERKING op het CXLIX VOORSTEL van het II DEEL dezer *Verzam. van Wisk. Voorst.*, vindt men deze zelfde herleiding en wordt aldaar in eene noot dezelfde uitkomst, op eene andere wijze, zonder gebruik der differentiaal rekening gevonden.

C. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De integraal te vinden van

$$\delta y = \frac{\delta x}{x} \, Log. \, x. \, (1 + Log. \, x) \sqrt{(1 + 2 \, Log. \, x.)}.?$$

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Stellen wij

$$1 + 2 \, Log. \, x = z^2 \text{ of } Log. \, x = \tfrac{1}{2}(z^2 - 1),$$

dan is

$$\frac{\delta x}{x} = z \delta z$$

en $$1 + Log. \, x = 1 + \tfrac{1}{2}(z^2 - 1) = \tfrac{1}{2}(z^2 + 1);$$

de opgegevene differentiaal formule wordt hierdoor

$$\delta y = z \delta z \times \tfrac{1}{2}(z^2 - 1) \times \tfrac{1}{2}(z^2 + 1) \times z$$

of $$\delta y = \tfrac{1}{4}(z^6 - z^2) \, \delta z = \tfrac{1}{4} z^6 \delta z - \tfrac{1}{4} z^2 \delta z.$$

Alsnu integrerende, vinden wij dadelijk

$$y = \tfrac{1}{28} z^7 - \tfrac{1}{12} z^3 + C$$

of $$y = \tfrac{1}{21} z^3 \left\{ \tfrac{3}{4} z^4 - \tfrac{7}{4} \right\} + C;$$

hierin voor z weder deszelfs waarde $z = (1 + 2 \, Log. \, x)^{\frac{1}{2}}$ overbrengende, verkrijgen wij eindelijk

$$y = \tfrac{1}{84}(1 + 2 \, Log. \, x)^{\frac{3}{2}} (3 \, Log.^2 \, x + 3 \, Log. \, x - 1) + C.$$

CI VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Den loop en de voornaamste eigenschappen op te sporen der kromme lijn, die tot vergelijking heeft $y^2 (a^2 - x^2) = x^4$?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, B. DE JONGH *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Nemen wij de lijnen XX′ en YY′ (Fig. 48), die elkander in O regthoekig snijden, als assen der coördinaten aan, dan zullen deze assen, omdat de vergelijking slechts evene magten van x en y bevat, de kromme lijn in vier gelijke en gelijkvormige deelen verdeelen; zoodat wij ons slechts met de gedaante van een dezer deelen behoeven bezig te houden, om de geheele kromme lijn te leeren kennen.

Zonderen wij uit de gegevene vergelijking y af, dan vinden wij

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$

hierin $x = 0$ stellende wordt ook $y = 0$ en dus is O een punt van de kromme lijn; voor $x = \pm a$ wordt $y = \infty$, neemt men dus OA = OA′ = a, dan zullen de lijnen RR′ en SS′, door A en A′ loodregt op XX′ getrokken, asymptoten der kromme zijn; voor alle positieve of negatieve waarden van x kleiner dan a blijft y bestaanbaar, maar x positief of negatief grooter dan a nemende, wordt y onbestaanbaar, de kromme is dus geheel tusschen de evenwijdige lijnen RR′ en SS′ begrepen.

Lossen wij uit de gegevene vergelijking x^2 op, dan komt er

$$x^2 = \tfrac{1}{2}\{-y^2 \pm y\sqrt{(y^2 + 4a^2)}\},$$

het benedenste teeken zoude deze waarde van x^2 negatief en dus x onbestaanbaar maken, wij hebben derhalve blootelijk

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}\{-y^2 + y\sqrt{(y^2 + 4a^2)}\}};$$

even als dus elke willekeurig aangenomene waarde voor x slechts twee waarden voor y geeft, geeft ook elke willekeurige waarde, die voor y genomen wordt, slechts twee waarden voor x; terwijl uit de laatste vergelijking ook nog dadelijk blijkt, dat y, van nul af tot in het oneindige, positief of negatief kan aangroeijen, zonder x onbestaanbaar te maken.

Maken wij, door de bekende substitutien $x = z\ Cos.\ \phi$ en $y = z\ Sin.\ \phi$, de polaire vergelijking der kromme lijn op, dan komt er na behoorlijke herleiding,

$$z = a\ Tang.\ \phi,$$

voor welke vergelijking nu OX de oorsprong der hoeken en O de pool is; daar deze polaire vergelijking zeer eenvoudig en gemak-

kelijk te behandelen is, zullen wij ons verder van dezelve blijven bedienen.

Om de kromme lijn te construëren, trekke men uit O eene lijn OB, die met OA eenen willekeurigen hoek AOB $= \phi$ maakt en de asymptote RR′ in B snijdt, dan is AB $= a\ Tang.\ \phi$; neemt men dus OP $=$ AB, dan is P een punt van de kromme lijn, en het is alzoo zeer gemakkelijk, zoo vele punten der kromme te vinden als men begeert.

Voor $\phi = 45°$ wordt $z = a$, derhalve zal, indien men uit O, met OA $= a$ als straal, eenen cirkel beschrijft en de boog AC $= 45°$ neemt, C een punt der kromme lijn zijn, weshalve dezelve den genoemden cirkel in het midden van elk der kwadranten snijdt.

Stellen wij door ψ den hoek voor, die de raaklijn van eenig punt der kromme met de voerstraal van dat punt maakt, dan is in het algemeen

$$Tang.\ \psi = \frac{z\,\delta\phi}{\delta z};$$

daar nu hier $z = a\ Tang.\ \phi$, $\frac{\delta z}{\delta \phi} = \frac{a}{Cos.^2\phi}$ of $\frac{\delta\phi}{\delta z} = \frac{Cos.^2\phi}{a}$ is, hebben wij voor onze kromme

$$Tang.\ \psi = Tang.\ \phi\ Cos.^2\phi = Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2\phi;$$

neemt men nu $\phi = 0$, dan is ook $Tang.\ \psi = 0$ en $\psi = 0$, derhalve is XX′ de raaklijn van het punt O; neemt men $\phi = 90°$, dan is almede $\psi = 0$, waaruit volgt dat de oneindige tak OZ der kromme meer en meer evenwijdig met YY′ tracht te worden, hetgeen overeenstemt met het reeds aangetoonde bestaan der asymptoten RR′ en SS′; neemt men $\phi = 45°$, dan is $Tang.\ \psi = \frac{1}{2}$, derhalve zal eene lijn, die uit C naar het midden van OC getrokken wordt, de raaklijn van het punt C zijn.

Om de raaklijn van eenig willekeurig punt P te construëren, late men uit het voetpunt M der ordinaat PM eene loodlijn MT op OP vallen, trekke uit O eene lijn OU evenwijdig met en gelijk aan MT, dan zal UP de begeerde raaklijn zijn; want *hoek* MOP $= \phi$ zijnde, is

$$OM = OP\ Cos.\ \phi,$$

$$MT = OM\ Sin.\ \phi = OP\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi$$

en $Tang.$ OPU $= \frac{OU}{OP} = \frac{MT}{OP} = Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi = Tang.\ \psi.$

Laat r de kromtestraal van eenig punt der kromme zijn, dan is in het algemeen

$$r = \frac{\left(z^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2}};$$

daar nu hier $z = a\ Tang.\phi$, $\frac{\partial z}{\partial \phi} = \frac{a}{Cos.^2\phi}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = \frac{2a\ Sin.\phi}{Cos.^3\phi}$ is, vinden wij, door substitutie dezer waarden, na behoorlijke herleiding,

$$r = \frac{a\sqrt{(1 + Sin.^2\phi\ Cos.^2\phi)^3}}{(2 + Sin.^2\phi)\ Cos.^3\phi} = \frac{a\sqrt{(Sin.^2\phi + Sec.^2\phi)^3}}{2 + Sin.^2\phi};$$

door $\phi = 0$ te stellen, vinden wij, voor den kromtestraal van den top O, $r = \frac{1}{2}a$.

Om den inhoud te vinden van eenigen polairen sector der kromme lijn, gebruiken wij de formule

$$I = \tfrac{1}{2}\int z^2 \partial\phi,$$

waardoor wij, omdat $z = a\ Tang.\phi$ is, verkrijgen

$$I = \tfrac{1}{2}a^2\int Tang.^2\phi\,\partial\phi = \tfrac{1}{2}a^2\int\frac{1 - Cos.^2\phi}{Cos.^2\phi}\partial\phi$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2\left(\int\frac{\partial\phi}{Cos.^2\phi} - \int\partial\phi\right) = \tfrac{1}{2}a^2(Tang.\phi - \phi),$$

bij welke integraal geene standvastige behoeft gevoegd te worden, omdat voor $\phi = 0$ ook $I = 0$ moet worden.

Neemt men $\phi = 45° = \frac{1}{4}\pi$, zoo verkrijgt men

$$Inh.\ OQCO = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{8}a^2\pi$$

en hierbij den inhoud des sectors OCD, die klaarblijkelijk het $\frac{1}{8}$ deel des cirkels CC′C″C‴ is, optellende, komt er

$$Inh.\ OQCDO = \tfrac{1}{2}a^2$$

of door verdubbeling

$$Inh.\ OQCDC'O = a^2.$$

Trekken wij uit C eene loodlijn CE op OA, dan is

$$Inh.\ drieh.\ OEC = \tfrac{1}{4}a^2;$$

dezen inhoud aftrekkende van den inhoud des cirkelsectors OAC, of dezelve verminderende met den reeds bepaalden inhoud van OQCO, komt er

$$Inh.\ CEA = Inh.\ OQCEO = \tfrac{1}{8}a^2\pi - \tfrac{1}{4}a^2,$$

waaruit blijkt dat CE den inhoud van de figuur OQGAO in twee gelijke deelen verdeelt.

De inhoud van den driehoek OAB is

$$\frac{1}{2} \text{OA} \times \text{AB} = \frac{1}{2} a^2 \, Tang. \, \phi ,$$

van dezen inhoud aftrekkende den gevonden inhoud voor den polairen sector der kromme, vinden wij

$$Inh. \text{ OQCPBAO} = \frac{1}{2} a^2 \phi ;$$

nemen wij hierin $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, dan verkrijgen wij

$$Inh. \text{ RAOQCPZ} = \frac{1}{4} a^2 \pi$$

en door hiervan het viervoud te nemen, blijkt dat de geheele vlakke inhoud, begrepen tusschen de takken der kromme lijn en hare asymptoten, gelijk is aan den cirkel CC'C''C'''.

CII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Bij welke driehoekige pyramiden liggen in eene zelfde regte lijn: 1°. de top; 2°. het middelpunt des ingeschreven bols; en 3°. het middelpunt van den cirkel in het grondvlak beschreven?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, L. J. Ulman, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat TABC (Fig. 49 en 50) eene driehoekige pyramide zijn, die de eigenschap heeft, dat deszelfs top T, het middelpunt des ingeschreven bols m en het middelpunt van den cirkel in het grondvlak beschreven M in eene regte lijn TmM liggen, dan heeft deze lijn (omdat zij door den top T van eenen drievlakkigen hoek en door het middelpunt m van eenen bol gaat, die de drie zijvlakken van dien drievlakkigen hoek aanraakt) de eigenschap, dat de loodlijnen, die uit een willekeurig punt van dezelve op de opstaande zijvlakken der pyramide vallen, onderling gelijk zijn; laten wij dus uit M loodlijnen MP en MQ op de zijvlakken TAB en TBC vallen, zoo is MP = MQ. Laten wij verder uit M loodlijnen MD en ME op de zijden AB en BC des grondvlaks vallen, dan is, omdat M het middelpunt van den cirkel is in het grondvlak beschreven, ook MD = ME. Brengen wij voorts een vlak door MP en MD, dat het zijvlak TAB volgens de lijn PD,

en een vlak door MQ en ME, dat het zijvlak TBC volgens QE doorsnijdt, dan zijn deze vlakken respectievelijk loodregt op AB en BC en bijgevolg zijn de hoeken PDM en QEM de standhoeken of de supplementen der standhoeken, die de opstaande zijvlakken TAB en TBC met het grondvlak maken.

Nu zijn de driehoeken PDM en QEM gelijk en gelijkvormig, omdat zij behalve de regte hoeken P en Q nog twee zijden gelijk hebben, waaruit volgt

hoek PDM = *hoek* QEM

en het blijkt dus, dat bij de pyramiden, die de in het voorstel genoemde eigenschap bezitten, *de standhoeken, die de opstaande zijvlakken met het grondvlak maken, onderling gelijk of elkanders supplementen moeten zijn.* Dat omgekeerd *alle driehoekige pyramiden, wier standhoeken op het grondvlak gelijk of elkanders supplementen zijn, de opgenoemde eigenschap bezitten,* wordt even gemakkelijk bewezen, zoodat wij dit met stilzwijgen zullen voorbijgaan, om nog een oogenblik stil te staan, bij het onderzoek naar de plaats van den top der in het voorstel bedoelde pyramiden.

Laat ten eerste de pyramide TABC (Fig. 51) drie gelijke scherpe hoeken op het grondvlak hebben, brengen wij dan door de loodlijn TM, uit den top op het grondvlak vallende, vlakken loodregt op de zijden des grondvlaks, waardoor de driehoeken TDM, TEM en TFM ontstaan, dan zijn deze driehoeken gelijk en gelijkvormig, omdat zij, behalve eene gemeenschappelijke zijde TM en eenen regten hoek M, ook nog de gelijk gegevene standhoeken bevatten; derhalve is

MD = ME = MF

en daar deze lijnen bovendien loodregt op de zijden des grondvlaks staan, volgt hieruit dat M het middelpunt is van den cirkel in het grondvlak beschreven. In dit geval valt alzoo de projectie, van den top op het grondvlak, in het middelpunt van den in het grondvlak beschrevenen cirkel.

Laat ten tweede de pyramide TABC (Fig. 52) twee gelijke scherpe hoeken op het grondvlak hebben, terwijl de derde stomp en het supplement der beide eersten is; alsdan valt het voetpunt M van de loodlijn TM buiten het grondvlak; doch de driehoeken TDM, TEM en TFM, die ontstaan als wij door TM vlakken, loodregt op de zijden des grondvlaks

brengen, zijn wederom gelijk en gelijkvormig, derhalve is ook hier

$$MD = ME = MF$$

terwijl deze lijnen wederom loodregt op de zijden des grondvlaks zijn. In dit geval valt dus de projectie, van den top op het grondvlak, in het middelpunt van eenen cirkel die twee zijden des grondvlaks inwendig en de derde zijde uitwendig raakt.

Dat, ten derde, eene driehoekige pyramide twee gelijke stompe hoeken op het grondvlak zou hebben, terwijl de derde scherp en het supplement der beide eersten zou zijn, is onmogelijk; laat namelijk TABC (Fig. 53) eene driehoekige pyramide zijn, waarin de hoeken, die de vlakken TAB en TBC met het grondvlak maken, stomp en aan elkander gelijk zijn, dan zal de loodlijn, uit den top vallende, buiten het grondvlak en in de lijn BM, die den hoek ABC middendoordeelt, moeten nederkomen, zoodat ABM en CBM stompe hoeken zijn; brengt men nu door TM vlakken loodregt op de zijden des grondvlaks, dan zullen de standhoeken TDM, TEM en TFM ontstaan, maar wegens de stompheid der hoeken ABM en CBM zullen de punten D en E in de verlengden van AB en BC en niet in AB en BC zelve komen; hieruit is het klaar, dat de hoek TFM, of de derde standhoek op het grondvlak, niet gelijk kan zijn aan de supplementen TDM en TEM der gelijk gegevene stompe standhoeken; want deze gelijkheid zou vorderen, dat MF gelijk ware aan MD = ME en dus F op den omtrek des cirkels lag, uit M met MD = ME beschreven, hetgeen onmogelijk is.

Uit dit alles kunnen wij dan besluiten, dat de in het voorstel genoemde eigenschap, bij alle driehoekige pyramiden plaats heeft, wier top zich op het grondvlak projecteert in eene der middelpunten van de vier cirkels die de zijden des grondvlaks aanraken.

CIII. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Indien in de zes vergelijkingen:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1\ (1), \qquad aa' + bb' + cc' = 0\ (4),$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1\ (2), \qquad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0\ (5),$$

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1\ (3), \qquad a''a + b''b + c''c = 0\ (6),$$

de drie grootheden a, b' en c'' gegeven zijn, vraagt men de zes andere grootheden, in deze vergelijkingen voorkomende, in die gegevens uit te drukken?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, L. J. Ulman, C. F. Julius, J. Acquoy *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Dewijl deze vergelijkingen dezelfde zijn, die wij reeds in het LXV. Voorstel hebben behandeld, kunnen wij dadelijk gebruik maken van de vergelijkingen, die wij aldaar uit de opgegevene hebben afgeleid. Hierbij echter vallen dadelijk twee gevallen van elkander te onderscheiden; want de beide leden der vergelijkingen (8) (zie bladz. 127) zijn volkomen vierkanten, en ieder van die vergelijkingen geeft dus, door het nemen van den vierkantswortel, aanleiding tot twee andere vergelijkingen, die wezenlijk verschillend zijn. De symmetrie, die wij aldaar deden opmerken, dat in de opgegevene vergelijkingen bestaat, eischt evenwel, dat men de vierkantswortels van de vergelijkingen (8), evenzeer als die vergelijkingen zelve, door de aangewezene verandering van letters en accenten, uit elkander kunne afleiden; zoodat, door het nemen van eenen der vierkantswortels *uit eene* dier vergelijkingen (8), dadelijk beslist wordt, welke der vierkantswortels men *uit al de overige* moet nemen.

Nemen wij voor *het eerste geval* aan:

dat volgt uit $(b'c'' - b''c')^2 = a^2$, $b'c'' - b''c' = a$,

dan volgt uit $(c'a - ca'')^2 = b'^2$, $c'a - ca'' = b'$

en uit $(ab' - a'b)^2 = c''^2$, $ab' - a'b = c''$;

men heeft derhalve

$$2b''c' = 2b'c'' - 2a \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

$$2ca'' = 2c'a - 2b' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

en

$$2a'b = 2ab' - 2c'' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Uit

$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1,$$

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$$

en

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

vindt men, door de som der twee eerste vergelijkingen met de laatste te verminderen,

$$b'^2 + c'^2 + b''^2 + c''^2 - a^2 = 1$$

of

$$b''^2 + c'^2 = 1 + a^2 - b'^2 - c''^2 \quad\ldots\ldots (15).$$

Uit
$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$
$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$
en
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1,$$
vindt men even zoo
$$c^2 + a''^2 = 1 - a^2 + b'^2 - c''^2 \ldots\ldots\ldots (16).$$
Uit
$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$
$$b^2 + b'^2 + b''^2 = 1$$
en
$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1,$$
vindt men op gelijke wijze
$$a'^2 + b^2 = 1 - a^2 - b'^2 + c''^2 \ldots\ldots\ldots (17).$$

Neemt men nu de som en het verschil der vergelijkingen (12) en (15), (13) en (16), (14) en (17), zoo verkrijgt men
$$(b''+c')^2 = (1-a)^2 - (b'-c'')^2 = (1-a+b'-c'')(1-a-b'+c''),$$
$$(b''-c')^2 = (1+a)^2 - (b'+c'')^2 = (1+a+b'+c'')(1+a-b'-c''),$$
$$(c+a'')^2 = (1-b')^2 - (a-c'')^2 = (1-b'+a-c'')(1-b'-a+c''),$$
$$(c-a'')^2 = (1+b')^2 - (a+c'')^2 = (1+b'+a+c'')(1+b'-a-c'');$$
$$(a'+b)^2 = (1-c'')^2 - (a-b')^2 = (1-c''+a-b')(1-c''-a+b'),$$
$$(a'-b)^2 = (1+c'')^2 - (a+b')^2 = (1+c''+a+b')(1+c''-a-b');$$
of, kortheidshalve stellende
$$\left.\begin{array}{l} 1 + a + b' + c'' = 2p, \\ 1 + a - b' - c'' = 2q, \\ 1 - a + b' - c'' = 2r \\ 1 - a - b' + c'' = 2s, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$
(the last line preceded by "en")
$$\left.\begin{array}{lll} (b''+c')^2 = 4rs, & (c+a'')^2 = 4qs, & (a'+b)^2 = 4qr, \\ (b''-c')^2 = 4pq, & (c-a'')^2 = 4pr, & (a'-b)^2 = 4ps. \end{array}\right\} \ldots 19.$$
Derhalve is
$$\left.\begin{array}{lll} b''+c' = \pm 2\sqrt{rs}, & c+a'' = \pm 2\sqrt{qs}, & a'+b = \pm 2\sqrt{qr}, \\ b''-c' = \pm 2\sqrt{pq}, & c-a'' = \pm 2\sqrt{pr}, & a'-b = \pm 2\sqrt{ps}, \end{array}\right\} 20.$$
waaruit, door optelling en aftrekking, dadelijk gevonden wordt
$$\left.\begin{array}{lll} b'' = \pm\sqrt{rs} \pm \sqrt{pq}, & c = \pm\sqrt{qs} \pm \sqrt{pr}, & a' = \pm\sqrt{qr} \pm \sqrt{ps}, \\ c' = \pm\sqrt{rs} \mp \sqrt{pq}, & a'' = \pm\sqrt{qs} \mp \sqrt{pr}, & b = \pm\sqrt{qr} \mp \sqrt{ps}, \end{array}\right\} (21).$$

Voor *het tweede geval*

volgt uit $(b'c''-b''c')^2 = a^2$, $b'c''-b''c' = -a$,

dus uit $(c''a-ca'')^2 = b'^2$, $c''a-ca'' = -b'$

en uit $(ab'-a'b)^2 = c''^2$, $ab'-a'b = -c''$;

alsdan heeft men
$$2b''c' = 2b'c'' + 2a \ldots\ldots\ldots\ldots (12'),$$
$$2ca'' = 2c''a + 2b' \ldots\ldots\ldots\ldots (13')$$
en
$$2a'b = 2ab' + 2c'' \ldots\ldots\ldots\ldots (14');$$

neemt men nu de som en het verschil der vergelijking en (12') en (15), (13') en (16), (14') en (17), dan komt er

$(b''+c')^2=(1+a)^2-(b'-c'')^2=(1+a+b'-c'')(1+a-b'+c''),$
$(b''-c')^2=(1-a)^2-(b'+c'')^2=(1-a+b'+c'')(1-a-b'-c''),$
$(c+a'')^2=(1+b')^2-(a-c'')^2=(1+b'+a-c'')(1+b'-a+c''),$
$(c-a'')^2=(1-b')^2-(a+c'')^2=(1-b'+a+c'')(1-b'-a-c''),$
$(a'+b)^2=(1+c'')^2-(a-b')^2=(1+c''+a-b')(1+c''-a+b'),$
$(a'-b)^2=(1-c'')^2-(a+b')^2=(1-c''+a+b')(1-c''-a-b');$

of, wederom kortheidshalve stellende

$$\left.\begin{aligned} -1+a'+b'+c''&=2p',\\ -1+a'-b'-c''&=2q',\\ -1-a+b'-c''&=2r'\\ \text{en}\qquad -1-a-b'+c''&=2s', \end{aligned}\right\}\dots\dots\dots(18').$$

$$\left.\begin{aligned} (b''+c')^2=4r's',\ (c+a'')^2=4q's',\ (a'+b)^2=4q'r',\\ (b''-c')^2=4p'q',\ (c-a'')^2=4p'r',\ (a'-b)^2=4p's', \end{aligned}\right\}(19').$$

Derhalve is in dit geval

$$\left.\begin{aligned} b''+c'=\pm2\sqrt{r's'},\ c+a''=\pm2\sqrt{q's'},\ a'+b=\pm2\sqrt{q'r'};\\ b''-c'=\pm2\sqrt{p'q'},\ c-a''=\pm2\sqrt{p'r'},\ a'-b=\pm2\sqrt{p's'}, \end{aligned}\right\}(20').$$

waarom uit wederom, door optelling en aftrekking, terstond wordt gevonden

$$\left.\begin{aligned} b''=\pm\sqrt{r's'}\pm\sqrt{p'q'},c=\pm\sqrt{q's'}\pm\sqrt{p'r'},a'=\pm\sqrt{q'r'}\pm\sqrt{p's'},\\ c'=\pm\sqrt{r's'}\mp\sqrt{p'q'},a''=\pm\sqrt{q's'}\mp\sqrt{p'r'},b=\pm\sqrt{q'r'}\mp\sqrt{p's'}, \end{aligned}\right\}(21').$$

De vergelijkingen (21) en (21') geven de waarden der onbekenden, in de bekende grootheden uitgedrukt; de dubbele teekens voor de wortelgrootheden doen zien, dat er in elk der beide gevallen, die wij onderscheiden hebben, vier waarden voor elke onbekende zijn; men zou echter dwalen indien men deze waarden op eene willekeurige wijze wilde vereenigen, en wij zullen ons dus nog een oogenblik bezig houden met het onderzoek naar die waarden der onbekenden, welke met elkander overeenstemmen. Bepalen wij ons daartoe tot *het eerste geval.*

De vergelijkingen (20) twee aan twee met elkander vermenigvuldigende, komt er

$b''^2-c'^2=\pm4\sqrt{pqrs}, c^2-a''^2=\pm4\sqrt{pqrs}, a'^2-b^2=\pm4\sqrt{pqrs};$

daar nu echter uit (10) (zie bladz. 127) gemakkelijk gevonden wordt

$$b''^2-c'^2=c^2-a''^2=a'^2-b^2,$$

zal men voor elk dezer drie gelijke grootheden of $+4\sqrt{pqrs}$ of $-4\sqrt{pqrs}$ moeten nemen, zonder dat het geoorloofd is, gelijktijdig voor eene van dezelve de positieve en voor eene andere de negatieve waarde van $4\sqrt{pqrs}$ te gebruiken. Neemt men dus in (20) voor $b''+c'$ en voor $b''-c'$ waarden die hetzelfde teeken hebben, dan zal men voor $c+a''$ en $c-a''$ geene waarden met verschillende teekens mogen nemen, even min als voor $a'+b$ en $a'-b$; neemt men daarentegen voor $b''+c'$ en $b''-c'$ waarden, die in teeken verschillen, dan zal men voor $c+a''$ en $c-a''$ geene waarden mogen nemen die in teeken overeenkomen, even min als voor $a'+b$ en $a'-b$.

Nemen wij nu voor b'' willekeurig eene der vier waarden, die in de gevondene vergelijking (21) $b''=\pm\sqrt{rs}\pm\sqrt{pq}$ opgesloten liggen, bij voorbeeld, $b''=\sqrt{rs}+\sqrt{pq}$, dan is in (20)

$$b''+c'=+2\sqrt{rs} \text{ en } b''-c'=+2\sqrt{pq},$$

zoodat met $b''=\sqrt{rs}+\sqrt{pq}$, $c'=\sqrt{rs}-\sqrt{pq}$ ....(22) overeenstemt. Daar nu $b''+c'$ en $b''-c'$ beide hetzelfde teeken hebben, moet dit ook met $c+a''$ en $c-a''$ het geval zijn; wij kunnen dus met de waarden (22) verbinden:

of $\qquad c+a''=2\sqrt{qs}$ en $c-a''=2\sqrt{pr}$,

waaruit volgt $c=\sqrt{qs}+\sqrt{pr}$ en $a''=\sqrt{qs}-\sqrt{pr}$.(23);

of $\qquad c+a''=-2\sqrt{qs}$ en $c-a''=-2\sqrt{pr}$,

waaruit volgt $c=-\sqrt{qs}-\sqrt{pr}$ en $a''=-\sqrt{qs}+\sqrt{pr}$ (24).

Kiezen wij nu eene dezer stelsels waarden voor c en a'', bij voorbeeld (23), dan wordt hierdoor tevens bepaald welke waarden voor a' en b moeten genomen worden; want uit (5) en (6) is

$$a'=-\frac{b'b''+c'c''}{a''},\quad b=-\frac{a''a+c''c}{b''},$$

stelt men hierin voor b'', c', c en a'' de waarden (22) en (23), dan verkrijgt men

$$a'=\frac{(b'+c'')\sqrt{rs}+(b'-c'')\sqrt{pq}}{\sqrt{pr}-\sqrt{qs}}$$

en $$b=\frac{(a-c'')\sqrt{pr}-(a+c'')\sqrt{qs}}{\sqrt{pq}+\sqrt{rs}};$$

maar door onderlinge aftrekking der vergelijkingen (18), blijkt dat

$$b'+c''=p-q,\quad b'-c''=r-s,$$
$$a-c''=q-s,\quad a+c''=p-r,$$

is, waardoor de bovenstaande uitdrukkingen voor a' en b veranderen in

$$a' = \frac{(p-q)\sqrt{rs} + (r-s)\sqrt{pq}}{\sqrt{pr} - \sqrt{qs}}$$
$$= \frac{(\sqrt{pr} - \sqrt{qs})\,(\sqrt{qr} + \sqrt{ps})}{\sqrt{pr} - \sqrt{qs}}$$
$$= \sqrt{qr} + \sqrt{ps},$$
$$b = \frac{(q-s)\sqrt{pr} - (p-r)\sqrt{qs}}{\sqrt{pq} + \sqrt{rs}},$$
$$= \frac{(\sqrt{pq} + \sqrt{rs})\,(\sqrt{qr} - \sqrt{ps})}{\sqrt{pq} + \sqrt{rs}}$$
$$= \sqrt{qr} - \sqrt{ps},$$

en deze waarden van a' en b voldoen nu aan de bovengenoemde voorwaarde, dat $a' + b$ en $a' - b$, in het al of niet verschillen van teeken, met $b'' + c'$ en $b'' - c'$ overeenkomen.

Elk der vier waarden van b'' geeft eene overeenkomstige waarde voor c'; elk der vier stelsels waarden van b'' en c', laat eene verbinding toe met twee stelsels waarden voor c en a''; elk der acht stelsels waarden die hierdoor ontstaan, laat geene keuze meer voor de waarden van a' en b overig en wij zullen dus *in het eerste geval acht* oplossingen verkrijgen; zij zijn de volgende:

1°. $b'' = +\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $c = +\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $a' = +\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$,
$c' = +\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $a'' = +\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $b = +\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$;

2°. $b'' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $c = -\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $a' = -\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$,
$c' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $a'' = -\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $b = -\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$;

3°. $b'' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $c = +\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $a' = +\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$,
$c' = +\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $a'' = +\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $b = +\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$;

4°. $b'' = +\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $c = -\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $a' = -\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$,
$c' = +\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $a'' = -\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $b = -\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$;

5°. $b'' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $c = -\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $a' = +\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$,
$c' = -\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $a'' = -\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $b = +\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$;

6°. $b'' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $c = +\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $a' = -\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$,
$c' = -\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $a'' = +\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $b = -\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$;

7°. $b'' = -\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $c = -\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $a' = +\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$,
$c' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $a'' = -\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $b = +\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$;

8°. $b'' = -\sqrt{rs} - \sqrt{pq}$, $c = +\sqrt{qs} + \sqrt{pr}$, $a' = -\sqrt{qr} - \sqrt{ps}$,
$c' = -\sqrt{rs} + \sqrt{pq}$, $a'' = +\sqrt{qs} - \sqrt{pr}$, $b = -\sqrt{qr} + \sqrt{ps}$.

Voor *het tweede geval* verkrijgt men insgelijks *acht* oplossingen, waartoe men in de bovenstaande slechts p, q, r en s in p', q', r' en s', behoeft te veranderen, zoodat de gegevene vergelijkingen in het algemeen *zestien* oplossingen toelaten.

Tot de bestaanbaarheid der eerste acht antwoorden wordt vereischt dat p, q, r en s alle positief zijn, want vooreerst moeten deze vier grootheden alle hetzelfde teeken hebben, omdat anders eenige der zes producten pq, pr, ps, qr, qs, rs, negatief en dus de vierkantwortels uit dezelve onbestaanbaar zouden worden, terwijl de som der vergelijkingen (18) geeft $p+q+r+s=2$, waaruit blijkt dat deze grootheden geen ander zelfde teeken kunnen hebben dan het positieve.

Daar de som der vergelijkingen (18') geeft $p'+q'+r'+s'=-2$, is het even duidelijk, dat de tweede acht antwoorden niet bestaanbaar kunnen zijn, dan ingeval p', q', r' en s' alle negatief zijn.

Aanmerkingen. 1°. Dit voorstel bevat eigenlijk de stelkunstige oplossing van de vraag: *Om den stand van drie onderling regthoekige coördinaten-assen, ten opzigte van drie andere insgelijks onderling regthoekige coördinaten-assen, die met de eerste denzelfden oorsprong hebben, te bepalen, indien gegeven zijn de hoeken, die elke as van het eene stelsel met de overeenkomstige as van het andere stelsel maakt.*

Laat bijv. OX, OY en OZ, OX', OY' en OZ' (Fig. 54) twee stelsels van drie onderling regthoekige coördinaten-assen zijn, die den oorsprong in hetzelfde punt O hebben, en stellen wij voor de cosinussen der hoeken, waaronder deze assen elkander snijden,

$$Cos.\,X'OX=a,\quad Cos.\,X'OY=b,\quad Cos.\,X'OZ=c,$$
$$Cos.\,Y'OX=a',\quad Cos.\,Y'OY=b',\quad Cos.\,Y'OZ=c',$$
$$Cos.\,Z'OX=a'',\quad Cos.\,Z'OY=b'',\quad Cos.\,Z'OZ=c'',$$

dan zullen juist de opgegevene zes vergelijkingen plaats hebben.

Zijn nu de hoeken X'OX, Y'OY en Z'OZ, die de nieuwe assen OX', OY' en OZ' respectievelijk met de oude assen OX, OY en OZ maken, gegeven, dan zijn a, b' en c'' bekende grootheden, en het zal dus, ter bepaling van den

stand der nieuwe assen, slechts noodig zijn de overige grootheden a', a'', b, b'', c, c', uit die zes vergelijkingen op te lossen.

2°. Men zoude hetzelfde vraagstuk onder andere bewoordingen aldus kunnen opgeven: *Gegeven zijnde drie gewone regte kegels, die een gemeenschappelijk toppunt hebben en waarvan de assen elkander onderling regthoekig snijden, vraagt men op het oppervlak van elken kegel eene regte lijn te trekken, zoodanig dat deze drie getrokkene lijnen onderling regthoekig op elkander staan.*

CIV. VOORSTEL.

Door F. J. Stamkart.

Men vraagt naar den tegenstand der lucht tegen het bolle oppervlak van eenen regten kegel, wanneer deze zich zoodanig beweegt, dat de rigting der beweging eenen hoek β met de as des kegels maakt? Alles in de onderstelling, dat de scheve schok van een vlak tegen eene vloeistof eene loodregte drukking op dit vlak veroorzaakt, die gelijk is aan den druk van den regten schok deszelfden vlaks tegen de vloeistof, vermenigvuldigd met het vierkant van den cosinus van den hoek van invalling.

Opgelost *door* F. J. Stamkart.

Oplossing *van* F. J. Stamkart.

Zij ABCM (Fig. 55) de kegel, die zich in de rigting IW voortbeweegt, ECE'BE dat gedeelte van deszelfs oppervlak hetwelk tegen de lucht schokt en ECE'AE het deel dat geenen tegenstand ontmoet. Beginnen wij met de grootte van het eerste deel te bepalen, en zoeken wij daartoe naar de waardij van den hoek EMB, waaraan het vlak ECE'BE evenredig is.

Het is klaar dat, zoo ACB het vlak is, dat door de as MC en de rigtingslijn IW gaat, en dat men den kegel snijdt door een vlak IWW'I', mede door de lijn IW gaande, en regthoekig zijnde op het vlak ABC, dat dan het doorsnijdings-punt L, van de lijn EC en het vlak IWW'I', het uiteinde zal zijn der kleine as van de ellips FGHL. Want, indien men aanneemt, dat de lijn I'W' den kegel aanraakt, dan moet het raakpunt in de lijn EC gelegen zijn, in L,

dewijl deze lijn de afscheiding voorstelt van het gedeelte des kegelvlaks, dat tegen de lucht indringt, van dat deel, hetwelk geenen tegenstand ontmoet, en in welke lijn dus de luchtdeelen *rakelings* den kegel voorbijgaan. Is dan L het raakpunt van I'W' en het kegelvlak, dan is ook L dat punt der ellips FLH hetwelk het *verst* van de groote as FH verwijderd is, en daarom moet de loodregte LG, op FH, de kleine as der ellips zijn. Verder is het duidelijk, dat de lijn van afscheiding EC eene regte lijn is, omdat alle aan IWW'I' evenwijdige doorsneden des kegels, gelijkvormige ellipsen voortbrengen. Uit een en ander volgt dan, dat het vlak CED, hetwelk door CE gaat, en loodregt op het vlak ABC staat, de lijn FH in G middendoordeelt, en dus dat FG = GH is. Zij nu *hoek* EMB $= \phi$, *hoek* ACM $=$ *hoek* MCB $=$ *hoek* MCE $= \alpha$, *hoek* DCM $= \delta$ en *hoek* CKW $= \beta$, dan is *hoek* CHW $= \beta + \alpha$, *hoek* CFK $= \beta - \alpha$, *hoek* GCH $= \alpha + \delta$, *hoek* FCG $= \alpha - \delta$; men heeft dus uit de driehoeken CGH en CGF

$$CG:GH = Sin.(\beta+\alpha):Sin.(\alpha+\delta) \text{ en } CG:FG = Sin.(\beta-\alpha):Sin.(\alpha-\delta),$$

dus is

$$Sin.(\beta+\alpha):Sin.(\beta-\alpha) = Sin.(\alpha+\delta):Sin.(\alpha-\delta)$$

of

$$Tang.\alpha + Tang.\beta : Tang.\beta - Tang.\alpha = Tang.\alpha + Tang.\delta : Tang.\alpha - Tang.\delta,$$

waaruit men, door gebruik te maken van de eigenschap der evenredigheden, dat de sommen en verschillen van de termen der beide redens wederom evenredig zijn, dadelijk zal vinden

$$Tang.\,\delta = \frac{Tang.^2\,\alpha}{Tang.\,\beta};$$

maar

$$DM = CM\ Tang.\,\delta = -EM\ Cos.\,\phi = -CM\ Tang.\,\alpha\ Cos.\,\phi,$$

dus

$$Cos.\phi = -\frac{Tang.\delta}{Tang.\alpha} = -\frac{Tang.^2\alpha}{Tang.\beta} : Tang.\alpha = -\frac{Tang.\alpha}{Tang.\beta} \ldots (1).$$

Zoo lang $Tang.\,\beta > Tang.\,\alpha$ is, heeft ϕ eene bestaanbare waarde, kleiner dan 180°; is $\beta = \alpha$ dan wordt $\phi = 180°$, doch wanneer $\beta < \alpha$ wordt, dan kan ϕ niet meer door deze formule gevonden worden; in dat geval stoot het *geheele* oppervlak des kegels tegen de lucht.

Gaan wij thans over tot het bepalen van den tegenstand der lucht. Zij, in Fig. 56, DF eene raaklijn aan den cirkel AFBA in F, en fFC een oneindig klein gedeelte van het oppervlak des kegels, dan kan men dit driehoekje beschouwen als in het vlak te liggen, dat door CF en FD gaat, en den kegel aanraakt. Onderstellen wij in C eene loodlijn CL op het vlak FCD, en noemen wij den hoek, dien deze loodlijn met de rigtingslijn CW maakt, x, dan hebben wij nog ter bepaling van x,

den hoek tusschen CW en de as CN . . . . . $= \beta$,
den hoek tusschen de loodlijn CL en de as CN $= 90° - \alpha$,
den hoek tusschen het vlak NCW en het vlak CMF,
dat door de loodlijn CL en as CN gaat . . . $= \phi$;
waaruit blijkt, dat β, $90° - \alpha$ en x de zijden van eenen bolvormigen driehoek NWL (Fig. 57) uitmaken, waarin de tegenover x staande hoek N $= \phi$ is, en dat men alzoo heeft

$$Cos.\, x = Cos.\, \phi\, Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta + Sin.\, \alpha\, Cos.\, \beta.$$

Zij nu MF $=$ MA $=$ MB $= r$ en CM $= h$, dan is $r = h\, Tang.\, \alpha$, en CF $=$ Cf $= \dfrac{r}{Sin.\, \alpha}$; verder fF $= r\delta\phi$ zijnde, zoo is

$$Inh.\ Driek.\ \text{CfF} = \tfrac{1}{2}\text{fF} \times \text{CF} = \tfrac{1}{2}\, r\delta\phi \times \frac{r}{Sin.\, \alpha} = \tfrac{1}{2}\, r^2 \frac{\delta\phi}{Sin.\, \alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, h^2 \frac{Tang.\, \alpha}{Cos.\, \alpha}\, \delta\phi = m\, \delta\phi;$$ zijnde kortheidshalve gesteld.

$$\frac{r^2}{2\, Sin.\, \alpha} = \tfrac{1}{2}\, h^2 \frac{Tang.\, \alpha}{Cos.\, \alpha} = m.$$

Als dan K de *volle* tegenstand der lucht is, welke eene vierkante eenheid, met de snelheid des kegels zich bewegende, ondervindt, dan zal $K\, m\, \delta\phi$ de *volle* tegenstand der lucht tegen het driehoekje fFC voorstellen; en de tegenstand, welke dit driehoekje door den scheven schok zal moeten verduren, zal uitgedrukt worden door

$$K\, m\, Cos.^2\, x\, \delta\phi.$$

Deze tegenstand werkt nu regthoekig op het vlak van het driehoekje CfF, en het middelpunt van drukking is klaarblijkelijk in het zwaartepunt van het driehoekje; zij dan CZ $= \frac{2}{3}$ CF en ZP loodregt op het oppervlak des kegels, dan kan men den ganschen tegenstand der lucht op FfC aan-

merken, als op het punt P van de as, volgens de rigting ZP, te werken. Trekken wij in Fig. 56 in het vlak ABDC de projectie CG van de lijn CL, en in Fig. 57, uit L de boog LG loodregt op de zijde NW, dan is, indien wij in Fig. 56, *hoek* LCG = λ en *hoek* NCG = μ stellen, ook in Fig. 57 *boog* LG = λ en *boog* NG = μ. Daar nu LCG de hoek is, die CL of de daaraan evenwijdige PZ met het vlak ABC maakt, kunnen wij den tegenstand, die volgens ZP werkt, ontbinden in:

Druk in P regthoekig op 't vlak ABC $= Km\ Cos.^2 x\ Sin.\ \lambda\, \delta\phi$
en Druk in P evenwijdig aan CG....... $= Km\ Cos.^2 x\ Cos.\lambda\, \delta\phi$.

De eerste dezer beide drukkingen wordt vernietigd door eenen volkomen gelijken druk op het vlak ABC, van de andere, of volgens de figuur, van de achterzijde de kegels; zoo dat alleen de druk evenwijdig aan CG overblijft. Deze laat zich weder ontbinden in eenen druk volgens de lijn CM, die wij door δA, en eenen druk in P evenwijdig aan BM werkende, die wij door δB zullen voorstellen; wij verkrijgen voor deze drukkingen, *hoek* NCG = μ zijnde,

$$\delta A = Km\ Cos.^2 x\ Cos.\lambda\ Cos.\mu\, \delta\phi$$
en
$$\delta B = Km\ Cos.^2 x\ Cos.\lambda\ Cos.\mu\, \delta\phi.$$

Nemen wij nu in aanmerking, dat uit den regthoekigen bolvormigen driehoek LGN (Fig. 57) volgt

$Cos.NG \times Cos.LG = Cos.LN$ of $Cos.\mu Cos.\lambda = Sin.\alpha$,

en

$Sin.NG \times Cos.LG = Sin.LN\ Cos.LNG$ of $Sin.\mu Cos.\lambda = Cos.\alpha Cos.\phi$,

en stellen wij tevens voor $Cos.x$ de vroeger gevondene waarde, dan komt er

$$\left.\begin{array}{l} \delta A = Km\,(Cos.\phi Cos.\alpha Sin.\beta + Sin.\alpha Cos.\beta)^2 Sin.\alpha\, \delta\phi \\ \text{en} \\ \delta B = Km\,(Cos.\phi\, Cos.\alpha Sin.\beta + Sin.\alpha Cos.\beta)^2 Cos.\alpha Cos.\phi \delta\phi \end{array}\right\} (2).$$

Deze vergelijkingen ontwikkelende en integrerende, bekomt men

$$A = K m \left(Cos.^2 \alpha\, Sin.^2 \beta \int Cos.^2 \phi\, \delta\phi + 2 Sin.\, \alpha\, Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta\, Cos\, \beta \int Cos.\, \phi\, \delta\phi + Sin.^2 \alpha\, Cos^2.\, \beta \int \delta\phi\right) Sin.\, \alpha$$

en $$B = K m \left(Cos.^2 \alpha\, Sin.^2 \beta \int Cos.^3 \phi\, \delta\phi + 2 Sin.\, \alpha\, Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \beta \int Cos.^2 \phi\, \delta\phi + Sin.^2 \alpha\, Cos.^2 \beta \int Cos.\, \phi\, \delta\phi\right) Cos.\, \alpha,$$

dat is:

$$A = K m \left(\tfrac{1}{2} Cos.^2 \alpha\, Sin.^2 \beta\, (\phi + Sin.\, \phi\, Cos.\, \phi) + 2 Sin.\, \alpha\, Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \beta\, Sin.\, \phi + Sin.^2 \alpha\, Cos.^2 \beta . \phi\right) Sin.\, \alpha$$

en $$B = K m \left(\tfrac{1}{3} Cos.^2 \alpha Sin.^2 \beta (Sin. \phi Cos.^2 \phi + 2 Sin. \phi) + Sin. \alpha Cos. \alpha Sin. \beta Cos. \beta (\phi + Sin. \phi Cos. \phi) + Sin.^2 \alpha Cos.^2 \beta Sin. \phi\right) Cos. \alpha$$

of, de integralen van $\phi = 0$ af beginnende en, wegens eene volkomene gelijke werking aan de andere zijde des kegels, verdubbelende,

$$\left.\begin{array}{l} A = K m((Cos.^2 \alpha Sin^2. \beta + 2 Sin^2. \alpha\, Cos.^2 \beta)\, \phi + (Cos. \alpha\, Sin. \beta\, Cos.\, \phi + 4\, Sin.\, \alpha\, Cos.\, \beta)\, Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta\, Sin.\, \phi)\, Sin.\, \alpha \\ en B = 2 K m((Cos.^2 \alpha Sin.^2 \beta + Sin^2. \alpha Cos^2. \beta) Sin. \phi + Sin. \alpha Cos. \alpha Sin. \beta Cos. \beta (\phi + Sin. \phi Cos. \phi) - \tfrac{1}{3} Cos^2 \alpha Sin.^2 \beta Sin.^3 \phi) Cos. \alpha \end{array}\right\} (3).$$

Is nu $\beta < \alpha$, dan moet in deze formulen $\phi = \pi$ gesteld worden, als wanneer men bekomt:

$$A = K m\, Sin.\, \alpha\, (Cos^2.\, \alpha\, Sin.^2 \beta + 2 Sin.^2 \alpha\, Cos.^2 \beta)\, \pi = \tfrac{1}{2} K r^2\, \pi\, (Cos.^2 \alpha\, Sin.^2 \beta + 2\, Sin.^2 \alpha\, Cos.^2 \beta)$$

en $$B = 2 K m\, \pi .\, Sin.\, \alpha\, Cos.^2 \alpha\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \beta = K r^2\, \pi\, Cos.^2 .\, \alpha\, Sin.\, \beta\, Cos.\, \beta.$$

Is $\beta > \alpha$, dan moet de waarde van ϕ berekend worden uit de daartoe gevondene formule

$$Cos.\, \phi = -\frac{Tang.\, \alpha}{Tang.\, \beta} = -\frac{Sin.\, \alpha\, Cos.\, \beta}{Cos.\, \alpha\, Sin.\, \beta}.$$

Was, bij voorbeeld, $\beta = 90°$, dan zoude ook $\phi = 90°$ wezen, en A en B zouden zijn

$$A = \tfrac{1}{2} K m\, \pi\, Cos^2 \alpha\, Sin.\, \alpha = \tfrac{1}{4} K r^2\, \pi\, Cos.^2 \alpha,\quad B = \tfrac{4}{3} K m\, Cos.^3 \alpha = \tfrac{2}{3} K r^2 . \frac{Cos.^3 \alpha}{Sin.\, \alpha};$$

wordt $\beta = 180° - \alpha$, dan is $Cos.\, \phi = +1$ en $\phi = 0$, gevolglijk dan ook A en $B = 0$; stelt men $\beta > 180° - \alpha$, dan schokt het bolle opperylak des kegels niet meer tegen de lucht.

Was $\beta = 0$, en dus $\beta < \alpha$, dan moet $\phi = \pi$ genomen worden en dan is $A = K r^2\, \pi\, Sin.^2\, \alpha$, hetwelk als nu

den tegenstand uitdrukt, in het geval dat de kegel in de rigting van zijnen as, met den top vooruit, voortbewogen wordt. Alsdan is de zijdelingsche druk $B = 0$.

Om den tegenstand tegen het bolle oppervlak van eenen regten cilinder te bepalen, neme men in (3) $\alpha = 0$, en in stede van

$n = \frac{r}{2 \, Sin. \, \alpha}$, $n = hr$, zijnde h de hoogte des cilinders; want nu gaat het driehoekje fFC over in een regthoekje, waarvan de inhoud is $hr \delta\phi$. Dus doende vindt men voor

$$\phi = 90^\circ, \; A = 0 \quad \text{en} \quad B = \tfrac{1}{3} K hr \, Sin.^2 \, \beta.$$

CV. Voorstel.

Door F. J. Stamkart.

Een halve bol beweegt zich zoodanig door de lucht, dat de rigting der beweging eenen hoek β maakt, met de loodlijn op het platte vlak, dat den halven bol aan eene zijde bepaalt. Men vraagt naar den tegenstand der lucht, op dat gedeelte van het bolle oppervlak des halven bols, dat tegen de lucht moet indringen? Alles in dezelfde onderstelling als bij het voorgaande voorstel.

Opgelost door F. J. Stamkart.

Oplossing van F. J. Stamkart.

Laat MAB'BA'C (Fig. 58) den halven bol voorstellen, en MW de rigting der beweging, dan is DA'BB'P dat deel van deszelfs oppervlak, dat tegen de lucht indringt. Snijden wij den halven bol door twee vlakken A'B'P en A'B'p, oneindig nabij elkander, en beide regthoekig op het vlak ABC, dan zal door die vlakken van het oppervlak des halven bols een oneindig klein gedeelte afgesneden worden, dat de gedaante A'PB'pA' (Fig. 60) zal hebben; bepalen wij vooreerst het uitwerksel van den tegenstand der lucht op dit oneindig kleine deel A'PB'pA'.

Stellen wij hiertoe voor een oogenblik, dat de tegenstand der lucht tegen A'PB'pA' (Fig. 60) in de rigting RP (Fig. 58) plaats hebbe, dan zal WC (Fig. 59) de rigting zijn, onder welke het vierhoekje DCcd (Fig. 60) dien tegenstand ondervindt. Zij nu r de straal des bols en in Fig. 58 *hoek* $DMP = \phi$, dan is, omdat *hoek* $NMW =$ *hoek* $AMD = \beta$ is, *hoek* $NMP = \beta + \phi - 90^\circ$, *hoek* $PMW =$ *hoek* $RPW = 90^\circ - \phi$,

hoek PMB $= 180° - (\beta + \phi)$ en *hoek* DMC $= 90° - \beta$; zij verder in Fig. 59 *hoek* B'MC $= \alpha$, *hoek* CMD $= \delta\alpha$, dan is *boog* CD $= r\delta\alpha$, FC $= r\,Sin.\,\alpha$; in Fig. 60 is dan het boogje Co $= r\,Sin.\,\alpha\delta\phi$ en gevolgelijk

$$Inh.\ \mathrm{DCcd} = r^2\ \delta\phi\ Sin.\ \alpha\,\delta\alpha.$$

Daar nu de rigting van den tegenstand WC met het boogje CD en dus ook met het regthoekje DC*cd* eenen hoek α maakt, zoo is de tegenstand der lucht, regthoekig op DC*cd*

$$\mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.\ \alpha\delta\alpha.\times Sin.^2\,\alpha = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.^3\,\alpha\delta\alpha,$$

K hier dezelfde beteekenis hebbende, als in de oplossing van het voorgaande voorstel. Dit geeft, indien wij dezen tegenstand beschouwen, als op het punt M te werken, en in twee verschillende drukkingen ontbinden, waarvan de eene, die wij δx zullen noemen, in de rigting PM op het punt M werkt, terwijl de andere, die wij door δy voorstellen, in de rigting B'M op het punt M werkt,

$$\delta x = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.^3\alpha\,\delta\alpha \times Sin.\,\alpha = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.^4\alpha\,\delta\alpha$$

en $\delta y = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.^3\alpha\,\delta\alpha \times Cos.\,\alpha = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi.\ Sin.^3\alpha\,Cos.\,\alpha\delta\alpha$,

gevolgelijk verkrijgen wij, ten opzigte van α integrerende,

$$x = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi \int Sin.^4\alpha\,\delta\alpha$$
$$= \mathrm{K}r^2\,\delta\phi\,(\tfrac{3}{8}\alpha - \tfrac{3}{8}\,Sin.\,\alpha\,Cos.\,\alpha - \tfrac{1}{4}Sin.^3\,\alpha\,Cos.\,\alpha + \mathrm{C}),$$
$$y = \mathrm{K}r^2\,\delta\phi \int Sin.^3\alpha\,Cos.\,\alpha\delta\alpha$$
$$= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{K}r^2\,\delta\phi\,(Sin.^4\alpha + \mathrm{C}');$$

of nemende deze integralen van $\alpha = 0$ tot $\alpha = \pi$

$$x = \tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\,\delta\phi \quad \text{en} \quad y = 0.$$

Daar x nu de geheele tegenstand is, die het bolvormige strookje A'pB'pA' in de rigting PR (Fig. 58) ondervindt, zoo is het ligt in te zien, dat die tegenstand, als de beweging plaats heeft in de rigting PW', zal uitgedrukt worden door

$$x\ Cos.^2\ \mathrm{W'PR} = \tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\ Sin.^2\,\phi\,\delta\phi.$$

Ontbinden wij nu dezen druk weder in twee anderen, namelijk in eene δA op M (Fig. 58) volgens CM, en eene δB op M volgens BM werkende, dan is, omdat *hoek* PMB $= 180° - (\beta + \phi)$ is,

$$\delta\mathrm{A} = \tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\ Sin.\ (\beta + \phi)\ Sin.^2\,\phi\,\delta\phi$$

en $$\delta\mathrm{B} = -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\ Cos.\ (\beta + \phi)\ Sin.^2\,\phi\,\delta\phi;$$

door ontwikkeling van $Sin.\ (\beta + \phi)$ en $Cos.\ (\beta + \phi)$ veranderen deze uitdrukkingen in

$$\delta\mathrm{A} = \tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\,(Sin.\,\beta\,Sin.^2\,\phi\,Cos.\,\phi\,\delta\phi + Cos.\,\beta\,Sin.^3\,\phi\,\delta\phi),$$
$$\delta\mathrm{B} = -\tfrac{3}{8}\,\mathrm{K}r^2\,\pi\,(Cos.\,\beta\,Sin.^2\,\phi\,Cos.\,\phi\,\delta\phi - Sin.\,\beta\,Sin.^3\,\phi\,\delta\phi);$$

waarvan de integralen, zoodanig gewijzigd, dat zij voor $\phi = 0$ verdwijnen, zijn

$$A = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi\left\{\tfrac{1}{3}Sin.\beta Sin.^3\phi - \tfrac{1}{3}Cos\,\beta Sin.^2\phi Cos.\phi + \tfrac{2}{3}Cos.\beta(1 - Cos.\phi)\right\}$$

en $$B = -\tfrac{1}{8}Kr^2\pi\left\{\tfrac{1}{3}Cos.\beta Sin\,^3\phi + \tfrac{1}{3}Sin.\beta Sin.^2\,\phi Cos.\phi - \tfrac{2}{3}Sin.\beta(1 - Cos.\phi)\right\};$$

stellen wij hierin eindelijk $\phi = hoek$ DMB $= 180° - \beta$, dan komt er voor den gevraagden tegenstand der lucht, volgens twee regthoekige assen ontbonden,

$$A = \tfrac{1}{8}\,Kr^2\,\pi\,(1 + Cos.\,\beta)^2$$

en $$B = \tfrac{1}{4}\,Kr^2\,\pi\,(1 + Cos.\,\beta)\,Sin.\,\beta.$$

Het zamengesteld vermogen van A en B, dat is, de geheele tegenstand, wordt dus na behoorlijke herleiding

$$\sqrt{(A^2 + B^2)} = \tfrac{1}{8}\,Kr^2\,\pi(1 + Cos.\beta)\,\sqrt{(5 + 2\,Cos.\beta - Cos.^2\beta)};$$

terwijl de hoek δ, welke deze zamengestelde kracht met de lijn CM maakt, gevonden wordt door de formule

$$Tang.\,\delta = \frac{B}{A} = \frac{2\,Sin.\,\beta}{1 + Cos.\,\beta} = 2\,Tang.\,\tfrac{1}{2}\,\beta.$$

Is $\beta = 0$, dan komt er, voor den tegenstand tegen eenen halven bol of, zoo men wil, tegen den geheelen bol

$$A = \tfrac{1}{2}\,Kr^2\,\pi,\quad B = 0 \quad\text{en}\quad \delta = 0;$$

voor $\beta = 90°$, wordt

$$A = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi,\ B = \tfrac{1}{4}Kr^2\pi,\ \sqrt{(A^2 + B^2)} = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi\sqrt{5}\ \text{en}\ Tang.\,\delta = 2.$$

CVI. Voorstel.

Door C. van Schaick.

Van drie getallen x, y *en* z, *is:* xy + z = 100, yz + x = 199 *en* zx + y = 124, *welke drie getallen zijn dit?* (*).

Opgelost *door* C. van Schaick, C. Brunings, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, W. G. van Delden, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, I. Sjoenis, M. G. Snoek, L. J. Ulman *en* A. Vos.

1. Oplossing *van* C. van Schaick.

Uit de opgegevene vergelijkingen volgt terstond:

$$z = 100 - xy,\ z = \frac{199 - x}{y}\ \text{en}\ z = \frac{124 - y}{x},$$

derhalve is

$$100 - xy = \frac{199 - x}{y}\ \text{en}\ \frac{199 - x}{y} = \frac{124 - y}{x};$$

(*) P. Halcken, *Zinnen-Confect*, No. 186.

uit de eerste dezer vergelijkingen x afzonderende, verkrijgt men

$$x = \frac{100y - 199}{y^2 - 1},$$

en deze waarde van x in de laatste vergelijking overbrengende, komt er

$$\frac{199 - \frac{100y - 199}{y^2 - 1}}{y} = \frac{124 - y}{\frac{100y - 199}{y^2 - 1}}$$

of na behoorlijke herleiding

$$y^5 - 124y^4 - 2y^3 + 20148y^2 - 49600y + 19776 = 0.$$

Men vindt, op de gewone wijze, dat de eenige meetbare wortel van deze vergelijking is $y = 12$; hierdoor vindt men verder terstond $x = 7$ en $z = 16$.

II. Oplossing *van* C. Brunings.

De som van de twee eerste der opgegevene vergelijkingen is

$$y(x + z) + x + z = 299$$

of

$$(y + 1)\ (x + z) = 299;$$

nemen wij nu aan, dat x, y en z meetbare getallen moeten zijn, dan moeten $y + 1$ en $x + z$ elk eene van twee factoren zijn, waarin het getal 299 moet kunnen ontbonden worden. De eenige mogelijke ontbindingen van dat getal zijn 1×299, of 13×23, en er kunnen slechts de vier volgende veronderstellingen plaats hebben:

$x + z = 299$ en $y + 1 = 1$ . . . . . . *(a)*,
$x + z = 1$ — $y + 1 = 299$ . . . . . *(b)*,
$x + z = 13$ — $y + 1 = 23$ . . . . . *(c)*,
$x + z = 23$ — $y + 1 = 13$ . . . . . *(d)*.

Uit de drie eerste veronderstellingen zoude volgen $y = 0$, $y = 298$ of $y = 22$, doch eene dezer waarden voor y in de opgegevene vergelijkingen substituerende, zoude men tusschen de twee onbekenden x en z drie vergelijkingen bekomen, die met elkander strijdig waren. De veronderstelling *(d)* echter geeft $y = 12$, waardoor de opgegevene vergelijkingen zouden worden

$$12x + z = 100,\quad 12z + x = 199 \quad \text{en} \quad xz = 112;$$

daar nu met $y = 12$ volgens *(d)* moet overeenstemmen $x + z = 23$, vindt men door aftrekking dadelijk

waarvan de integralen, zoodanig gewijzigd, dat zij voor $\phi = 0$ verdwijnen, zijn

$$A = \tfrac{3}{8}Kr^2\pi\left\{\tfrac{1}{3}Sin.\beta Sin.^3\phi - \tfrac{1}{3}Cos\,\beta Sin.^2\phi Cos.\phi + \tfrac{2}{3}Cos.\beta(1 - Cos.\phi)\right\}$$

en $$B = -\tfrac{3}{8}Kr^2\pi\left\{\tfrac{1}{3}Cos.\beta Sin^3\phi + \tfrac{1}{3}Sin.\beta Sin.^2\phi Cos.\phi - \tfrac{2}{3}Sin.\beta(1 - Cos.\phi)\right\};$$

stellen wij hierin eindelijk $\phi =$ *hoek* DMB $= 180° - \beta$, dan komt er voor den gevraagden tegenstand der lucht, volgens twee regthoekige assen ontbonden,

$$A = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi(1 + Cos.\beta)^2$$

en $$B = \tfrac{1}{4}Kr^2\pi(1 + Cos.\beta)\,Sin.\beta.$$

Het zamengesteld vermogen van A en B, dat is, de geheele tegenstand, wordt dus na behoorlijke herleiding

$$\sqrt{(A^2 + B^2)} = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi(1 + Cos.\beta)\sqrt{(5 + 2Cos.\beta - Cos.^2\beta)};$$

terwijl de hoek δ, welke deze zamengestelde kracht met de lijn CM maakt, gevonden wordt door de formule

$$Tang.\delta = \frac{B}{A} = \frac{2\,Sin.\beta}{1 + Cos.\beta} = 2\,Tang.\tfrac{1}{2}\beta.$$

Is $\beta = 0$, dan komt er, voor den tegenstand tegen eenen halven bol of, zoo men wil, tegen den geheelen bol

$$A = \tfrac{1}{2}Kr^2\pi,\quad B = 0 \quad\text{en}\quad \delta = 0;$$

voor $\beta = 90°$, wordt

$$A = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi,\ B = \tfrac{1}{4}Kr^2\pi,\ \sqrt{(A^2 + B^2)} = \tfrac{1}{8}Kr^2\pi\sqrt{5}\ \text{en}\ Tang.\delta = 2.$$

CVI. Voorstel.

Door C. van Schaick.

Van drie getallen x, y *en* z, *is:* $xy + z = 100$, $yz + x = 199$ *en* $zx + y = 124$, *welke drie getallen zijn dit?* (*).

Opgelost *door* C. van Schaick, C. Brunings, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, W. G. van Delden, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, I. Sjoenis, M. G. Snoer, L. J. Ulman *en* A. Vos.

1. Oplossing *van* C. van Schaick.

Uit de opgegevene vergelijkingen volgt terstond:

$$z = 100 - xy,\ z = \frac{199 - x}{y} \ \text{en}\ z = \frac{124 - y}{x},$$

derhalve is

$$100 - xy = \frac{199 - x}{y} \ \text{en}\ \frac{199 - x}{y} = \frac{124 - y}{x};$$

(*) P. Halcken, *Zinnen-Confect*, No. 186.

uit de eerste dezer vergelijkingen x afzonderende, verkrijgt men

$$x = \frac{100y - 199}{y^2 - 1},$$

en deze waarde van x in de laatste vergelijking overbrengende, komt er

$$\frac{199 - \frac{100y - 199}{y^2 - 1}}{y} = \frac{124 - y}{\frac{100y - 199}{y^2 - 1}}$$

of na behoorlijke herleiding

$$y^5 - 124y^4 - 2y^3 + 20148y^2 - 49600y + 19776 = 0.$$

Men vindt, op de gewone wijze, dat de eenige meetbare wortel van deze vergelijking is $y = 12$; hierdoor vindt men verder terstond $x = 7$ en $z = 16$.

II. Oplossing van C. Brunings.

De som van de twee eerste der opgegevene vergelijkingen is

$$y(x + z) + x + z = 299$$

of

$$(y + 1)\ (x + z) = 299;$$

nemen wij nu aan, dat x, y en z meetbare getallen moeten zijn, dan moeten $y + 1$ en $x + z$ elk eene van twee factoren zijn, waarin het getal 299 moet kunnen ontbonden worden. De eenige mogelijke ontbindingen van dat getal zijn 1×299, of 13×23, en er kunnen slechts de vier volgende veronderstellingen plaats hebben:

$$x + z = 299 \quad \text{en} \quad y + 1 = 1 \ldots\ldots (a),$$
$$x + z = 1 \quad - \quad y + 1 = 299 \ldots\ldots (b),$$
$$x + z = 13 \quad - \quad y + 1 = 23 \ldots\ldots (c),$$
$$x + z = 23 \quad - \quad y + 1 = 13 \ldots\ldots (d).$$

Uit de drie eerste veronderstellingen zoude volgen $y = 0$, $y = 298$ of $y = 22$, doch eene dezer waarden voor y in de opgegevene vergelijkingen substituerende, zoude men tusschen de twee onbekenden x en z drie vergelijkingen bekomen, die met elkander strijdig waren. De veronderstelling (d) echter geeft $y = 12$, waardoor de opgegevene vergelijkingen zouden worden

$$12x + z = 100, \quad 12z + x = 199 \quad \text{en} \quad xz = 112;$$

daar nu met $y = 12$ volgens (d) moet overeenstemmen $x + z = 23$, vindt men door aftrekking dadelijk

$$11x = 77, \quad 11z = 176,$$

waaruit $x = 7$ en $z = 16$,

welke waarden tevens aan de vergelijking $xz = 112$ voldoen; derhalve zijn $x = 7$, $y = 12$ en $z = 16$, de eenige meetbare waarden, die aan de voorgestelde vergelijkingen kunnen beantwoorden.

CVII. Voorstel.

Door M. de Léon.

Van eenen gelijkbeenigen driehoek is de som bekend van de Tangenten der drie hoeken. Men vraagt, hieruit de hoeken zelve te vinden?

Opgelost *door* C. J. Bolten, L. J. Ulman, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. Brunings, W. G. van Delden, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, A. Vos *en* M. de Leon.

Oplossing *van* C. J. Bolten.

Stellende de gegevene som der Tangenten door a, den tophoek door 2ϕ en bij gevolg elk der hoeken aan de bazis door $90° - \phi$ voor, dan hebben wij de vergelijking

$$Tang.\, 2\phi + 2\, Tang.\, (90° - \phi) = a;$$

maar nu is

$$Tang.\, 2\phi = \frac{2\, Tang.\, \phi}{1 - Tang.^2 \phi}$$

en $$Tang.\, (90° - \phi) = Cot.\, \phi = \frac{1}{Tang.\, \phi},$$

derhalve wordt de vergelijking

$$\frac{2\, Tang.\, \phi}{1 - Tang.^2 \phi} + \frac{2}{Tang.\, \phi} = a,$$

of na behoorlijke herleiding

$$Tang.^3\, \phi - Tang.\, \phi + \frac{2}{a} = 0,$$

waaruit, wanneer a in getallen gegeven is, $Tang.\, \phi$ kan berekend worden.

Aanmerking. Dewijl de derdemagtsvergelijking: $x^3 - px + q = 0$ drie bestaanbare wortels, of slechts een zoodanigen wortel heeft, naar gelang $\frac{1}{4}\, q^2 < \frac{1}{27}\, p^3$ of $\frac{1}{4}\, q^2 > \frac{1}{27}\, p^3$ is, zoo zal men voor $Tang.\, \phi$ drie bestaanbare waarden of slechts eene dergelijke waarde verkrijgen, naar gelang $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{27}$, of

$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{27}$, dat is: naar gelang $a > 3\sqrt{3}$, of $a < 3\sqrt{3}$ is; bovendien weet men, dat er altijd eene bestaanbare waarde voor *Tang.* ϕ zal zijn, die het tegengestelde teeken heeft van den bekenden term $\frac{2}{a}$.

Is derhalve a positief en grooter dan $3\sqrt{3}$, zoo heeft men voor *Tang.* ϕ drie bestaanbare waarden, waarvan de eene negatief is, en de beide anderen positief zijn.

Is $a = 3\sqrt{3}$, zoo heeft *Tang.* ϕ twee gelijke waarden $\frac{1}{\sqrt{3}}$ en eene derde $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Is a positief en kleiner dan $3\sqrt{3}$, zoo heeft *Tang.* ϕ slechts eene bestaanbare waarde en deze is negatief.

Is a negatief en grooter dan $3\sqrt{3}$, zoo heeft *Tang.* ϕ weder drie bestaanbare waarden, waarvan de eene positief is en de anderen negatief zijn.

Is $a = -3\sqrt{3}$, zoo heeft *Tang.* ϕ twee gelijke waarden $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ en eene derde $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Is eindelijk a negatief en kleiner dan $3\sqrt{3}$, zoo heeft *Tang* ϕ slechts eene bestaanbare waarde en deze is positief.

Wilde men eene negatieve waarde voor *Tang.* ϕ gebruiken, dan zou $\phi > 90°$ en dus de tophoek of $2\phi > 180°$ worden, zoodat men dan geen eigenlijk antwoord op de vraag zoude verkrijgen. Meet men echter den tophoek uitwendig, dat is, neemt men deszelfs aanvulsel tot 360°, en beschouwt men tevens de hoeken aan de bazis als negatieve hoeken, dan zullen ook de antwoorden, die uit de negatieve waarden van *Tang.* ϕ voortvloeijen, aan de vraag voldoen.

Begeerde men $a = \infty$ te nemen, dan zoude de vergelijking worden

$$Tang.^3\phi - Tang.\phi = 0,$$

waaruit *Tang.* $\phi = 0$ of *Tang.* $\phi = \pm 1$; voor *Tang* $\phi = 0$, zoude men eenen oneigenlijken driehoek verkrijgen, waarvan de opstaande zijden loodregt op de bazis staan; voor *Tang.* $\phi = +1$, verkrijgt men eenen gelijkbeenigen driehoek waarvan de tophoek regt is; voor *Tang.* $\phi = -1$, verkrijgt men eenen dergelijken driehoek, maar waarvan de tophoek uitwendig moet

gemeten en de hoeken aan de bazis als negatief moeten aangezien worden.

Begeerde men ten slotte $a=0$ te nemen, dan werd de vergelijking

$$Tang.^3 \phi - Tang. \phi + \infty = 0,$$

waarvan alleen $Tang. \phi = -\infty$ kan voldoen; hiervoor verkrijgt men alleen eenen oneigenlijken driehoek, waarvan de opstaande zijden op de bazis liggen.

CVIII. Voorstel.

Door M. de Leon.

Op eenen bol van gegeven straal eenen bolvormigen driehoek beschreven zijnde, welks zijden 60°, 50° en 30° zijn, vraagt men den inhoud van dien driehoek te berekenen?

Opgelost door L. J. Ulman, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, A. Vos, H. van Assendelft de Coningh, W. G. van Delden, D. van Lankeren Matthes en M. de Leon.

Oplossing van L. J. Ulman.

Wanneer a, b en c, de zijden van eenen bolvormigen driehoek beteekenen, s derzelver halve som en ω het spherisch exces, dan hebben wij (zie J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* 3de druk § 1236.)

$$Tang.\tfrac{1}{4}\omega = \sqrt{\{Tang.\tfrac{1}{2}s.\,Tang.\tfrac{1}{2}(s-a)\,Tang.\tfrac{1}{2}(s-b)\,Tang.\tfrac{1}{2}(s-c)\}}.$$

Voorts hebben wij

$$Inh.\ drieh. = \frac{\omega}{720°} \times \text{oppervl. van den Bol},$$

maar de straal des bols gelijk r gegeven zijnde, wordt deszelfs oppervlakte door $4r^2\pi$ uitgedrukt; en wanneer wij door ω' de lengte, in straals-eenheden, van den boog ω voorstellen, is $\frac{\omega}{720°} = \frac{\omega'}{4\pi}$; hierdoor wordt

$$Inhoud\ drieh. = \omega' r^2.$$

Ter bepaling nu van ω' hebben wij gegeven: $a=60°$, $b=50°$, $c=30°$, dus $s=70°$, $s-a=10°$, $s-b=20°$, $s-c=40°$: bijgevolg is

$$Tang.\tfrac{1}{4}\omega = \sqrt{\{Tang.\ 35°.\ Tang.\ 5°.\ Tang.\ 10°.\ Tang.\ 20°.\}}.$$

Nu is $Log.\ Tang.\ 35° = 9,8452268 - 10,$
$Log.\ Tang.\ 5° = 8,9419518 - 10,$
$Log.\ Tang.\ 10° = 9,2463188 - 10,$
$Log.\ Tang.\ 20° = 9,5610659 - 10,$

dus $Log.\ Tang.^2\ \tfrac{1}{4}\omega = 17,5945633 - 20,$
$Log.\ Tang.\ \tfrac{1}{4}\omega = 8,7972816 - 10,$
$\tfrac{1}{4}\omega = 3°\ 35'\ 16'',5,$
$\omega = 14°\ 21'\ 6'',$

en eindelijk $\omega' = 0,2504838;$

wij hebben derhalve

$$Inhoud\ drieh. = 0,2504838 \times r^2,$$

zoo dat deze inhoud, ten naastenbij, gelijk is aan dien van het vierkant op den halven straal des bols beschreven.

CIX. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Uit de vergelijking

$$\tfrac{1}{4}\pi + Boog\ Tang. \frac{1-x}{1+x} = 2\ Boog\ Cot.\sqrt{(a^2-b^2)}$$

de waarde van x te vinden, uitgedrukt in a en b?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, F. C. RADIJS, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Stelt men in de opgegevene vergelijking $x = Cot.\phi$, dan verandert dezelve in

$$\tfrac{1}{4}\pi + Boog\ Tang. \frac{1-Cot.\phi}{1+Cot.\phi} = 2\ Boog\ Cot.\sqrt{(a^2-b^2)};$$

maar nu is in het algemeen

$$\frac{1-Cot.\phi}{1+Cot.\phi} = Tang.\ (\phi - \tfrac{1}{4}\pi)$$

en dus

$$Boog\ Tang. \frac{1-Cot.\phi}{1+Cot.\phi} = \phi - \tfrac{1}{4}\pi,$$

derhalve heeft men

$$\phi = 2\ Boog\ Cot.\sqrt{(a^2-b^2)},$$

$$\tfrac{1}{2}\phi = Boog.\ Cot.\sqrt{(a^2-b^2)},$$

$$Cot.\tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{(a^2-b^2)},$$

zoodat $x = Cot.\phi = \dfrac{Cot.^2\tfrac{1}{2}\phi - 1}{2\,Cot.\tfrac{1}{2}\phi} = \dfrac{a^2-b^2-1}{2\sqrt{(a^2-b^2)}}$ is.

CX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke rekenkunstige reeks is het, waarvan de eerste term een vierkant, het gemeen verschil het dubbel van den eersten term, het aantal termen de vierde magt van het gemeen verschil en de som de tweede magt van het aantal termen is?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

De eerste term der reeks zij . . . . x^2,
dan is het gemeen verschil . . . . $2x^2$,
het aantal termen . . . . $16x^8$,
en de som . . . . $256x^{16}$;
substitueert men nu deze waarden in de algemeene formule

$$S = \tfrac{1}{2}n.\ (2a + (n-1)v),$$

waarin S de som, a de eerste term, v het verschil en n het aantal termen eener rekenkunstige reeks beteekent, dan komt er

$$256x^{16} = 8x^8\ (2x^2 + (16x^8 - 1)\,2x^2),$$

$$256x^{16} = 8x^8 \times 32x^{10}$$

of $$256x^{16} = 256x^{18},$$

waaruit volgt $$x^2 = 1,$$

derhalve is de eerste term der reeks 1, het gemeen verschil 2, het aantal termen 16, de som 256, en de reeks zelve is

1, 3, 5, 7, *enz.* . . . . *tot* 31.

CXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt naar drie zevenhoekige getallen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, onder voorwaarde, dat de producten, die men verkrijgt, als men de beide zevenhoekige wortels van elk dier getallen met elkander vermenigvuldigt, wederom eene rekenkunstige reeks daarstellen?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, A. VOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Wanneer de wortel van een n hoekig getal A door x wordt voorgesteld, heeft men, zoo als genoegzaam bekend is,

$$\frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2} = A;$$

lossen wij hieruit x op, dan vinden wij

$$x = \frac{n - 4 \pm \sqrt{\{(n-4)^2 + 8(n-2)A\}}}{2(n-2)},$$

en vermenigvuldigen wij deze twee waarden van x met elkander, dan komt er, na herleiding, voor het product der beide wortels van het n hoekige getal A

$$-\frac{2}{n-2}A.$$

Wanneer nu eenige n hoekige getallen A, A', A″, *enzv.* eene rekenkunstige of andere regelmatige reeks uitmaken, dan zullen de producten $-\frac{2}{n-2}A$, $-\frac{2}{n-2}A'$, $-\frac{2}{n-2}A''$, *enzv.* eene dergelijke reeks vormen. Hieruit blijkt dus, dat de tweede voorwaarde van het voorstel overtollig, of eigenlijk reeds in de eerste voorwaarde opgesloten is, *vermits* niet alleen drie zevenhoekige, maar *een onbepaald aantal* n *hoekige getallen, die eene rekenkunstige, meetkunstige of harmonische reeks uitmaken, de eigenschap bezitten, dat de producten van derzelver positieve en negatieve veelhoekswortels weder eene dergelijke reeks opleveren.*

Het komt er dus nu op aan, drie veelhoekige (hier zevenhoekige) getallen A, A', en A″ te vinden, die eene rekenkunstige reeks daarstellen; zullen die getallen werkelijke veelhoeken zijn, dan moeten, zoo als uit de bovenstaande uitdrukking voor x volgt,

$(n-4)^2+8(n-2)A$, $(n-4)^2+8(n-2)A'$ en $(n-4)^2+8(n-2)A''$ volkomen vierkanten zijn; stellen wij voor hunne vierkantswortels P, P' en P″, dan is

$$(n-4)^2+8(n-2)A=P^2$$

of

$$A=\frac{P^2-(n-4)^2}{8(n-2)};$$

even zoo is

$$A'=\frac{P'^2-(n-4)^2}{8(n-2)},$$

en

$$A''=\frac{P''^2-(n-4)^2}{8(n-2)}.$$

Zijn nu P^2, P'^2, P''^2, getallen, die eene rekenkunstige reeks vormen, dan zullen ook de getallen A, A', A″ zulk eene reeks opleveren. De vraag is dus terug gebragt, tot het vinden van drie volkomen vierkanten in arithmetische progressie. Nu is het meermalen aangetoond, dat men voor de wortels dier vierkanten behoort te nemen (*)

$P=p^2-2pq-q^2$, $P'=p^2+q^2$, $P''=p^2+2pq-q^2$, derhalve stellen de vormen

$$A=\frac{(p^2-2pq-q^2)^2-(n-4)^2}{8(n-2)},$$

(*) Zie onder anderen, het XV. Voorstel, VI. *Deel.*

$$A' = \frac{(p^2+q^2)^2-(n-4)^2}{8(n-2)}$$

en

$$A'' = \frac{(p^2+2pq-q)-(n-4)^2}{8(n-2)},$$

in het algemeen drie n hoekige getallen voor, die eene rekenkunstige reeks maken, en waarvan de n hoekige wortels zijn

$$x = \frac{(n-4) \pm (p^2-2pq-q^2)}{2(n-2)},$$

$$x' = \frac{(n-4) \pm (p^2+q^2)}{2(n-2)},$$

en

$$x'' = \frac{(n-4) \pm (p^2+2pq-q^2)}{2(n-2)}. \; (*)$$

Voor het bijzondere geval van ons voorstel is $n = 7$, nemen wij voorts $p = 3$ en $q = 2$, dan vinden wij voor de gevraagde zevenhoekige getallen

$$A = 1, \quad A' = 4, \quad A'' = 7;$$

en voor hunne wortels

$$x = 1 \text{ en } -\tfrac{2}{5}, \; x' = 1\tfrac{3}{5} \text{ en } -1, \; x'' = 2 \text{ en } -1\tfrac{2}{5}$$

Aanmerking *van* C. J. Bolten. In het V. Voorstel van dit Deel zijn reeds, voor drie zevenhoekige getallen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, de vormen $\tfrac{1}{2}(245p^2-49p+2)$, $\tfrac{1}{2}(845p^2-169p+8)$ en $\tfrac{1}{2}(1445p^2-289p+14)$ gevonden; om dus getallen te verkrijgen, die aan het tegenwoordige voorstel beantwoorden, behoeft men in die vormen slechts eene willekeurige waarde aan p te geven; voor $p = 0$, vindt men, even als boven, de getallen 1, 4 en 7.

CXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Twee geheele getallen te vinden, zoodanig dat, het eerste opgeteld wordende bij deszelfs tweede magt, de som gelijk zij aan de som van het tweede en deszelfs derde magt?

(*) In deze vormen behoeft men voor p en q niet uitsluitend rationale waarden te nemen; men kan namelijk voor p en q waarden nemen, die denzelfden irrationalen vierkantswortel tot gemeenen factor hebben, doch overigens geene irrationaliteit bevatten. Zoo wordt, bijv. $p = 4\sqrt{11}$ en $q = \sqrt{11}$ nemende, $x = 8$ en $-7\tfrac{2}{5}$, $x' = 19$ en $-18\tfrac{2}{5}$, $x'' = -25$ en $+25\tfrac{3}{5}$, $A = 148$, $A' = 874$ en $A'' = 1600$.

OPGELOST *door* C. BRUNINGS, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN, A. VOS *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* C. BRUNINGS.

De begeerde getallen x en y noemende, moet men hebben

$$x + x^2 = y + y^3$$

waaruit door oplossing dezer vergelijking ten opzigte van x, volgt

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{(1 + 4y + 4y^3)}.$$

Daar nu x en y geheele getallen moeten zijn, zoo moet y zoodanige geheele waarden hebben, dat uit $1 + 4y + 4y^3$ den vierkantswortel kan getrokken worden; stel daartoe

$$1 + 4y + 4y^3 = z^2$$

of $$4y(y^2 + 1) = (z + 1)(z - 1),$$

dan moet $4y\,(y^2 + 1)$ in twee factoren kunnen ontbonden worden, die respectievelijk gelijk zijn aan $z + 1$ en $z - 1$. Men kan derhalve stellen

	$z + 1 = 1$	en	$z - 1 = 4y\,(y^2 + 1)$
of	$z + 1 = 2$	—	$z - 1 = 2y\,(y^2 + 1)$
—	$z + 1 = 4$	—	$z - 1 = y\,(y^2 + 1)$
—	$z + 1 = y$	—	$z - 1 = 4\,(y^2 + 1)$
—	$z + 1 = 2y$	—	$z - 1 = 2\,(y^2 + 1)$
—	$z + 1 = 4y$	—	$z - 1 = y^2 + 1$
—	$z + 1 = y^2 + 1$	—	$z - 1 = 4y$
—	$z + 1 = 2(y^2 + 1)$	—	$z - 1 = 2y$
—	$z + 1 = 4(y^2 + 1)$	—	$z - 1 = y$
—	$z + 1 = y(y^2 + 1)$	—	$z - 1 = 4$
—	$z + 1 = 2y(y^2 + 1)$	—	$z - 1 = 2$
—	$z + 1 = 4y\,(y^2 + 1)$	—	$z - 1 = 1$;

welke dezer twaalf stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden men nu ook verkiest op te lossen, zal men voor y geene andere meetbare waarden verkrijgen dan $y = 0$, $y = 1$, of $y = 3$. Ieder van deze waarden van y geeft twee overeenkomstige waarden voor x, zoodat men in het geheel de zes volgende antwoorden verkrijgt:

$y = 0$ en $x = 0$, $y = 0$ en $x = -1$,
$y = 1$ en $x = 1$, $y = 1$ en $x = -2$,
$y = 3$ en $x = 5$, $y = 3$ en $x = -6$.

CXIII. Voorstel.

Door J. de Hoop.

De som der inhouden van twee gelijke middelpunts-driehoeken, in eenen halven cirkel geplaatst, te zamen met het halve vierkant, op de koorde van den halven supplementsboog beschreven, is gelijk aan het vierkant op den straal. Men vraagt naar het meetkunstig bewijs dezer stelling?

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, J. Acquoy, F. C. Radijs, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, J. de Hoop, B. de Jongh, C. F. Julius, J. Sjoenis, L. J. Ulman *en* A. Vos

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Laten AMB en CMD (Fig. 61.) de gelijke middelpunts-driehoeken, in eenen halven cirkel geplaatst, voorstellen, dan is, indien wij MF loodregt op AC stellen, BF de koorde van den halven supplementsboog; voorts BD trekkende, die MF in E snijdt, is EM de hoogte der driehoeken AMB en CMD, zoodat wij hebben

Inh. drieh. AMB + *Inh. drieh.* CMD = AM × EM.

Verder is BF middenevenredig tusschen de geheele middellijn en het stuk EF, derhalve

$$BF^2 = 2\,AM \times EF$$

of

$$\tfrac{1}{2}\,BF^2 = AM \times EF.$$

Door optelling verkrijgen wij dus dadelijk

*Inh.drieh.*AMB+*Inh.drieh.*CMD+$\frac{1}{2}$BF^2=AM(EM+EF)=AM^2

hetgeen bewezen moest worden.

Aanmerkingen *van* J. Acquoy. 1°. Neemt men de tophoeken der twee gelijke middelpunts driehoeken grooter dan regt, dan zal door den supplementsboog verstaan moeten worden de overmaat van den boog, door die middelpunts driehoeken onderspannen wordende, boven den halven omtrek. Waren dus AMD en CMB de gelijke middelpunts driehoeken, dan zou ook nu nog BF de koorde van den halven supplementsboog zijn, en de bewezene stelling blijft dus voor dit geval woordelijk doorgaan.

2°. Stelt men *hoek* AMB = a en neemt men den straal des cirkels als eenheid aan, dan is EM = *Sin.* a, EF = 1 − *Sin.* a, BF = *koorde* (90°. − a) = 2 *Sin.* (45° − $\frac{1}{2}$ a); stelt men deze

waarden; alsmede AM = 1, in de bovenstaande vergelijking

$$\tfrac{1}{2}\,BF^2 = AM \times EF,$$

dan komt er

$$2\,Sin.^2\,(45 - \tfrac{1}{2}\,a) = 1 - Sin.\,a,$$

welke bekende goniometrische formule hierdoor meetkunstig bewezen is.

CXIV. VOORSTEL.

Door J. DE HOOP.

Wanneer men op de middellijn eens cirkels eenen gelijkbeenigen driehoek beschrijft, waarvan de tophoek scherp is, en welks top alzoo buiten den cirkel komt, dan zal de regthoek uit het opstaande been des driehoeks met de koorde, die door den cirkel van dat been wordt afgesneden, gelijk zijn aan tweemaal het vierkant op den straal. Men vraagt naar het meetkunstig bewijs hiervan?

OPGELOST *door* J. DE HOOP, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, G. GRAAFLAND, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, J. SJOERNIS, M. G. SNOER, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* J. DE HOOP.

Zij ABC (Fig. 62) de voorgestelde driehoek, trek dan den straal MD, zoo is CMD een gelijkbeenige driehoek, wiens hoek C, een der hoeken aan de bazis, tevens een hoek aan de bazis is van den driehoek ABC; de driehoeken CMD en ABC zijn derhalve gelijkvormig en bij gevolg heeft men de evenredigheid

$$MD : BC = CD : AC$$

of, den straal des cirkels door R voorstellende,

$$R : BC = CD : 2R,$$

waaruit dadelijk volgt

$$BC \times CD = 2R^2,$$

hetgeen bewezen moest worden.

CXV. VOORSTEL.

Door J. DE HOOP.

Wanneer men op de middellijn eens cirkels eenen gelijkbeenigen driehoek beschrijft, waarvan de tophoek stomp is en welks top alzoo binnen den cirkel valt, dan zal de regt-

hoek, uit het opstaande been des driehoeks met de koorde, waarvan dat been een deel is, gelijk zijn aan tweemaal het vierkant op den straal. Men vraagt het meetkunstig bewijs hiervan?

Opgelost *door* J. de Hoop, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, S. T. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, G. Graafland, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, J. Sjoenis, M. G. Snoer, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. de Hoop.

Zij ABC (Fig. 63) de voorgestelde driehoek; verleng dan een der beenen, bijv. BC tot aan den omtrek des cirkels in D, en trek den straal MD, zoo zijn ABC en CMD weder, even in het voorgaande voorstel, twee gelijkbeenige driehoeken, die een der hoeken aan de basis C gemeen hebben; deze driehoeken zijn dus gelijkvormig en men heeft de evenredigheid

$$MD : BC = CD : AC$$

of, den straal des cirkels R noemende,

$$R : BC = CD : 2R,$$

waaruit volgt

$$BC \times CD = 2R^2,$$

hetgeen te bewijzen was.

CXVI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt eenen driehoek te berekenen en te construeren, als gegeven zijn, eene zijde met een der aanliggende hoeken, benevens den straal van den ingeschreven cirkel?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, L. J. Ulman, A. Vos, B. de Jongh, C. Brunings, J. Sjoenis *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Zij ABC (Fig. 64) de begeerde driehoek, waarin, uit het middelpunt O des ingeschreven cirkels, de straal OD loodregt op de gegevene zijde AC is getrokken; laat dan gegeven zijn AC $= a$, *hoek* BAC $= 2\alpha$, OD $= r$ en stellen wij *hoek* ACB $= 2\phi$, zoo is, omdat AO en CO de hoeken BAC en ACB midden doordeelen, *hoek* OAD $= \alpha$ en *hoek* OCD $= \phi$.

Nu is, uit de regthoekige driehoeken OAD en OCD,

$$AD = OD \times Cot.\,OAD = r\,Cot.\,\alpha$$

en
$$CD = OD \times Cot.\,OCD = r\,Cot.\,\phi,$$

waaruit, omdat $AD + CD = AC = a$ is, door optelling volgt

$$a = r\,Cot.\,\alpha + r\,Cot.\,\phi;$$

hieruit vindt men dadelijk

$$Cot.\,\phi = \frac{a}{r} - Cot.\,\alpha.$$

Om deze formule voor berekening door Logarithmen geschikt te maken, kan men stellen

$$\frac{a}{r} = Cot.\,\beta,$$

als wanneer men heeft

$$Cot.\,\phi = Cot.\,\beta - Cot.\,\alpha = \frac{Sin.(\alpha - \beta)}{Sin.\,\alpha\ Sin.\,\beta}.$$

Hierdoor alzoo ϕ en ook $2\,\phi$ bekend zijnde, heeft men van den driehoek eene zijde met de twee aanliggende hoeken bekend, al het overige kan dus door de gewone regels berekend worden.

Om den driehoek te construëren, neme men op het eene been van den gegeven hoek BAC een stuk $AC = a$, deele den hoek BAC door eene lijn AO midden door, trekke op eenen afstand $OD = r$ eene lijn evenwijdig met AC, beschrijve, uit het snijpunt O van deze laatste lijn met de lijn AO, eenen cirkel, die OD tot straal heeft en die de lijnen AC AB zal aanraken, dan zal, indien men uit C, aan dien cirkel, eene raaklijn BC trekt, die AB ergens in B snijdt, ABC de begeerde driehoek zijn.

CXVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De waarde van x te vinden uit de vergelijking

$$Nep.\ Log.\ \frac{a + x^2}{a + x} = b?$$

OPGELOST *door* W. J. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Het grondtal van het Neperiaansche Logarithmen stelsel

door e voorstellende, kan men voor de opgegevene vergelijking schrijven

$$\frac{a+x^2}{a+x} = e^b,$$

dus is $$a + x^2 = ae^b + xe^b$$

of $$x^2 - xe^b = ae^b - a;$$

uit deze vierkants-vergelijking de waarde van x oplossende, komt er

$$x = \tfrac{1}{2}\{e^b \pm \sqrt{(e^{2b} + 4ae^b - 4a}\}.$$

Aanmerking. Was $a = -1$, dan zou men hebben

$$x = \tfrac{1}{2}\{e^b \pm \sqrt{(e^{2b} - 4e^b + 4)}\}$$

of $$x = \tfrac{1}{2}\{e^b \pm (e^b - 2)\},$$

dat is: $x = e^b - 1$ en $x = 1$.

Deze eerste waarde van x zou men ook verkrijgen, door in de vergelijking zelve, alvorens die op te lossen, $a = -1$ te nemen; men zou alsdan hebben

$$Nep.\ Log.\ \frac{x^2-1}{x-1} = b,$$

dat is $$Nep.\ Log.\ (x+1) = b,$$

waaruit volgt $$x + 1 = e^b$$

en $$x = e^b - 1.$$

Dat hier de tweede waarde van $x = 1$ niet gevonden wordt, is blijkbaar alleen toe te schrijven aan het verkleinen der breuk $\frac{x^2-1}{x-1}$; het is echter even duidelijk, dat aan de vergelijking

$$Nep.\ Log.\ \frac{x^2-1}{x-1} = b$$

voldaan wordt, door $x = 1$ te nemen, want dezelve gaat voor deze waarde van x over in

$$Nep.\ Log.\ \frac{0}{0} = b.$$

CXVIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de integraal te vinden van

$$\partial y = \frac{2x^4 + 2x^2 + 1}{(x^2+1)^3}\,\partial x?$$

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* A. VOS.

I. OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stellen wij vooreerst

$$\frac{2x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^3}=\frac{A}{(x^2+1)^3}+\frac{B}{(x^2+1)^2}+\frac{C}{x^2+1},$$

dan is, na met $(x^2+1)^3$ vermenigvuldigd en de termen verschikt te hebben,

$$Cx^4+(B+2C)x^2+A+B+C=2x^4+2x^2+1,$$

welke vergelijking, identiek zijnde, ons geeft

$$C=2,$$

$$B+2C=2 \text{ en dus } B=-2$$

$$A+B+C=1 \text{ » » } A=1,$$

wij hebben derhalve

$$\frac{2x^4+2x^2+1}{(x^2+1)^3}=\frac{1}{(x^2+1)^3}-\frac{2}{(x^2+1)^2}+\frac{2}{x^2+1}.$$

Wij kunnen alzoo, voor de opgegevene differentiaal-vergelijking, schrijven

$$\delta y=\frac{\delta x}{(x^2+1)^3}-\frac{2\delta x}{(x^2+1)^2}+\frac{2\delta x}{x^2+1},$$

bijgevolg is

$$y=\int\frac{\delta x}{(x^2+1)^3}-2\int\frac{\delta x}{(x^2+1)^2}+2\int\frac{\delta x}{x^2+1}.$$

Nu is (zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Integr. Rek.* § 184. 1ste *Voorb.*)

$$\int\frac{\delta x}{(x^2+1)^3}=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3x}{8(x^2+1)}+\tfrac{3}{8}\,\textit{Boog Tang.}\,x,$$

$$\int\frac{\delta x}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\tfrac{1}{2}\,\textit{Boog Tang.}\,x,$$

$$\int\frac{\delta x}{x^2+1}=\textit{Boog Tang.}\,x,$$

door substitutie van deze waarden hebben wij dus

$$y=\frac{x}{4(x^2+1)^2}-\frac{5x}{8(x^2+1)}+\tfrac{11}{8}\,\textit{Boog Tang.}\,x+C,$$

of ook

$$y=-\frac{(5x^2+3)x}{8(x^2+1)}+\tfrac{11}{8}\,\textit{Boog Tang.}\,x+C.$$

II. Oplossing van L. J. Ulman.

Stellen wij $x = Tang.\ \phi$, dan is

$$x^2 + 1 = Tang.^2\ \phi + 1 = Sec.^2\ \phi,$$

$$2x^4 + 2x^2 + 1 = x^4 + (x^2 + 1)^2 = Tang.^4\ \phi + Sec.^4\ \phi$$

en
$$\delta x = \frac{\delta\phi}{Cos.^2\ \phi} = Sec.^2\ \phi\ \delta\phi;$$

hierdoor verandert de opgegevene differentiaal-formule in

$$\delta y = \frac{Tang.^4\ \phi + Sec.^4\ \phi}{Sec.^6\ \phi} \times Sec.^2\ \phi\ \delta\phi,$$

$$\delta y = \frac{Tang.^4\ \phi + Sec.^4\ \phi}{Sec.^4\ \phi}\ \delta\phi,$$

$$\delta y = Sin.^4\ \phi\ \delta\phi + \delta\phi;$$

derhalve is

$$y = \int Sin.^4\ \phi.\ \delta\phi + \phi + C,$$

maar men heeft (zie I. R. Schmidt, *Diff. en Integr. Rek.* § 245.)

$$\int Sin.^4\ \phi\ \delta\phi = -\tfrac{1}{4}\ Sin.^3\ \phi\ Cos.\ \phi - \tfrac{3}{8}\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + \tfrac{3}{8}\ \phi,$$

dus $y = -\tfrac{1}{4}\ Sin.^3\ \phi\ Cos.\ \phi - \tfrac{3}{8}\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + \tfrac{11}{8}\ \phi + C;$

doch, omdat wij gesteld hebben $x = Tang.\ \phi$, is

$$Sin.^2\phi = \frac{x^2}{x^2+1},\ Cos.^2\phi = \frac{1}{x^2+1},\ Sin.\phi Cos.\phi = \frac{x}{x^2+1}\ \text{en}\ \phi = Boog Tang. x$$

en hierdoor vinden wij

$$y = -\tfrac{1}{4}.\frac{x^3}{(x^2+1)^2} - \tfrac{3}{8}.\frac{x}{x^2+1} + \tfrac{11}{8}\ Boog\ Tang.\ x + C$$

of
$$y = -\frac{(5x^2+3)x}{8(x^2+1)^2} + \tfrac{11}{8}\ Boog\ Tang.\ x + C,$$

even als in de vorige oplossing gevonden is.

CXIX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De formule $\delta y = \dfrac{2e^x}{1 - e^{2x}}\ \delta x$ *te integreren, waarin e het grondtal van het Neperiaansch Logarithmenstelsel beteekent?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Om de opgegevene formule te integreren, stelle men

$$e^x = z,$$

dan is $$x = Nep.\ Log.\ z$$
en $$\delta x = \frac{\delta z}{z},$$
waardoor de formule verandert in
$$\delta y = \frac{2z}{1-z^2} \times \frac{\delta z}{z} = \frac{2\delta z}{1-z^2} = \frac{\delta z}{1+z} + \frac{\delta z}{1-z};$$
derhalve hebben wij
$$y = \int \frac{\delta z}{1+z} + \int \frac{\delta z}{1-z},$$
dat is: $y = Nep.\ Log.\ (1+z) - Nep.\ Log.\ (1-z) + Nep.\ Log.\ C$;

of $$y = Nep.\ Log.\ C.\frac{1+z}{1-z};$$
schrijven wij hierin voor z weder hare waarde e^x, dan komt er eindelijk
$$y = Nep.\ Log.\ C.\frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

CXX. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Wanneer men uit een gegeven punt A (Fig. 65) *regte lijnen* AB *trekt, die eene gegevene lijn* PQ *in* B *snijden; wanneer men vervolgens uit de punten* B *loodlijnen* BM *op de lijnen* AB *opregt, en overal* BM : AB $= n : 1$ *neemt, begeert men de meetkunstige plaats van de punten* M *te vinden?*

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Nemen wij de gegevene lijn PQ (Fig. 65) als as der x, en eene lijn AR, uit het gegeven punt A loodregt door PQ getrokken, als as der y aan; zij derhalve OC $= x$, CM $= y$ en laat OA $= a$ gegeven zijn, dan heeft men, wegens de gelijkvormigheid der regthoekige driehoeken OAB en OBM,
$$BM : AB = MC : OB$$
of $$n : 1 = y : OB,$$
waaruit volgt OB $= \frac{y}{n}$ en BC $=$ OC $-$ OB $= x - \frac{y}{n}$;

uit de genoemde gelijkvormige driehoeken heeft men nog

$$BM : AB = BC : AO$$

of $$n : 1 = x - \frac{y}{n} : a,$$

waaruit volgt $$n^2a = nx - y$$

of $$y = nx - n^2a,$$

welke vergelijking, van den eersten graad zijnde, aantoont, dat de gezochte meetkunstige plaats eene regte lijn is.

Wij hadden de loodlijn BM′ ook aan de andere zijde van AB kunnen oprigten; in dat geval zouden wij, op dezelfde wijze als boven, uit de gelijkvormigheid der driehoeken OAB en C′BM′, door $OC' = -x$ en $C'M' = -y$ te stellen, verkrijgen $$y = -nx - n^2a,$$

zoodat de meetkunstige plaats der punten M, indien men de loodlijnen BM ter wederzijde van AB oprigt, uitgedrukt wordt door de vergelijking

$$y = \pm nx - n^2 a,$$

die een stelsel van twee regte lijnen aanduidt.

Voor $x = 0$, wordt $y = -n^2a$; de beide regte lijnen snijden alzoo, de as der y in een zelfde punt S beneden PQ, zoodanig dat $OS = n^2a$ is.

Voor $y = 0$, wordt $x = \pm na$; alzoo snijden de lijnen de as der x in de punten F en F′ ter wederzijde van het punt O op eenen afstand na gelegen.

Men behoeft dus slechts $OS = n^2a$, $OF = OF' = na$ te nemen, en de lijnen SF en SF′ te trekken, dan zullen deze lijnen de gevraagde meetkunstige plaats zijn.

CXXI. VOORSTEL.

Door H. A. Hartogh.

Men begeert twee of meer regthoekige driehoeken te construeren, die eene zelfde gegevene lijn tot omtrek hebben, maar wier inhouden verschillend zijn?

Opgelost *door* H. A. Hartogh, C. Brunings, M. G. Snoer, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos, D. van Lankeren Matthes *en* J. Sjoenis.

I. Oplossing *van* H. A. Hartogh.

Zij AB (Fig. 66) de gegeven omtrek, dan trekke men uit A eene lijn AC, die met AB eenen willekeurigen hoek maakt,

neme op dezelve eerst een stuk AD naar welgevallen, vervolgens een stuk DF grooter dan AD; voorts beschrijve men op DF, als middellijn, eenen halven cirkel, plaatse daarin eene koorde DE = AD, trekke EF en make FG = EF; eindelijk trekke men GB en evenwijdig met dezelve FI en DH, dan zal de lijn AB in drie deelen verdeeld zijn, die de zijden zullen zijn van eenen regthoekigen driehoek, HI tot hypothenusa en AH en IB tot regthoekszijden hebbende. Want de driehoek DEF is regthoekig; AH, HI en IB zijn evenredig met deszelfs zijden; de driehoek, uit deze lijnen zamengesteld, moet dus gelijkvormig met den driehoek DEF en bijgevolg insgelijks regthoekig wezen.

Daar nu de stukken AD en DF geheel willekeurig genomen zijn, zal men, door derzelver verhouding anders te nemen, telkens op eene andere wijze de lijn AB in drie deelen verdeelen kunnen, die de zijden van eenen regthoekigen driehoek zijn; en men kan dus, door de opgegevene constructie, een oneindig aantal regthoekige driehoeken construeren, die alle denzelfden omtrek AB hebben, doch verschillend van inhoud moeten wezen, omdat, indien de omtrek en de inhoud van een regthoekigen driehoek gegeven waren, de geheele driehoek bepaald zou zijn en er dus geene willekeurige verhouding tusschen AH en HI, dat is: tusschen AD en DF, zou kunnen aangenomen worden.

II. Oplossing *van* C. Brunings.

Zij weder AB (Fig. 67) de gegeven omtrek, dan rigte men uit het uiteinde A eene loodlijn AC op, waarvan de lengte willekeurig, mits kleiner dan de helft van AB, kan genomen worden; dan neme men BD = AC, trekke CD en stelle uit het midden van CD eene loodlijn op dezelve; het snijpunt E van deze loodlijn en de lijn AB vereenige men met het punt C, dan zal AEC een regthoekige driehoek zijn, waarvan de omtrek gelijk is aan de lijn AB, want door de constructie is niet alleen AC = BD, maar ook CE = ED.

Daar de lengte van AC willekeurig genomen kan worden, is het klaar, dat men, door deze constructie, zoo vele regthoekige driehoeken kan verkrijgen als men verlangt, die alle denzelfden omtrek AB hebben, doch verschillend van inhoud zijn.

III. Oplossing van M. G. Snoer.

Zij nogmaals AB (Fig. 68) de gegeven omtrek, dan plaatse men op AB een willekeurige regthoekige driehoek ABC, deele de hoeken A en B midden door en trekke, uit het snijpunt F der deellijnen, FD en FE respectievelijk evenwijdig met AC en BC, dan zal DEF een regthoekige driehoek zijn, die den gegevenen omtrek AB heeft. Want *hoek* AFD = *hoek* FAC = *hoek* FAD zijnde, gelijk mede *hoek* EFB = *hoek* FBC = *hoek* FBE, zoo zijn ADF en BEF gelijkbeenige driehoeken, waarin AD = DF en BE = EF is.

Daar nu de regthoekige driehoek ABC geheel willekeurig genomen is, zal men, door eenen anderen regthoekigen driehoek op AB te plaatsen, telkens eenen anderen regthoekigen driehoek DEF verkrijgen, die echter altijd den gegeven omtrek zal behouden.

Aanmerking. In de tweede oplossing van het CLIII. Voorstel des IV. Deels, vindt men deze zelfde constructie gebruikt, voor het geval dat, behalve de omtrek des regthoekigen driehoeks, ook nog een der scherpe hoeken gegeven was.

CXXII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

In eenen cirkel (Fig. 69) zijn twee koorden AB *en* CD *getrokken, die elkander in* E *snijden. Wanneer nu gegeven is, dat* AE — CE = $4\frac{1}{2}$, DE — BE = 4, *en de som der koorden* $25\frac{1}{2}$ *is, dan vraagt men, de deelen der koorden te berekenen?*

Opgelost *door* A. C. Belinfante, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, G. Graafland, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, C. van Schaick, J. Sjoenis, M. G. Snoer, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* A. C. Belinfante.

Stel CE = x en BE = y, dan is AE = $x + 4\frac{1}{2}$ en DE = $y + 4$; voorts is, volgens de eigenschappen van den cirkel,

$$AE \times BE = CE \times DE$$

of

$$(x + 4\tfrac{1}{2})\, y = x\,(y + 4),$$

waaruit volgt $4\frac{1}{2}y = 4x$

of $y = \frac{8}{9}x.$

Nog is gegeven

$$AE + BE + CE + DE = 25\tfrac{1}{2}$$

of $x + 4\frac{1}{2} + y + x + y + 4 = 25\frac{1}{2},$

dat is: $2x + 2y = 17;$

hierin $y = \frac{8}{9}x$ stellende, komt er

$$2x + \frac{16}{9}x = 17,$$

waaruit volgt $34x = 9 \times 17$

en $x = 4\frac{1}{2};$

derhalve is $y = \frac{8}{9}x = 4,$

zoo dat wij hierdoor vinden

$$AE = x + 4\tfrac{1}{2} = 9,$$
$$BE = y = 4,$$
$$CE = x = 4\tfrac{1}{2}$$
$$DE = y + 4 = 8.$$

CXXIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

In eenen gelijkzijdigen driehoek wordt eenen cirkel beschreven; in elk der hoeken beschrijft men vervolgens eenen kleineren cirkel, die, behalve de beenen van den hoek, ook den eersten cirkel aanraakt; men beschrijft daarna in de hoeken wederom kleinere cirkels, die de beenen der hoeken en de laatstvorige cirkels aanraken; en hiermede stelt men zich voor tot in het oneindige voort te gaan. Welke is dan de betrekking tusschen den inhoud des oorspronkelijken driehoeks en de som der inhouden van het oneindig aantal daarin zoodanig geplaatste cirkels?

OPGELOST door B. LUBBERS, J. AOQUOY, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, L. J. ULMAN, A. VOS, C. J. BOLTEN en M. G. SNOER.

OPLOSSING van B. LUBBERS.

Laat Fig. 70 den gelijkzijdigen driehoek ABC met de daarin beschrevene cirkels P, Q, R, enz. voorstellen. Stellen

wij den straal des cirkels P door r en de zijde des driehoeks door a voor, en nemen wij als genoegzaam bekend aan, dat de loodlijn CD, uit een der hoekpunten van den driehoek op de overstaande zijde vallende, door de punten F en P in drie gelijke deelen verdeeld wordt, dan volgt uit den regthoekigen driehoek ACD

$$AC^2 - AD^2 = CD^2$$

of $$a^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2 = 9r^2,$$

waaruit men vindt $$a = 2r\sqrt{3};$$

derhalve is

$$\textit{Inh. drieh.}\,ABC = \tfrac{1}{2}\,AB \times CD = \tfrac{1}{2}a \times 3r = 3r^2\sqrt{3}.$$

Trekken wij de gemeenschappelijke raaklijn EFG aan de cirkels P en Q, dan is de driehoek CEG met deszelfs ingeschreven cirkel Q eene figuur, die gelijkvormig is aan den driehoek ABC met deszelfs ingeschreven cirkel P; daar nu $CF = \tfrac{1}{3}\,CD$ is, is ook de straal van Q een derde gedeelte van den straal van P; even zoo moet de straal van R een derde gedeelte van den straal van Q zijn, enz.; zoodat de stralen der achtervolgende cirkels, P, Q, R, enz. worden uitgedrukt door de termen der reeks r, $\tfrac{1}{3}r$, $\tfrac{1}{9}r$, *enz.* Wij hebben derhalve voor de inhouden

$$P + Q + R + \textit{enz.} = r^2\pi + \tfrac{1}{9}r^2\pi + \tfrac{1}{81}r^2\pi + \textit{enz.}$$

of, zoo wij de gewone regels voor het sommeren van meetkunstige reeksen toepassen,

$$P + Q + R + \textit{enz.} = \tfrac{9}{8}\,r^2\pi.$$

Nemen wij nu het drievoud dezer uitkomst

$$3P + 3Q + 3R + \textit{enz.} = \tfrac{27}{8}\,r^2\pi$$

en trekken wij daarvan af

$$2P = 2r^2\pi,$$

dan komt er voor de som der inhouden van al de cirkels

$$P + 3Q + 3R + \textit{enz.} = \tfrac{11}{8}\,r^2\pi.$$

Derhalve is

$$\textit{Inh. drieh.} : \textit{Som der cirkels} = 3r^2\sqrt{3} : \tfrac{11}{8}r^2\pi = 24\sqrt{3} : 11\pi$$

of ten naasten bij

$$\textit{Inh. drieh.} : \textit{Som der cirkels} = 6 : 5.$$

CXXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

In eenen gelijkzijdigen driehoek is eenen cirkel beschreven; aan dien cirkel zijn raaklijnen getrokken, evenwijdig met

de zijden des driehoeks, en daardoor zijn van den driehoek drie kleinere gelijkzijdige driehoeken afgesneden; indien men nu verder elk dezer kleinere driehoeken even als den oorspronkelijken driehoek behandelt, en dit zelfde wederom verrigt ten aanzien van de alsdan afgesneden wordende driehoeken, daarmede tot in het oneindige voortgaande, zoo vraagt men de betrekking te vinden, tusschen den inhoud des oorspronkelijken driehoeks en de som der inhouden van het oneindig aantal daarin zoodanig geplaatste cirkels?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat Fig. 71 den gelijkzijdigen driehoek ABC met de daarin beschrevene cirkels P, Q, R, enz. voorstellen, en noemen wij wederom r den straal des cirkels P, dan is, even als in het vorige voorstel

$$\textit{Inh. drieh. } ABC = 3r^2\sqrt{3}.$$

Ook zullen de stralen der achtervolgende cirkels P, Q, R, *enz.*, even als in het vorige Voorstel, door de termen der reeks r, $\frac{1}{3}r$, $\frac{1}{9}r$, *enz.* worden uitgedrukt.

Daar echter elke cirkel hier driemaal zoo dikwijls voorkomt, als de onmiddelijk voorafgaande, zal nu de som der cirkels zijn

$$P + 3Q + 9R + \textit{enz.} = r^2\pi + \tfrac{1}{3}r^2\pi + \tfrac{1}{9}r^2\pi + \textit{enz.}$$

of, het tweede lid dezer vergelijking sommerende,

$$P + 3Q + 9R + \textit{enz.} = \tfrac{3}{2}r^2\pi.$$

Derhalve hebben wij:

$$\textit{Inh. drieh.} : \textit{Som der cirkels.} = 3r^2\sqrt{3} : \tfrac{3}{2}r^2\pi = 2\sqrt{3} : \pi;$$

of ten naasten bij

$$\textit{Inh. drieh.} : \textit{Som der cirkels} = 11 : 10$$

AANMERKING. Indien men de som der eenvoudige reeks van cirkels P, Q, R, *enz.* door S, de som der cirkels, volgens Fig. 70, door S′ en de som der cirkels, volgens Fig. 71, door S″ voorstelt, heeft men, blijkens de twee voorgaande oplossingen,

$$\textit{Inh. drieh.} : S : S' : S'' = 3r^2\sqrt{3} : \tfrac{9}{8}r^2\pi : \tfrac{11}{8}r^2\pi : \tfrac{3}{2}r^2\pi$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{\pi} : 9 : 11 : 12.$$

CXXV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Om eenen gegevenen cirkel wordt eenen gelijkbeenigen driehoek beschreven, waarvan de inhoud een minimum is; vervolgens laat men dezen driehoek om deszelfs loodlijn als as omwentelen, waardoor men eenen bol met eenen omgeschrevenen kegel verkrijgt; indien men nu om dien bol eenen kegel beschrijft, waarvan de inhoud een minimum is, verlangt men het verschil te bepalen van de inhouden der beide alzoo om den bol beschrevene kegels?

OPGELOST *door* S. DIK, CORNSZ., J. AQUOY, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* S. DIK, CORNSZ.

Laat MEE'D (Fig. 72) de gegeven cirkel zijn, waar om een gelijkbeenige driehoek ABC is beschreven, wiens inhoud een minimum is, en welks omwenteling om de loodlijn BD den kegel ABC heeft voortgebragt; laat voorts A'B'C' den kegel zijn, om den bol, door de omwenteling van den cirkel MEE'D voortgebragt, zoodanig beschreven, dat de inhoud van dezen kegel een minimum is, dan zullen wij het verschil van de inhouden der kegels ABC en A'B'C' moeten bepalen.

Indien ABC eenen willekeurigen, om den cirkel beschrevenen, gelijkbeenigen driehoek voorstelt, stelle men $AD = CD = x$, $AB = BC = y$, $ME = MD = r$, dan is, omdat $AE = AD$ is, $BE = y - x$. Voorts is

$$AD : AB = ME : MB$$

of

$$x : y = r : MB,$$

dus

$$MB = \frac{ry}{x}$$

en

$$BD = \frac{ry}{x} + r = \frac{r(x+y)}{x}.$$

Ook is

$$ME : BE = AD : BD$$

$$r : y - x = x : BD$$

dus

$$BD = \frac{x(y-x)}{r}.$$

De gelijkstelling der beide waarden van BD geeft

$$\frac{r(x+y)}{x} = \frac{x(y-x)}{r},$$

waaruit dadelijk gevonden wordt

$$y = x\frac{x^2 + r^2}{x^2 - r^2};$$

en deze waarde van y in eene der bovenstaande uitdrukkingen voor BD substituerende, komt er

$$BD = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2},$$

waardoor men verder verkrijgt

$$\textit{Inh. drieh.}\ ABC = AD \times BD = \frac{2rx^3}{x^2 - r^2}$$

en $$\textit{Inh. kegel}\ ABC = \tfrac{1}{3}\,AD^2\pi \times BD = \frac{2\pi\, rx^4}{3(x^2 - r^2)}.$$

Opdat nu de driehoek ABC een minimum zij, moet

$$u = \frac{x^3}{x^2 - r^2}$$

een minimum zijn; hiertoe het eerste en tweede differentiaal quotient opmakende en $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ stellende, vindt men $x^2 = 3r^2$; deze waarde van x^2 maakt $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *positief*, en duidt dus een minimum voor u aan. Stelt men deze waarde van x^2 in de gevondene formule voor BD, dan vindt men BD $= 3r$. Opdat de kegel ABC een minimum zij, moet

$$u' = \frac{x^4}{x^2 - r^2}$$

een minimum wezen; hiertoe $\frac{\partial u'}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ opmakende en stellende $\frac{\partial u'}{\partial x} = 0$, vindt men daaruit $x^2 = 2r^2$, welke waarde van x^2 in $\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}$ gesubstitueerd eene *positieve* waarde geeft en dus een minimum aanduidt. Stelt men $x^2 = 2r^2$, in de gevondene formule voor BD, dan komt er BD $= 4r$.

Neemt men dus in de figuur BD $= 3r$, B'D $= 4r$, dan zullen ABC en A'B'C' de beide in het voorstel bedoelde kegels zijn, waarvan men de inhouden terstond vindt, door in de bovenstaande formule voor den inhoud des kegels beurtelings $x^2 = 3r^2$ en $x^2 = 2r^2$ te stellen, waardoor men vindt

$$\textit{Inh. kegel } ABC = 3\pi r^3$$
$$\textit{Inh. kegel } A'B'C' = \tfrac{8}{3}\pi r^3;$$

het gevraagde verschil is alzoo $\frac{1}{3}\pi r^3$, of het vierde gedeelte van den bol om welken de beide kegels beschreven zijn, terwijl de inhouden der beide kegels tot elkander in reden zijn als 9 tot 8.

CXXVI. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Iemand heeft een vierkant getal koeijen en driemaal zoo veel schapen; de vierkantswortel, uit het getal zijner koeijen, is één meer, dan het getal zijner kalveren; en de vierkantswortel, uit het getal zijner varkens, is één minder, dan het getal zijner kalveren. Indien hij nu te samen 113 *stuks vee heeft, hoe veel stuks heeft hij dan van elke soort?*

OPGELOST *door* A. VOLKERSE, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, L. VAN DE KASTEELE, D. VAN LANKEREN MATTHES, E. OLIVIER, Dz., F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS *en* H. W. WEYTINGH.

OPLOSSING *van* A. VOLKERSE.

Stel het aantal koeijen . . . . $= x^2$,
dan is dat der schapen . . . . $= 3x^2$,
dat der kalveren . . . . $= x - 1$
en dat der varkens . . . . $= x^2 - 4x + 4$;
daar nu de som dezer vier aantallen 113 moet opleveren, hebben wij de vergelijking

$$5x^2 - 3x + 3 = 113,$$
$$5x^2 - 3x = 110$$

of $$x^2 - \tfrac{3}{5}x = 22,$$

waaruit volgt $$x = \tfrac{3}{10} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{100} + 22)},$$

dat is: $$x = 5 \text{ of } x = -4\tfrac{2}{5}.$$

Daar alleen de waarde van $x = 5$, hier in aanmerking kan komen, hebben wij

voor het aantal koeijen 25,
— — — schapen 75,
— — — kalveren 4
en — — — varkens . . . . 9.

CXXVII. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Men begeert de zijden van eenen regthoekigen driehoek zoodanig te bepalen, dat de inhoud en de omtrek door een zelfde getal worden uitgedrukt; en dat het verschil der regthoekszijden gelijk is aan den straal des ingeschreven cirkels?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, A. C. BELINFANTE, BAS BACKER, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, C. J. BOLTEN, *en* H. A. HARTOGH.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Daar, van elken driehoek, de inhoud gelijk is aan het product van den omtrek met den halven straal des ingeschreven cirkels, zoo zal van elken driehoek, waarvan de inhoud en omtrek door een zelfde getal uitgedrukt worden, de straal des ingeschreven cirkels door het getal 2 moeten worden uitgedrukt.

Stelt men dus de kortste regthoekszijde des begeerden driehoeks door x voor, dan zal de langste regthoekszijde $x+2$ zijn; en, daar van elken regthoekigen driehoek de hypothenusa gelijk is aan de som der regthoekszijden verminderd met den dubbelen straal des ingeschreven cirkels, zoo zal de hypothenusa van den begeerden driehoek, gelijk zijn aan $2x-2$.

Wij hebben dus de vergelijking

$$(2x-2)^2 = x^2 + (x+2)^2$$

of $$4x^2 - 8x + 4 = x^2 + x^2 + 4x + 4$$

of $$2x^2 = 12x,$$

derhalve is $$x = 6, \text{ of } x = 0.$$

De eerste waarde van x alleen het voorstel in den eigenlijken zin oplossende, zoo heeft men, voor de zijden des begeerden driehoeks

$$x = 6, \quad x+2 = 8 \text{ en } 2x-2 = 10.$$

CXXVIII. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Het getal mijner jaren is een pronikgetal, waarvan het cijfer der eenheden, dat der tientallen en de pronikwortel

eene rekenkunstige reeks uitmaken; terwijl de laatste term dezer reeks tevens een vijfde gedeelte van het getal mijner jaren is. Nu vraag ik, hoe oud ik ben?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, A. C. Belinfante, S. T. Boas, C. J. Bolten, W. G. van Delden, M. L. Goede, H. A. Hartogh, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, O. van Schaick, M. G. Snoek, L. J. Ulman, A. Vos en H. W. Weytingh.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat x de wortel van het pronikgetal zijn, dan is dat getal zelve $x^2 + x$ en daar, volgens de laatste voorwaarde van het voorstel, de pronikwortel het vijfde gedeelte moet zijn van het geheele getal jaren, zoo is

$$x = \tfrac{1}{5}(x^2 + x),$$

dus

$$5x = x^2 + x$$

of

$$x^2 = 4x,$$

waaruit, daar $x = 0$ niet aan de bedoeling des voorstels kan beantwoorden, volgt

$$x = 4;$$

derhalve is het gevraagde getal jaren

$$x^2 + x = 20.$$

Het blijkt dus, dat, hoezeer dit getal aan de eerste voorwaarde des voorstels voldoet, die voorwaarde tot de oplossing geheel overbodig is.

CXXIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt eene meetkunstige reeks van vijf termen, in geheele getallen, te vinden, die de volgende eigenschappen heeft: 1°. *de eerste term is, zoo wel als de laatste, een volkomen vierde magt; en* 2°. *de middelste term, de som van de eerste en tweede term, de som van de derde en vierde term en eindelijk de som der geheele reeks zijn alle volkomen vierkanten?*

Opgelost *door* C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, J. Acquoy, C. F. Julius, B. Lubbers, A. Vos en M. G. Snoek.

OPLOSSING van C. J. BOLTEN.

Stellende voor de gevraagde reeks

$$x^4,\ x^3y,\ x^2y^2,\ xy^3 \text{ en } y^4,$$

dan is al reeds aan de twee eerste voorwaarden voldaan; ter voldoening, aan de volgende, behooren nu nog

$$x^4 + x^3y = x^2(x^2 + xy)$$

$$x^2y^2 + xy^3 = y^2(x^2 + xy)$$

en $$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

volkomen vierkanten te zijn. Wanneer nu $x^2 + xy = x(x+y)$ een volkomen vierkant wordt, is alweder aan de twee eerste van deze voorwaarden voldaan, stellende hiertoe $x+y = p^2x$, dan wordt

$$x(x+y) = p^2x^2 \quad \text{en} \quad y = (p^2 - 1)\,x.$$

Brengende deze waarde van y over in de laatste uitdrukking voor de som der reeks, dan verkrijgt men

$$x^4 + x^4(p^2-1) + x^4(p^2-1)^2 + x^4(p^2-1)^3 + x^4(p^2-1)^4;$$

indien dus de uitdrukking

$$1 + (p^2-1) + (p^2-1)^2 + (p^2-1)^3 + (p^2-1)^4$$

tot een vierkant gemaakt kan worden, zal het voorstel opgelost zijn. Dit nu is door eene regtstreeksche oplossing niet doenlijk en, zoo men hiertoe $p = 1$ wilde nemen, zoude $y = 0$ worden en er bij gevolg geene eigenlijke meetkunstige reeks te voorschijn komen.

Ontwikkelt men de laatste uitdrukking, dan zal men vinden

$$p^8 - 3p^6 + 4p^4 - 2p^2 + 1;$$

omdat nu het product van twee factoren $m(m \pm 2)$ opgeteld bij de eenheid een volkomen vierkant uitmaakt, zal men moeten beproeven of

$$p^8 - 3p^6 + 4p^4 - 2p^2$$

in twee factoren kan worden ontbonden, waarvan de eene voor m de andere voor $m \pm 2$ kan genomen worden. Dit doende vindt men

$$p^8 - 3p^6 + 4p^4 - 2p^2 = p^2(p^2-1)(p^4 - 2p^2 + 2);$$

en stellende nu

$$p^2(p^2-1) = m + 2$$

en $$p^4 - 2p^2 + 2 = m,$$

dan vindt men, door m uit deze beide vergelijkingen te elimineren, $$p^2 = 4;$$

alzoo $$y = (p^2 - 1)\,x = 3x$$

en bijgevolg wordt de reeks

$$x^4,\ 3x^4,\ 9x^4,\ 27x^4 \text{ en } 81x^4,$$

die, voor alle waarden van x, aan al de gevorderde voorwaarden voldoet.

Aanmerkingen. 1°. Men had in deze oplossing ook kunnen stellen

$$p^2(p^2-1)=m \text{ en } p^4-2p^2+2=m-2,$$

als wanneer men dezelfde waarde voor p^2 zoude verkregen hebben; doch men behoorde altijd te stellen

$$p^2(p^2-1)=m+2 \quad \text{of} \quad m$$

en $$p^4-2p^2+2=m \quad \text{of} \quad m-2,$$

om dat $p^4-p^2>p^4-2p^2+2$ is

2°. In het voorstel zijn twee overtollige voorwaarden opgegeven, want, als van eene meetkunstige reeks van een oneven aantal termen, de eerste en laatste term een volkomen vierde magt is, moet de middelste, als gelijk zijnde aan den vierkantswortel uit het product der beide uiterste, noodwendig een vierkant zijn.

Verder; als de som der twee eerste termen een vierkant is, zal de som van de derde en vierde van zelf een vierkant zijn, omdat de derde en vierde termen verkregen worden, wanneer men de eerste en tweede met het vierkant van de gemeene reden der reeks vermenigvuldigt.

CXXX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar den inhoud van eenen regthoekigen driehoek, die zoodanig bepaald is, dat, indien men zes op elkander volgende driehoekige getallen neemt, en uit de som der beide eerste, uit de som van de beide middelste en uit de som van de beide laatste den vierkantswortel trekt, de komende getallen de lengte der drie zijden zullen aangeven?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, C. J. Bolten, W. G. van Delden, M. L. Goede, C. F. Julius, L. van de Kasteele, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, M. G. Snoek, L. J. Ulman, A. Vos *en* F. C. Radijs.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laten de wortels der zeshoekige getallen, waarvan in de opgaaf gesproken wordt, zijn:

$$x-1,\ x,\ x+1,\ x+2,\ x+3 \text{ en } x+4,$$

dan zijn de driehoekige getallen zelve

$$\tfrac{1}{2}(x^2-x), \tfrac{1}{2}(x^2+x), \tfrac{1}{2}(x^2+3x+2), \tfrac{1}{2}(x^2+5x+6), \tfrac{1}{2}(x^2+7x+12), \tfrac{1}{2}(x^2+9x+20);$$

bijgevolg is de som der twee eerste .... x^2,

— — — beide middelste ..... x^2+4x+4

en — — — — laatste .... $x^2+8x+16$.

Uit deze sommen de vierkantswortels nemende, verkrijgen wij voor de getallen, die de zijden des regthoekigen driehoeks moeten aangeven, x, $x+2$ en $x+4$, waaruit wij hebben de vergelijking

$$x^2+(x+2)^2=(x+4)^2$$

of

$$2x^2+4x+4=x^2+8x+16$$

of

$$x^2-4x=12,$$

waaruit volgt $x=-2$ of $x=6$.

De eerste waarde van x zoude eene der zijden des driehoeks doen verdwijnen; wij gebruiken dus alleen de laatste waarde, door welke wij vinden: voor de wortels der driehoekige getallen 5, 6, 7, 8, 9 en 10; voor de driehoekige getallen zelve 15, 21, 28, 36, 45 en 55; voor de zijden des driehoeks 6, 8 en 10 en voor den gevraagden inhoud 24.

CXXXI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke twee veelhoekige getallen, tot denzelfden veelhoek behoorende, kunnen het zijn, die de eigenschap hebben, dat hun verschil gelijk is aan het verschil hunner wortels?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. ACQUOY, L. J. ULMAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, BAS BACKER, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, B. DE JONGH, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, M. G. SNOER *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Laten x en y de wortels van twee m-hoekige getallen voorstellen, dan zijn die m-hoekige getallen zelve

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)x^2-(m-4)x\} \text{ en } \tfrac{1}{2}\{(m-2)y^2-(m-4)y\}$$

en, volgens het voorstel, is dus

$$\tfrac{1}{2}\{(m-2)x^2-(m-4)x\}-\tfrac{1}{2}\{(m-2)y^2-(m-4)y\}=x-y,$$

welke vergelijking men achtervolgens herleidt tot

$$(m-2)(x^2-y^2)-(m-4)(x-y)=2(x-y);$$

$$(m-2)(x+y)(x-y)-(m-2)(x-y)=0$$

en $$(m-2)(x-y)(x+y-1)=0.$$

Aan deze vergelijking kan nu voldaan worden:

1°. door $m-2=0$ of $m=2$; waaruit blijkt, dat alle tweehoekige getallen de in het voorstel genoemde eigenschap bezitten.

2°. door $x-y=0$ of $x=y$; waaruit blijkt, dat alle gelijke veelhoekige getallen de genoemde eigenschap hebben.

3°. door $x+y-1=0$ of $x+y=1$; waaruit men ziet, dat twee m-hoekige getallen aan de vraag voldoen zullen, indien de som van hunne wortels gelijk aan de eenheid is.

Daar echter tweehoekige getallen geen eigenlijke veelhoekige getallen zijn, en het ook de bedoeling des voorstels niet zijn kan, twee gelijke getallen te vinden, wier verschil even als dat hunner wortels nul is, zoo zullen aan de bedoeling des voorstels alleen beantwoorden die veelhoekige getallen, waarvan de som der wortels 1 is. In breuken kunnen dus beide de wortels positief, maar in geheele getallen moet de eene wortel positief en de andere negatief zijn.

Zij $m=3$, $x=\frac{3}{4}$ en $y=\frac{1}{4}$, dan zijn de getallen $\frac{21}{32}$ en $\frac{5}{32}$, en men heeft naar behooren

$$\frac{21}{32}-\frac{5}{32}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$$

Zij $m=3$, $x=6$ en $y=-5$, dan zijn de getallen 21 en 10, en wederom is

$$21-10=6-(-5).$$

CXXXII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welk getal van twee cijfers is het, dat, door de som van die twee cijfers gedeeld wordende, eene rest overlaat, zoodanig, dat het quotient, en de rest te zamen genomen, den deeler opleveren; terwijl het getal, de deeler, de rest en het quotient te zamen 75 bedragen?

OPGELOST *door* M. G. SNOEB, J. ACQUOY, BAS BACKER, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, L. J. ULMAN, A. VOS, C. J. BOLTEN, F. C. RADIJS *en* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* M. G. SNOER.

Laat x het cijfer der tientallen, y het cijfer der eenheden, q het quotient en r de rest zijn, dan zal het begeerde getal $10x+y$ zijn, en, volgens het voorstel, zullen wij de volgende vergelijkingen hebben:

$$\frac{10x+y}{x+y}=q+\frac{r}{x+y}\ldots\ldots(1),$$

$$q+r=x+y\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

en $$10x+y+x+y+r+q=75\ldots.(3);$$

wij hebben alzoo drie vergelijkingen met vier onbekenden, weshalve het voorstel tot de onbepaalde behoort.

Uit (2) volgt $q=x+y-r$; deze waarde van q in (1) overbrengende, komt er

$$\frac{10x+y}{x+y}=x+y-r+\frac{r}{x+y}$$

of, $$10x+y=(x+y)^2-r(x+y)+r,$$

waaruit volgt $$r=\frac{(x+y)^2-(10x+y)}{x+y-1}\quad(4)$$

en $$q=x+y-r=\frac{9x}{x+y-1}\ldots\ldots(5).$$

Brengt men de waarde van $q+r$ uit (2) over in (3), dan komt er

$$10x+y+x+y+x+y=75,$$

dat is $$12x+3y=75$$

of $$4x+y=25$$

of $$y=25-4x\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

Daar nu x en y geheele positieve getallen, kleiner dan 10, moeten zijn, blijkt uit deze vergelijking (6), dat men niet anders hebben kan dan

$x=4,\ 5$ of 6

en dan is volgens (6) $y=9,\ 5$ of $1,$

volgens (5) $q=3,\ 5$ of $9,$

volgens (4) $r=10,\ 5$ of -2

en eindelijk $10x+y=49,\ 55$ of $61.$

In den eigenlijken zin voldoen dus alleen de getallen 49

en 55 aan de voorwaarden des voorstels; want het getal 61 nemende, is $y = -2$ en dit getal voldoet dus alleen onder voorwaarde, dat men het quotient eene eenheid te groot nemen en daardoor eene negatieve rest verkrijgen mag.

CXXXIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt een volkomen vierkant te vinden van dien aard, dat, indien men deszelfs wortel met het vierkant zelfs vermeerdert of vermindert, er in beide gevallen volkomen vierkanten komen?

Opgelost *door* M. L. Goede, J. Acquoy, C. J. Bolten, B. de Jongh, C. F. Julius; D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek, L. J. Ulman, A. Vos, H. A. Hartogh *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* M. L. Goede.

Stel dat het gevraagde vierkant x^2 zij, dan moeten $x + x^2$ en $x - x^2$ ook volkomen vierkanten zijn.

Stel hiertoe vooreerst

$$x + x^2 = (x + a)^2,$$

dan volgt hieruit

$$x = \frac{a^2}{1 - 2a}$$

en

$$x - x^2 = \frac{a^2(1 - 2a - a^2)}{(1 - 2a)^2}.$$

Zal nu $x - x^2$ een vierkant zijn, dan moet zulks ook met $1 - 2a - a^2$ het geval zijn; stel dus verder

$$1 - 2a - a^2 = (1 - ab)^2,$$

dan volgt hieruit

$$a = \frac{2(b - 1)}{b^2 + 1};$$

en hierdoor wordt na herleiding

$$x = \frac{a^2}{1 - 2a} = \frac{4(b - 1)^2}{(b^2 + 1)(b^2 - 4b + 5)}.$$

Deze uitdrukking voor x gevonden voldoet, voor alle waarden van b, aan de voorwaarde dat $x + x^2$ en $x - x^2$ volkomen vierkanten zijn, zoo dat hierdoor het voorstel is opgelost.

Voor $b = 0$, wordt $x = \frac{4}{5}$, weshalve alsdan voor het begeerde vierkant gevonden wordt $x^2 = \frac{16}{25}$.

Aanmerking. Daar van elk getal, dat grooter dan de eenheid is, de vierkantswortel kleiner dan het getal zelf is, zoo moet het begeerde vierkant kleiner dan de eenheid of een eigenlijk gebroken zijn; want anders zou de vierkantswortel met het vierkant verminderd, eene negatieve rest opleveren, die nimmer een volkomen vierkant kan wezen.

De gevondene uitdrukking voor x bevestigd insgelijks, dat x altijd eene eigenlijke breuk moet zijn; voor deze uitdrukking kunnen wij ook schrijven

$$x = \frac{4(b-1)^2}{(b-1)^4+4};$$

wilden wij nu stellen, dat x grooter dan de eenheid, en bijgevolg

$$(b-1)^4 + 4 < 4(b-1)^2$$

ware, dan zou

$$(b-1)^4 - 4(b-1)^2 + 4 < 0$$

of

$$((b-1)^2 - 2)^2 < 0$$

moeten zijn, hetgeen blijkbaar onmogelijk is.

CXXXIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

De waarden van x en y te vinden uit de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 + y = a \quad \text{en} \quad xy + \tfrac{1}{2}x = b?$$

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, S. T. Boas, C. J. Bolten, W. G. van Delden, J. A. Hartogh, B. de Jong, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, E. Olivier, Dz., F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, H. W. Weytingh, M. G. Snoer *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* S. Dik, Cornsz.

Indien wij het dubbel der tweede vergelijking bij de eerste optellen en van dezelve aftrekken, komt er

$$(x+y)^2 + (x+y) = a + 2b$$

en

$$(x-y)^2 - (x-y) = a - 2b,$$

waaruit, door de gewone wijze van oplossing der vierkants-vergelijkingen, gevonden wordt

$$x + y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(a + 2b + \tfrac{1}{4})}$$

en $$x - y = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(a - 2b + \tfrac{1}{4})}.$$

Hieruit vindt men, door optelling en aftrekking, na deeling door 2,

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a + 2b + \tfrac{1}{4})} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - 2b + \tfrac{1}{4})}$$

en $$y = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a + 2b + \tfrac{1}{4})} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - 2b + \tfrac{1}{4})}.$$

Voor x en y bevatten deze uitdrukkingen vier verschillende waarden, doch bij ieder dezer waarden voor de eene onbekende, behoort eene overeenkomstige waarde voor de andere. Was bijv. $a = 16$ en $b = 7$ gegeven, dan was

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{(a + 2b + \tfrac{1}{4})} = \tfrac{11}{4} \text{ en } \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - 2b + \tfrac{1}{4})} = \tfrac{3}{4}$$

en men zou dus hebben:

1°. $x = + \tfrac{11}{4} + \tfrac{3}{4} = 3\tfrac{1}{2}$ en $y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{4} - \tfrac{3}{4} = 1\tfrac{1}{2}$;
2°. $x = + \tfrac{11}{4} - \tfrac{3}{4} = 2$ en $y = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{11}{4} + \tfrac{3}{4} = 3$;
3°. $x = - \tfrac{11}{4} + \tfrac{3}{4} = -2$ en $y = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{4} - \tfrac{3}{4} = -4$;
of 4°. $x = - \tfrac{11}{4} - \tfrac{3}{4} = -3\tfrac{1}{2}$ en $y = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{11}{4} + \tfrac{3}{4} = -2\tfrac{1}{2}$.

CXXXV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornz.

Een stuk lands, in de gedaante van eenen scherphoekigen driehoek ABC (Fig. 73.) *moet door eene sloot* DE, *die in de beide zijden* AB *en* AC *uitloopt, in twee gelijke deelen verdeeld worden, indien nu de genoemde zijden, gelijk mede de afstand van het punt* A *tot de plaats* D, *waar de sloot in de eene zijde moet aanvangen, gegeven zijn, vraagt men de plaats* E *te bepalen, waar de sloot in de andere zijde moet eindigen? Alsmede hoe de gegevens van elkander moeten afhangen, opdat de verdeeling op de voorgestelde wijze mogelijk zij?*

Opgelost *door* Bas Backer, J. Acquoy, C. J. Bolten, S. Dik, Cornz., C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, A. Vos, M. L. Goede *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* Bas Backer.

Daar de sloot het land in twee gelijke stukken moet verdeelen, zal *drieh.* ADE = ½ *drieh.* ABC moeten zijn, en daar twee driehoeken, die eenen hoek gemeen hebben,

tot elkander in reden zijn als de producten der zijden om dezen hoek liggende, zal men moeten hebben

driek. ADE : *driek.* ABC $=$ AD $\times$ AE : AB $\times$ AC $= 1 : 2$;

hieruit volgt $2\ AD \times AE = AB \times AC$

of $2\ AD : AB = AC : AE$,

dus zal AE vierde evenredige tot 2 AD, AB en AC moeten zijn. Men verlenge alzoo AB tot in F, zoodat DF $=$ AD is, trekke vervolgens CF en daarna BE evenwijdig met CF, dan zal deze lijn BE de zijde A in het gevraagde punt E snijden.

Daar AE kleiner dan AC moet zijn, opdat de verdeeling op de voorgestelde wijze zal kunnen plaats hebben, volgt uit de bovenstaande evenredigheid, dat AB kleiner dan 2 AD of AD grooter dan de helft van AB moet zijn; het punt D moet dus digter bij B dan bij A liggen, en dit is de eenige voorwaarde, waaraan de gegevens behoeven te voldoen.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Van eenen vijfhoek* ABCDE *is bekend, dat de hoeken* A *en* B *regt, gelijk mede dat de hoeken* D *en* E *aan elkander gelijk zijn; indien nu* 2 *Tang.* D + *Tang* C $=$ *p gegeven is, vraagt men hieruit de hoeken* C, D *en* E *te vinden?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, B. DE JONGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, A. VOS en M. DE LEON.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Daar, zoo als bekend is, de som van al de hoeken eens vijfhoeks gelijk is aan zes regte hoeken en de hoeken A en B beide regt zijn, zoo zal, in den bedoelden vijfhoek, de som der drie overige hoeken gelijk zijn aan vier regte hoeken; dus is

$$C + D + E = 360°$$

of, daar $D = E$ gegeven is,

$$C + 2D = 360°;$$

derhalve is $C = 360° - 2D$

en $Tang.\ C = -\ Tang.\ 2D.$

Brengt men nu deze waarde voor *Tang.* C in de opgegevene vergelijking over, dan heeft men

$$2\,Tang.\,D - Tang.\,2\,D = p$$

of, daar $Tang.\,2\,D = \dfrac{2\,Tang.\,D}{1 - Tang.^2 D}$ is,

$$2\,Tang.\,D - \frac{2\,Tang.\,D}{1 - Tang.^2 D} = p,$$

waaruit na behoorlijke herleididing gevonden wordt

$$Tang.^3\,D - \tfrac{1}{2}p\;Tang.^2\,D + \tfrac{1}{2}p = 0 \ldots\ldots\ldots (a).$$

Stelt men in deze vergelijking $\dfrac{1}{Cot.\,D}$ in plaats van $Tang.\,D$, dan verkrijgt men na herleiding

$$Cot.^3\,D - Cot.\,D + \frac{2}{p} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (b).$$

Uit deze derde-magtsvergelijking kan *Cot.* D en dus ook D = E bepaald worden, waardoor men dan verder C = 360° — 2 D kan vinden; wij merken hierbij op, dat uit de vergelijkig C = 360° — 2 D onmiddellijk volgt, dat D < 180° zijn moet, zoodat, als men voor *Cot.* D eene positieve waarde verkrijgt, de hoek D tot het eerste kwadrant, en als men voor *Cot.* D eene negatieve waarde vindt, de *hoek* D tot het tweede kwadrant behoort.

Lost men de vergelijking (b) volgens den regel van CARDANUS op, dan heeft men

$$Cot.\,D = \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{p} + \sqrt{\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{27}\right)}\right\}} + \sqrt[3]{\left\{-\frac{1}{p} - \sqrt{\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{27}\right)}\right\}},$$

waaruit blijkt, dat zoo lang $p^2 < 27$ is, men voor *Cot.* D slechts eene bestaanbare waarde vinden zal, die negatief zal zijn als p positief, en positief als p negatief is.

Is $p = 0$, dan schijnt de vergelijking (b) ons geene bepaalde waarde voor *Cot.* D op te leveren, doch uit de vergelijking (a) vindt men alsdan *Tang.* D = 0; zoodat D = E = 0°, of = 180° en C = 360° — 2 D = 360° of = 0° is, waaruit blijkt dat voor $p = 0$ de bedoelde vijfhoek als zodanig niet bestaan kan.

Is $p^2 = 27$, dan verkrijgt men twee verschillende bestaanbare waarden voor *Cot.* D, namelijk

$Cot.\,D = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}$ of $Cot.\,D = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$ als p positief is,
en $Cot.\,D = \tfrac{2}{3}\sqrt{3}$ of $Cot.\,D = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$ als p negatief is.

Is eindelijk $p^2 > 27$, dan zijn er drie bestaanbare waarden voor *Cot.* D; en wel twee positieve en eene negatieve als p positief, en eene positieve en twee negatieve als p negatief is.

CXXXVII. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Men vraagt drie opklimmende harmonische reeksen, ieder van drie termen, te vinden, zoodat de laatste term der eerste reeks gelijk aan den eersten term der tweede reeks, en de laatste term der tweede reeks gelijk aan den eersten term der derde reeks is; bovendien moet de helft van het verschil, tusschen de eerste termen der tweede en derde reeks, gelijk zijn aan het verschil tusschen de twee laatste termen der eerste reeks; en ook aan het verschil tusschen de twee eerste termen der derde reeks: terwijl eindelijk de som van de eerste termen der drie reeksen 20, en van de laatste termen 38 moeten wezen?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, L. J. ULMAN, A. VOS *en* M. DE LEON.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Stellende voor de drie gevraagde reeksen,

$$x,\ \frac{2xy}{x+y},\ y;$$

$$y,\ \frac{2yz}{y+z},\ z;$$

en $$z,\ \frac{2zv}{z+v},\ v;$$

dan is aan de twee eerste voorwaarden des voorstels voldaan, terwijl de overige voorwaarden ons de volgende vergelijkingen verschaffen:

$$\frac{z-y}{2}=y-\frac{2xy}{x+y}\ \ldots\ldots\ldots\ (1),$$

$$\frac{z-y}{2}=\frac{2zv}{z+v}-z\ \ldots\ldots\ldots\ (2),$$

$$x+y+z=20\ \ldots\ldots\ (3)$$

en $$y+z+v=38\ \ldots\ldots\ (4).$$

Uit (3) en (4) volgt $x=20-y-z$ en $v=38-y-z$; brengen wij deze waarden voor x en v in de vergelijkingen (1) en (2) over; dan veranderen dezelve in

$$\frac{z-y}{2}=y-\frac{2y(20-y-z)}{20-z}$$

en $$\frac{s-y}{2}=\frac{2s(38-y-s)}{38-y}-s$$

of, na behoorlijke herleiding, in

$$4y^2+(s-20)\,y+s^2-20s=0 \ \ldots\ldots\ldots \ (5)$$

en $$y^2+(s-38)\,y+4s^2-38s=0 \ \ldots\ldots\ldots \ (6);$$

trekken wij nu deze vergelijkingen van elkander af, dan komt er $$3y^2+18y-3s^2+18s=0$$

of $$y^2-s^2+6y+6s=0$$

of $$(y+s)(y-s)+6(y+s)=0$$

of $$(y+s)(y-s+6)=0 \ \ldots\ldots\ldots \ (7).$$

Aan de laatste vergelijking kan nu op tweeërlij wijze voldaan worden, namelijk door $y+s$ en door $y-s+6$ gelijk *nul* te stellen. Stelt men

$$y+s=0 \text{ en dus } y=-s,$$

dan gaan elk der vergelijkingen (5) en (6) over in $4s^2=0$, waaruit volgt $s=0$, $y=0$, $x=20$ en $v=38$, welke waarden echter geen eigenlijk antwoord op de voorgestelde vraag geven.

Stelt men echter

$$y-s+6=0 \text{ of } y=s-6,$$

dan gaan de vergelijkingen (5) en (6) over in

$$6s^2-94s+264=0,$$

waaruit men vindt $s=12$ of $s=\frac{11}{3}$.

Voor

$s=\frac{11}{3}$, is $y=s-6=-\frac{7}{3}$, $x=20-y-s=\frac{56}{3}$ en $v=38-y-s=\frac{110}{3}$, waardoor wij voor de gevraagde reeksen zouden bekomen, $+\frac{56}{3}$, $-\frac{16}{3}$ en $-\frac{7}{3}$; $-\frac{7}{3}$, $-\frac{77}{6}$ en $+\frac{11}{3}$; $\frac{11}{3}$, $+\frac{20}{3}$ en $+\frac{110}{3}$; welke echter niet aan de voorwaarden voldoen van opklimmende te zijn.

Voor

$s=12$, is $y=s-6=6$, $x=20-y-s=2$ en $v=38-y-s=20$, waardoor wij voor de gevraagde reeksen verkrijgen

2, 3 en 6; 6, 8 en 12; 12, 15 en 20,

die volkomen aan het voorstel beantwoorden.

CXXXVIII. VOORSTEL

Door H. VAN BLANKEN.

Indien men in eenen cirkel, uit het middelpunt A (Fig. 74), *eenen straal* AC *trekt, op dien straal een punt* B *neemt, en vervolgens uit* A *en* B *naar twee punten* D *en* E, *op*

den omtrek des cirkels gelegen, lijnen trekt, dan zal, indien de hoek CBE *grooter dan de hoek* CBD *is, zoo lang deze beide hoeken scherp zijn, de hoek* ADB *kleiner dan de hoek* AEB *zijn. Men vraagt dit te bewijzen zonder van Goniometrische lijnen gebruik te maken?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, H. van Blanken, C. J. Bolten, J. Acquoy, Bas Backer, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, M. G. Snoer, L. J. Ulman *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Zij Fig. 74 volgens de opgaaf geconstrueerd, zoodat de hoek CBE scherp en tevens grooter dan de insgelijks scherpe hoek CBD is; brengen wij door de punten A, B en D eenen cirkel, dan zal dezelve den cirkel CDEC' behalve in D nog in een ander punt D' snijden; dit punt D' is zoo gelegen, dat de hoek CBD' het supplement van den hoek CBD is, want, de hoeken CBD en ABD' zijn gelijk, omdat zij gemeten worden door de helften der boogen AD en AD', die, als gelijke koorden hebbende, gelijk zijn; indien wij dus uit B eene loodlijn BP op AC oprigten, zal ook *hoek* PBD = *hoek* PBD' zijn.

Daar nu de hoek CBE scherp en grooter dan de hoek CBD is, zal het punt E op den boog PD en alzoo binnen den cirkel ABDD' liggen; van de hoeken AEB en ADB, die beide op eenen zelfden boog AB van dien cirkel staan, heeft dus de eerste het hoekpunt *binnen* en de tweede het hoekpunt *op* den omtrek, waaruit onmiddelijk volgt, dat de eerste grooter dan de tweede en alzoo het gestelde bewezen is.

Uit de figuur blijkt duidelijk, dat, indien men eenig ander punt E' op den boog DD' neemt, de hoek CBE' stomp kan zijn, zonder dat daarom de hoek AE'B ophoudt grooter dan ADB te wezen. Is de hoek DBD scherp, dan zal, opdat AEB grooter dan ADB zij, alleen vereischt worden, dat de hoek CBE grooter dan CBD en kleiner dan het supplement van CBD is.

Was de hoek BD regt, zoo als in Fig. 75, dan zou de cirkel, die men door de punten A, B en D bragt, den cirkel CDEC' in D raken, want de hoek ABD nu ook regt zijnde, is AD de middellijn van den cirkel ABD; het zoude in dit geval onmogelijk zijn op den omtrek CDEC' eenig

punt E te nemen, zoodat de hoek AEB grooter dan ADB ware, want de hoeken ADB en AEB staan wederom op denzelfden boog AB, maar de eerste heeft het hoekpunt *op*, de tweede heeft het *buiten* den omtrek.

Was de hoek CBD stomp, zoo als in Fig. 76, dan zoude de cirkel door de punten A, B en D gebragt, den cirkel CDEC′ behalve in D wederom in nog een ander punt D′ snijden, zoodat de hoek CBD′ het supplement van de hoek CBD ware; blijft nu de hoek CBE grooter dan CBD, dan zal klaarblijkelijk de hoek AEB kleiner dan ADB zijn.

Indien wij van de twee hoeken CBD en CBE altijd de kleinste door CBD en de grootste door CBE aanduiden, zal derhalve

$$\textit{hoek}\ AEB > = \text{of} < \textit{hoek}\ ADB$$

zijn, naar gelang men heeft

$$\textit{hoek}\ CBD + \textit{hoek}\ CBE < = \text{of} > 180^\circ.$$

AANMERKING *van* H. VAN BLANKEN. Uit de bewezene stelling volgt, dat de *parallaxis* van een hemelligchaam kleiner wordt, naar gelang deszelfs afstand van het *toppunt* vermindert.

CXXXIX. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Eene harmonische reeks in geheele getallen te vinden, waarvan de eerste term gelijk is aan de laatste, gedeeld door het aantal termen; en waarvan de eerste, derde en vierde termen eene rekenkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* H. KLOOS, J. ACQUOY, J. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* H. KLOOS.

Stellen wij dat a de eerste, b de tweede term en n het aantal termen der begeerde reeks zij, dan wordt deze reeks zelve voorgesteld door

$$a,\ b,\ \frac{ab}{b+2(a-b)},\ \frac{ab}{b+3(a-b)}\ \ldots\ \frac{ab}{b+(n-1)(a-b)},$$

en nu moet volgens de opgave

$$a = \frac{ab}{n\{b+(n-1)(a-b)\}}\ \ldots\ldots\ (1)$$

en $$a + \frac{ab}{b+3(a-b)} = \frac{2ab}{b+2(a-b)} \ldots\ldots (2)$$

zijn. De laatste vergelijking herleidt men achtervolgens tot

$$1 + \frac{b}{3a-2b} = \frac{2b}{2a-b},$$

$$\frac{3a-b}{3a-2b} = \frac{2b}{2a-b},$$

$$(3a-b)(2a-b) = 2b(3a-2b),$$

$$6a^2 - 5ab + b^2 = 6ab - 4b^2,$$

$$6a^2 - 11ab = -5b^2,$$

$$a^2 - \tfrac{11}{6}ab = -\tfrac{5}{6}b^2,$$

waaruit volgt $a = b$ of $a = \frac{5}{6}b$;

alleen de tweede waarde van a is hier bruikbaar, daar anders de twee eerste termen der reeks aan elkander gelijk zouden worden en men alzoo geene eigenlijke reeks zou bekomen.

Uit de vergelijking (1) volgt dadelijk

$$n(b + (n-1)(a-b)) = b,$$

hierin voor a de gevondene waarde $\frac{5}{6}b$ stellende, komt er, achtervolgens herleidende,

$$n(b - \tfrac{1}{6}(n-1)b) = b,$$

$$n(1 - \tfrac{1}{6}(n-1)) = 1,$$

$$n - \tfrac{1}{6}n(n-1) = 1,$$

$$(n-1) - \tfrac{1}{6}n(n-1) = 0,$$

of $$(n-1)(1 - \tfrac{1}{6}n) = 0,$$

waaruit, omdat $n - 1$ niet gelijk nul kan zijn, volgt

$$1 - \tfrac{1}{6}n = 0 \text{ of } n = 6.$$

Brengen wij nu de gevondene waarde $a = \frac{5}{6}b$ en $n = 6$ in de gestelde reeks over, dan vinden wij voor dezelve

$$\tfrac{5}{6}b,\ \tfrac{5}{5}b,\ \tfrac{5}{4}b,\ \tfrac{5}{3}b,\ \tfrac{5}{2}b,\ \tfrac{5}{1}b,$$

waarin, om geheele getallen te verkrijgen, voor b alle getallen genomen kunnen worden, die door 12 deelbaar zijn.

Voor $b = 12$, wordt de reeks 10, 12, 15, 20, 30 en 60 en deze is de kleinste in geheele getallen, die aan de opgaaf voldoet.

CXL. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Een gegeven getal in twee deelen te verdeelen, zoo dat de som van de vierde magt van het eene deel met de tweede magt van het andere deel een minimum zij?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos, M. L. Goede, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Stelt men het eene deel gelijk x, dan is het andere $a-x$ en dus moet de waarde van x zoodanig bepaald worden, dat de uitdrukking

$$y = x^4 + x^2 - 2ax + a^2$$

een minimum zij. Volgens den regel voor het vinden der maxima en minima, hebben wij dus slechts te onderzoeken, welke waarde van x, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ en tevens $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positief maakt.

Nu volgt uit

$$y = x^4 + x^2 - 2ax + a^2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 4x^3 + 2x - 2a$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 12x^2 + 2;$$

daar het nu dadelijk blijkt, dat elke bestaanbare waarde van x het tweede differentiaal quotient positief maakt, zal elke waarde van x, die het eerst differentiaal quotient nul maakt, indedaad y tot een minimum maken.

Stellen wij dus om deze waarde van x te bepalen

$$4x^3 + 2x - 2a = 0$$

of

$$x^3 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}a = 0,$$

dan vinden wij, door den bekenden regel van Cardanus,

$$x = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{\{54a + 6\sqrt{(81a^2+6)}\}} + \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{\{54a - 6\sqrt{(81a^2+6)}\}},$$

waaruit tevens blijkt, dat x slechts eene bestaanbare waarde hebben kan.

Zij, tot een voorbeeld, het gegevene getal $a = 18$, dan vindt men $x = 2$ en $a - x = 16$ voor de begeerde deelen; en dan is $y = 272$ het bedoelde minimum.

CXLI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de vergelijking

Sin. $\phi\, \partial^2 \psi$ — *Cos.* $\phi\, \partial\phi\, \partial\psi$ = *Sin.* ϕ *Tang.* $\phi\, \partial\phi\, \partial\psi$ *te integreren?*

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, L. J. Ulman, A. Vos *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

De opgegevene vergelijking door *Sin.* ϕ deelende, komt er

$$\partial^2\Psi - Cot.\ \phi\ \partial\phi\ \partial\Psi = Tang.\ \phi\ \partial\phi\ \partial\Psi$$

of $$\partial^2\Psi = (Tang.\ \phi + Cot.\ \phi)\ \partial\phi\ \Psi\partial,$$

maar daar men heeft

$$Tang.\phi + Cot.\phi = \frac{Sin.\ \phi}{Cos.\ \phi} + \frac{Cos.\ \phi}{Sin.\ \phi} = \frac{Sin.^2\phi + Cos.^2\phi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi} = \frac{1}{Sin.\phi Cos.\phi}$$

zoo is ook $$\partial^2\Psi = \frac{\partial\phi\ \partial\Psi}{Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi};$$

stellen wij nu

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = z \quad \text{of} \quad \partial\Psi = z\partial\phi,$$

dan is $$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi^2} = \frac{\partial z}{\partial\phi} \quad \text{of} \quad \partial^2\Psi = \partial z\,\partial\phi,$$

waardoor de vergelijking verandert in

$$\partial z\,\partial\phi = \frac{z\,\partial\phi^2}{Sin.\phi\ Cos.\phi}$$

of $$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial\phi}{Sin.\ \phi\ Cos.\phi}.$$

Deze vergelijking kan nu dadelijk geintegreerd worden, men verkrijgt namelijk

$$Log.\ Cz = Log.\ Tang.\ \phi$$

en dus $$Cz = Tang.\ \phi;$$

hierin nu weder $z = \frac{\partial\Psi}{\partial\phi}$ overbrengende, komt er

$$C\frac{\partial\Psi}{\partial\phi} = Tang.\ \phi$$

of $$C\partial\Psi = \partial\phi\ Tang.\ \phi;$$

welke vergelijking weder terstond integrabel is; men heeft dus

$$C\Psi = Log.\ Sec.\ \phi + Log.\ C'$$

of $$C\Psi = Log.\ (C'\ Sec.\phi).$$

CXLII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men begeert de vergelijking te vinden van de kromme lijn, die de eigenschap heeft, dat de som van de normaal en subnormaal standvastig is?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. F. Julius, L. J. Ulman, C. J. Bolten, B. de Jongh, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Van elke kromme lijn, waarvan de vergelijking $y = F(x)$ is, wordt de normaal voorgesteld door $y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}}$ en de subnormaal door $y\frac{\partial y}{\partial x}$. Daar nu de som dezer lijnen bij de gevraagde kromme standvastig zijn moet, zoo hebben wij, deze standvastige gelijk a stellende, de vergelijking

$$y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}}+y\frac{\partial y}{\partial x}=a$$

of

$$y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}}=a-y\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Door de beide leden dezer vergelijking tot de tweede magt te verheffen, heeft men

$$y^2+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=a^2-2ay\frac{\partial y}{\partial x}+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

derhalve is

$$2ay\frac{\partial y}{\partial x}=a^2-y^2,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a^2-y^2}{2ay},$$

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{2ay}{a^2-y^2}$$

en

$$\partial x=\frac{2ay\,\partial y}{a^2-y^2}.$$

Deze vergelijking integrerende, vindt men

$$x=-a\ Log.\ (a^2-y^2)+$$

en door de standvastige C zoodanig te bepalen, dat de vergelijking gelijkslachtig wordt, verkrijgt men voor de gevraagde vergelijking der kromme:

$$x=-a\ Log.\ \frac{a^2-y^2}{a^2}.$$

of

$$x=a\ Log.\ \frac{a^2}{a^2-y^2}\ \ldots\ldots\ (1);$$

zijnde voorts

$$\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{2ay}{a^2-y^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2a\,\frac{a^2+y^2}{(a^2-y^2)^2}\ \ldots\ldots\ldots\ (3).$$

Nemen wij nu de onbepaalde lijnen XX′ en YY′ (Fig. 77), snijdende elkander regthoekig in O, voor coördinaten-assen aan, dan hebben wij, aangaande den loop onzer kromme in het algemeen, het volgende:

Stellen wij in de vergelijking (1) $y = 0$, dan wordt ook $x = 0$, O is dus een punt der kromme en dewijl bij deze onderstelling $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2ay}{a^2 - y^2} = 0$ wordt, zoo zal de as YY′ de kromme in het punt O raken.

Daar in de vergelijking (1) y niet anders dan in de tweede magt voorkomt, zoo zal de kromme ter wederzijde van de as XX′ op dezelfde wijs gelegen zijn, en dus door dezelve in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld worden.

Laat men y positief of negatief, van nul af te beginnen, langzamerhand aangroeijen, dan zal ook x van lieverlede aangroeijen, tot dat, als men $y = \pm a$ neemt, $x = +\infty$ wordt; de beide deelen der kromme gaan dus ter regterzijde van de as YY′ tot in het oneindige voort. Daar voorts, voor $y = \pm a$, $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2ay}{a^2 - y^2} = \frac{2a^2}{0} = \infty$ wordt, zoo snijden de raaklijnen van de oneindig afgelegene punten Z en Z′ der kromme, de as YY′, onder eenen regten hoek. Nemen wij dus, op de as YY′, ON = ON′ = a en trekken wij door de punten N en N′ de lijnen NQ en N′Q′ evenwijdig met de as XX′, dan zullen dezelve asymptoten der kromme zijn.

Neemt men $y > a$ dan wordt x onbestaanbaar, omdat $\frac{a^2}{a^2 - y^2}$ klaarblijkelijk een getal is, dat bij deze onderstelling negatief wordt; y kan dus geene andere waarde hebben dan van 0 tot $\pm a$ ingesloten en daar bij alle deze waarden x positief blijft, zoo kunnen ter linkerzijde van de as YY′ geene punten der kromme gevonden worden.

Daar voorts, bij elke waarde van y, $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = 2a \frac{a^2 + y^2}{(a^2 - y^2)^2}$ klaarblijkelijk positief blijft, zoo hebben x en $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ voor elk punt der kromme hetzelfde teeken; dezelve zal dus overal de bolle zijde naar de as YY′ gekeerd houden, gevolgelijk geene buig-

punten hebben, en van den vorm zijn, welke in de figuur door ZMOM'Z' is voorgesteld.

Met behulp van eene tafel der Neperiaansche Logarithmen, is het gemakkelijk de kromme door punten nagenoeg te construëren; want neemt men daartoe de lijn ON $= a$ als éénheid aan, dan zal men hebben

$$x = Log. \frac{1}{1-y^2}$$

en men zal dus voor elke getallen-waarde van y, die nu noodzakelijk kleiner dan de eenheid moet wezen, de overeenkomstige getallen-waarde van x in de tafel kunnen vinden.

Substitueert men in de algemeene uitdrukkingen

$$y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2\right\}},\quad y\frac{\delta x}{\delta y},\quad y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2\right\}} \text{ en } y\frac{\delta y}{\delta x},$$

voor de Tangens, Subtangens, Normaal en Subnormaal eener kromme lijn, de bovengevondene waarden van $\frac{\delta x}{\delta y}$ $= \frac{2ay}{a^2-y^2}$ en $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2-y^2}{2ay}$, dan vindt men, voor eenig punt der begeerde kromme

$$\text{Tangens} = y\frac{a^2+y^2}{a^2-y^2} \ldots\ldots\ldots (4);$$

$$\text{Subtangens} = \frac{2ay^2}{a^2-y^2} \ldots\ldots\ldots (5);$$

$$\text{Normaal} = \frac{a^2+y^2}{2a} \ldots\ldots\ldots (6);$$

$$\text{Subnormaal} = \frac{a^2-y^2}{2a} \ldots\ldots\ldots (7).$$

Indien dus M een punt der kromme is, waarvan de ordinaat MP gegeven is, dan zal volgens (7) de Subnormaal

$$PR = \frac{ON^2 - MP^2}{2ON} = \frac{(ON+MP)(ON-MP)}{2ON}$$

gevonden worden, door PR vierde evenredige te nemen tot de lijnen NN', IN' en IN, waardoor dan verder de Normaal, Tangens en Subtangens voor dit punt onmiddellijk geconstrueerd kunnen worden. Blijkende het voorts uit (6) en (7) dat de som van de Normaal en Subnormaal, voor elk

punt der kromme, bestendig gelijk aan $\frac{2a^2}{2a} = a$, zoo als in de opgaaf van dit voorstel gevorderd was.

Stelt men in de bovengevondene formulen $y = 0$, dan vindt men, dat de Tangens en Subtangens van het punt Q der kromme beiden gelijk nul, maar de Normaal en Subnormaal gelijk $\frac{1}{2}a$ worden. Neemt men dus op de as XX′ het punt K zoodanig, dat OK $= \frac{1}{2}$ ON $= \frac{1}{2}a$ is, dan zullen de punten, waarin de Normalen van de onderscheidene punten der kromme de as XX′ snijden, allen ter regterzijde van K gelegen zijn.

Stelt men in die zelfde formulen $y = \pm a$, dan worden de Tangens en Subtangens oneindig groot, de Subnormaal nul en de Normaal gelijk aan a, waaruit volgt, dat bij de op eenen oneindigen afstand van de as YY′ verwijderde punten der kromme, deze overgaat in twee regte lijnen, die ter wederzijde op eenen afstand a evenwijdig aan XX′ getrokken zijn; hetgeen ons bevestigt in het bovengevondene, dat NQ en N′Q′ asymptoten der kromme zijn.

Stelt men den straal des kromtecirkels van eenig punt der kromme door r, en de coördinaten van deszelfs middelpunt door α en β voor, dan is in het algemeen

$$r = \pm \frac{\left\{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}}$$

$$\alpha = x + \frac{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}{\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}}$$

en $$\beta = y - \frac{\delta x}{\delta y} \times \frac{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2}{\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}};$$

substitueert men hierin de waarden van $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2ay}{a^2 - y^2}$ en van $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2} = 2a\,\frac{a^2 + y^2}{(a^2 - y^2)^2}$, dan vindt men, na behoorlijke herleiding,

$$r = \frac{(a^2+y^2)^2}{2a(a^2-y^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\alpha = x + \frac{a^2+y^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

en $$\beta = -\frac{2y^3}{a^2-y^2} = y - \frac{y(a^2+y^2)}{a^2-y^2} \quad . \ (10).$$

De bovenstaande waarde voor r kan men ook schrijven onder den vorm

$$r = \frac{y\,\frac{a^2+y^2}{a^2-y^2} \times \frac{a^2+y^2}{2a}}{y}$$

en vergelijkt men nu deze uitdrukking met de in (4) en (6) opgegevene waarden voor de Tangens en Normaal, dan vindt men, dat *voor elk punt der kromme, de kromtestraal vierde evenredige is tot de Ordinaat, Normaal en Tangens van dat punt.*

Uit (9) en (6) *volgt*, dat *de abscis van het middelpunt des kromtecirkels van eenig punt der kromme gelijk is aan de abscis van dit punt vermeerderd met den Normaal van hetzelve.*

Terwijl uit (10) en (4) blijkt, dat de *Ordinaat van het middelpunt des kromtecirkels van eenig punt der kromme gelijk is aan de Ordinaat van dit punt verminderd met de Tangens van hetzelve.*

Uit deze eigenschappen kan men onderscheidene constructien afleiden, om het middelpunt des kromtecirkels voor een gegeven punt der kromme te bepalen, van welke de volgende zeer eenvoudig is.

Zij M (Fig. 77) een gegeven punt der kromme, OP de abscis en MR de Normaal van hetzelve, voor welke wij boven de constructie hebben opgegeven. Nemen wij nu PL = MR, en trekken wij UL regthoekig door XX', dan zal het punt U, waarin de lijn UL het verlengde van den Normaal MR snijdt, het begeerde middelpunt des kromtecirkels van het punt M zijn en dus is U een punt van de ontwondene der kromme.

Om den loop der ontwondene nader te bepalen merken wij op, dat uit de gelijk en gelijkvormigheid van de deelen

OMZ en OM'Z' der kromme noodzakelijk volgt, dat de beide deelen der ontwondene, tot OMZ en OM'Z' behoorende, insgelijks gelijk en gelijkvormig moeten zijn; derhalve ligt de ontwondene van OM'Z' even zoo boven de as XX', als de ontwondene van OMZ beneden die as ligt, zoodat, indien M' het punt is dat met M dezelfde abscis OP heeft, het middelpunt U' des kromtecirkels van M' zal verkregen worden, door UL te verlengen en U'L = UL te nemen.

Stelt men verder in (8), (9), en (10) $x = 0$ en $y = 0$, dan wordt

$$r = \tfrac{1}{2}a, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}a \text{ en } \beta = 0;$$

omdat wij nu vroeger OK $= \frac{1}{2}a$ genomen hebben, is derhalve OK de kromtestraal en K het middelpunt des kromtecirkels, tot het punt O behoorende.

Laat men y, van nul af beginnende, aangroeijen, dan zullen ook α en β onophoudelijk aangroeijen, tot dat voor $y = \pm a$, $\alpha = \infty$ en $\beta = \infty$ wordt; de beide takken der ontwondene zullen dus, van het punt K af, zoowel boven als beneden de as XX', tot in het oneindige voortgaan en zich tevens, van het punt K af, ter regterzijde van de as YY' tot in het oneindige uitstrekken; daar voorts de kromme in al derzelver punten hare bolle zijde naar de as YY' gekeerd houdt, zoo zal van de ontwondene overal de holle zijde naar de as YY' gekeerd zijn; zoo dat deze de gedaante zal hebben, welke in de figuur door de kromme lijn WUKU'W' voorgesteld is.

Om den inhoud OMP te bepalen, begrepen tusschen den hollen omtrek van een' boog OM der kromme en de coördinaten MP en OP van het punt M, hebben wij, dien inhoud gelijk I stellende, in het algemeen

$$I = \int y\, \delta x$$

en door hierin de waarde van $\delta x = \frac{2ay\,\delta y}{a^2 - y^2}$ uit (2) te substitueren, heeft men achtervolgens

$$I = \int \frac{2ay^2\,\delta y}{a^2 - y^2},$$

$$I = \int -2a\,\delta y + \int \frac{2a^3\,\delta y}{a^2 - y^2},$$

$$I = \int -2a\,\delta y + a^2 \int \frac{\delta y}{a+y} + a^2 \int \frac{\delta y}{a-y};$$

en integrerende

$$I = -2ay + a^2 \, Log. \, (a+y) - a^2 \, Log. \, (a-y)$$

of

$$I = -2ay + a^2 \, Log. \, \frac{a+y}{a-y} \quad \ldots\ldots \quad (11),$$

welke integraal, daar zij voor $y = 0$ naar behooren verdwijnt, geene verbelering behoeft en waarin men, om den inhoud van OMP te vinden, voor y de gegevene waarde van MP moet nemen. Stelt men $y = a$, dan vindt men dat de inhoud der onbepaalde vlakteruimte ZMOX oneindig groot is.

Uit de figuur volgt verder, dat de inhoud OMI, begrepen tusschen den bollen omtrek van een boog OM der kromme en de coördinaten MI en OI van het punt M, gelijk is aan *Regth.* OM $-$ *Inh.* OMP; stellende dus dien inhoud gelijk I', dan heeft men

$$I' = xy + 2ay - a^2 \, Log. \, \frac{a+y}{a-y}$$

of, daar volgens (1) $x = a \, Log. \, \frac{a^2}{a^2 - y^2}$ is,

$$I' = 2ay + ay \, Log. \, \frac{a^2}{a^2 - y^2} - a^2 \, Log. \, \frac{a+y}{a-y} \ldots (12),$$

waarin men, om den inhoud OMI te vinden, voor y de gegevene waarde OI moet nemen.

Neemt men hierin $y = a$, dan verkrijgt men den inhoud OMZQN onder eenen onbepaalden vorm; verandert men echter de formule (12) achtervolgens in

$$I' = 2ay + a \, Log. \left(\frac{a^2}{a^2 - y^2}\right)^y - a \, Log. \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^a,$$

$$I' = 2ay - a \, Log. \left(\frac{a^2 - y^2}{a^2}\right)^y - a \, Log. \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^a,$$

$$I' = 2ay - a \, Log. \left\{ \left(\frac{a^2 - y^2}{a^2}\right)^y \times \left(\frac{a+y}{a-y}\right)^a \right\},$$

$$I' = 2ay - a \, Log. \left\{ \frac{(a+y)^{(a+y)}}{a^{2y}} \times \frac{(a-y)^y}{(a-y)^a} \right\},$$

dan vindt men, door hierin $y = a$ te stellen, waardoor klaarblijkelijk $\frac{(a-y)^y}{(a-y)^a} = 1$ wordt,

$$Inh.\ OMZQN = 2a^2 - a\ Log.\ \frac{(2a)^{2a}}{a^{2a}}$$

$$= 2a^2 - a\ Log.\ 2^{2a}$$

$$= 2a^2 - 2a^2\ Log.\ 2$$

en dus door verdubbeling

$$Inh.\ QNN'Q'Z'M'OMZ = 4a^2\ (1 - Log.\ 2),$$

zoodat de vlakke ruimte, begrepen tusschen de as der ordinaten, de oneindig voortloopende takken der kromme lijn en hare asymptoten, eene bepaalde eindige waarde heeft.

Om eindelijk nog den inhoud te vinden van het omwentelingsligchaam, dat men verkrijgt door OMP om XX' te laten omwentelen, hebben wij, dien inhoud V noemende, in het algemeen

$$V = \pi \int y^2 \partial x,$$

hierin $\partial x = \frac{2ay\,\partial y}{a^2 - y^2}$ substitueerende, verkrijgen wij

$$V = 2a\pi \int \frac{y^3 \partial y}{a^2 - y^2} = 2a\pi \left\{ \int - y\partial y + a^2 \int \frac{y\partial y}{a^2 - y^2} \right\}$$

of integrerende

$$V = 2a\pi \left\{ -\tfrac{1}{2} y^2 - \tfrac{1}{2} a^2\ Log.\ \frac{a^2 - y^2}{a^2} \right\}$$

$$= - \pi a y^2 + \pi a^3\ Log.\ \frac{a^2}{a^2 - y^2} \quad \ldots\ldots (13),$$

welke integraal naar behooren voor $y = 0$ verdwijnt.

Stelt men hierin $y = a$, dan vindt men, dat de inhoud van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van ZMOX om XX', oneindig groot is.

Verder is het duidelijk, dat de inhoud van het omwentelingsligchaam, dat ontstaat als men OMI om XX' laat omwentelen, gelijk is aan het verschil tusschen den cilinder, door de omwenteling van den regthoek OM om XX' voortgebragt, en de straks bepaalde inhoud V; dit verschil V', noemende, is dus

$$V' = \pi x y^2 - V$$

of, hierin voor x en V derzelver waarden stellende, volgens (1) en (13),

$$V' = \pi a y^2\ Log.\ \frac{a^2}{a^2 - y^2} + \pi a y^2 - \pi a^3\ Log.\ \frac{a^2}{a^2 - y^2}.$$

dat is $V' = \pi a \left\{y^2 - (a^2 - y^2)\, Log. \frac{a^2}{a^2 - y^2}\right\} \ldots\ldots (14).$

Neemt men hierin $y = a$, dan verkrijgt men de waarde van V′, die hiermede overeenstemt, weder onder eenen onbepaalden vorm, omdat alsdan

$$(a^2 - y^2)\, Log. \frac{a^2}{a^2 - y^2} = 0 \times \infty$$

wordt; verandert men echter de formule (14) in

$$V' = \pi a \left\{y^2 + (a^2 - y^2)\, Log. \frac{a^2 - y^2}{a^2}\right\}$$

$$V' = \pi a \left\{y^2 + Log. \frac{(a^2 - y^2)^{(a^2 - y^2)}}{a^{2(a^2 - y^2)}}\right\}$$

en stelt men nu $y = a$, waardoor $(a^2 - y^2)^{(a^2 - y^2)} = 0^0 = 1$ en $a^{2(a^2 - y^2)} = a^0 = 1$ wordt, dan vindt men

$$Inh.\ Omw.\ ONQZMO = \pi a^3;$$

deze inhoud is dus gelijk aan den cilinder, waarvan zoowel de straal des grondvlaks als de hoogte beide gelijk a zijn.

CXLIII. Voorstel.

Door L. J. Ulman.

De som te vinden der oneindige reeks

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{100} + enz.,$$

waarin de tellers de eenheid, en de noemers de vierkanten der opvolgende driehoekige getallen zijn?

Opgelost *door* L. J. Ulman, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, B. de Jongh, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes *en* A. Vos.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Schrijven wij de opgegevene reeks aldus:

$$4 \times \left\{\frac{1}{(1.2)^2} + \frac{1}{(2.3)^2} + \frac{1}{(3.4)^2} + enz.\right\},$$

dan blijkt derzelver algemeene term te zijn

$$4 \times \frac{1}{(n(n+1))^2}.$$

Wanneer wij nu, naar aanleiding van het CLXV Voorstel des V. Deels, voor $\frac{1}{n(n+1)}$ stellen $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

dan is

$$\frac{1}{(n(n+1))^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-2\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}$$

Wij kunnen dus de voorgestelde reeks aanmerken als het viervoud van de som der vier volgende:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{enz.}$$

$$+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{enz.}$$

$$-2-\frac{2}{2}-\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\text{enz.}$$

$$+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\text{enz.}$$

Nu is, zoo als genoegzaam bekend is, (zie J. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* bl. 297; en zie het bewijs onder anderen bij KLUEGEL ad. voc. *Potenz.* V.)

de som der eerste reeks . . . . $= \frac{1}{6}\pi^2$,
— — — tweede reeks is dus . . . . . . $= \frac{1}{6}\pi^2 - 1$,
— — — beide laatste reeksen is blijkbaar $= -2$,
— — — vier reeksen is derhalve $= \frac{1}{3}\pi^2 - 3$,
en derzelver viervoud . . . . $= \frac{4}{3}\pi^2 - 12$;
zoodat wij dan ook voor de som der opgegevene reeks hebben

$$\tfrac{4}{3}\pi^2 - 12 = 1,159472 \text{ enz.}$$

AANMERKING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER. Had men gevraagd om de som te vinden van de oneindige voortloopende reeks

$$1+\frac{1}{27}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1000}+\text{enz.},$$

waarvan de tellers de eenheid en de noemers de derde magten der opvolgende driehoekige getallen zijn, dan was de algemeene term der reeks $\frac{8}{(n(n+1))^3}$.

Nu is

$$\frac{8}{(n(n+1))^3}=\frac{8}{n^3}-\frac{8}{(n+1)^3}-\frac{24}{n^2(n+1)^2}$$

en derhalve kan de hier gevraagde som aangemerkt worden als de som der drie reeksen

$$8(1+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{27}+\tfrac{1}{64}+\text{enz.}),$$

$$8(\;-\tfrac{1}{8}-\tfrac{1}{27}-\tfrac{1}{64}-\text{enz.}),$$

$$-24(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{36}+\tfrac{1}{144}+\tfrac{1}{400}+\text{enz.});$$

de som der beide eerste is klaarblijkelijk het getal 8, terwijl de laatste volgens het opgeloste voorstel is

$$-6\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{100}+enz.\right)=-6\left(\tfrac{4}{3}\pi^2-12\right)=-8\pi^2+72;$$

derhalve hebben wij

$$1+\frac{1}{27}+\frac{1}{216}+\frac{1}{1000}+enz.=-8\pi^2+80=8\left(10-\pi^2\right)$$

CXLIV. VOORSTEL.

Door L. J. Ulman.

Eene gegevene lijn AB *is middendoorgedeeld in* M (Fig. 78) *en vervolgens uit* M, *met* MA = MB *als straal, een halve cirkel* ACDB *op de lijn* AB *beschreven; met denzelfden straal is wijders uit* A *een boog* MC *en uit* B *een boog* MD *beschreven, waardoor de halve cirkel in drie figuren* ACM, CMD *en* DMB *verdeeld is. Men verlangt nu in elk dezer drie figuren eenen cirkel te beschrijven?*

Opgelost *door* L. J. Ulman, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquôy, C. J. Bolten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs *en* A. Vos.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

1°. *Voor de figuur* CMD.

Trek ME loodregt op AB, dan is het uit de gelijke plaatsing der gelijke boogen MC en MD, ter wederzijde van ME, blijkbaar, dat het middelpunt des gezochten cirkels ergens in ME moet vallen; laat P dit middelpunt zijn, en trek PB, snijdende den boog MD en den cirkel P in hun onderling raakpunt F, dan is PF = PE de straal des gezochten cirkels, en BF = BM die des gegevenen halven cirkels. Stel nu den gezochten straal gelijk x en den gegevenen gelijk a, dan is PM $= a - x$, en daar

$$PM^2 + BM^2 = PB^2$$

is, zoo hebben wij

$$(a-x)^2 + a^2 = (a+x)^2,$$

dat is $\qquad a^2 = 4ax,$

waaruit volgt $\qquad x = \tfrac{1}{4}a.$

De afstand PE behoeft dus slechts gelijk aan het vierde gedeelte van ME genomen te worden.

2°. *Voor de figuur* ACM.

Trek CG, loodregt op AM, dan is het wederom blijkbaar,

dat het middelpunt des gezochten cirkels ergens in QG zal liggen; laat Q dit middelpunt zijn en trek MQ, welke verlengd zijnde den boog AC en den cirkel Q in hun onderling raakpunt H' snijdt; zij y de straal des gezochten cirkels, dan is $QG = QH' = y$, $MQ = MH' - QH' = a - y$ en $MG = \frac{1}{2}a$,

daar nu $QG^2 + MG^2 = MQ^2$

is, hebben wij $y^2 + \frac{1}{4}a^2 = (a-y)^2$,

dat is $2ay = \frac{3}{4}a^2$,

waaruit volgt $y = \frac{3}{8}a$.

De afstand GQ behoeft dus slechts gelijk aan drie achtste gedeelten van den straal AM genomen te worden.

3°. *Voor de figuur* MDB

ligt de gezochte cirkel en deszelfs middelpunt R, even zoo als voor de figuur ACM het geval is, doch aan de andere zijde van ME.

Aanmerking. Dewijl $AG = \frac{1}{2}a$, $AM = a$, $GQ = \frac{3}{8}a$ en $MP = \frac{3}{4}a$ is, hebben wij de evenredigheid

$$AG : AM = GQ : MP,$$

waaruit volgt, dat de punten A, Q en P in eene zelfde regte lijn liggen. De cirkels P en Q raken dus de boog MC in een zelfde punt H, dat almede op de genoemde regte lijn ligt, bijgevolg raken zij ook elkander in H; en daar dit zelfde ook voor de cirkels P en R geldt, zoo wordt de kleine cirkel P door al de overige cirkels en cirkelbogen, die in de figuur voorkomen, aangeraakt.

Aanmerking van W. J. C. Rammelman Elsevier. Daar de stralen der cirkels Q en R ieder $\frac{3}{8}a$ zijn, terwijl de straal van den cirkel P $\frac{1}{4}a$ is, zoo is de som der drie stralen juist gelijk aan den straal des gegevenen halven cirkels.

CXLV. Voorstel.

Door L. J. Ulman.

In de kromlijnige figuur CMD, *in het voorige voorstel omschreven, is een cirkel getrokken, die de bogen* MC *en* MD *in* H *en* F *raakt* (Fig. 79); *in de kromlijnige figuur* HMF *is weder een cirkel beschreven, den eersten cirkel in in* I *en de bogen* MC *en* MD *in* K *en* L *rakende; voorts is in de kromlijnige figuur* KML *weder op gelijke wijze een derde cirkel beschreven, en zoo vervolgens tot in het oneindige toe. Wanneer nu de straal der gelijke bogen* CD, MC

en MD *gegeven is, vraagt men:* 1°. *eene algemeene formule voor den straal van den* n^{den} *ingeschreven cirkel*; *en* 2°. *de som der inhouden van al de ingeschrevene cirkels te vinden?*

Opgelost *door* J. Acquoy, W. J. C. Rammelman Elsevier, L. J. Ulman, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Laten GHF, IKL, NOP, *enz.* de in het voorstel bedoelde cirkels en m_1, m_2, m_3, *enz.* hunne middelpunten zijn; trekken wij dan de lijnen Am_1, Am_2, Am_3, *enz.*, zoo zullen deze lijnen door de punten H, K, O, *enz.* gaan, in welke de boog MC door de cirkels geraakt wordt, zoodat Hm_1, Km_2, Om_3, *enz.* derzelver stralen zijn.

Laat nu de straal der gelijke bogen CM, MC en MD gegeven zijn gelijk a en stellen wij de stralen der ingeschrevene cirkels achtervolgens door r_1, r_2, r_3, *enz* voor, dan hebben wij uit de regthoekige driehoeken AMm_1, AMm_2, AMm_3, *enz.*

$$(AH + Hm_1)^2 = AM^2 + (MG - Gm_1)^2,$$
$$(AK + Km_2)^2 = AM^2 + (MG - 2\,Gm_1 - Im_2)^2,$$
$$(AO + Om_3)^2 = AM^2 + (MG - 2\,Gm_1 - 2Im_2 - Nm_3)^2,$$

enz.

dat is
$$(a + r_1)^2 = a^2 + (a - r_1)^2,$$
$$(a + r_2)^2 = a^2 + (a - 2r_1 - r_2)^2,$$
$$(a + r_3)^2 = a^2 + (a - 2r_1 - 2r_2 - r_3)^2,$$

enz.

Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt onmiddellijk

$$r_1 = \tfrac{1}{4}a = \frac{\frac{1}{4}a}{1};$$

deze waarde voor r_1 in de tweede vergelijking substituerende, vindt men uit die vergelijking

$$r_2 = \tfrac{1}{12}a = \frac{\frac{1}{4}a}{3};$$

de gevondene waarden voor r_1 en r_2 in de derde vergelijking overbrengende, verkrijgt men uit dezelve

$$r_3 = \tfrac{1}{24}a = \frac{\frac{1}{4}a}{6};$$

op dezelfde wijze voortgaande zal men vinden

$$r_4 = \tfrac{1}{40}a = \frac{\tfrac{1}{4}a}{10},$$

$$r_5 = \tfrac{1}{60}a = \frac{\tfrac{1}{4}a}{15}, \text{ enz.}$$

waaruit men ziet dat de stralen der achtervolgende ingeschrevene cirkels uitgedrukt worden door breuken, die alle $\tfrac{1}{4}a$ tot tellers en de opvolgende driehoekige getallen tot noemers hebben; zijnde de driehoekige wortel van elke noemer juist het getal, dat aanwijst tot den hoeveelsten cirkel de straal behoort. De straal van den n^{den} ingeschreven cirkel zal alzoo uitgedrukt worden door de formule

$$r_n = \frac{\tfrac{1}{4}a}{(\tfrac{1}{2}n(n+1)} = \frac{a}{2n(n+1)}.$$

Om de waarheid van deze formule voldingend te bewijzen, zullen wij nog aantoonen, dat, indien zij voor de stralen der eerste n ingeschreven cirkels doorgaat, zij ook doorgaan zal voor den straal van den $(n+1)^{den}$ cirkel; en dat dus, als

$$r_n = \frac{\tfrac{1}{4}a}{\tfrac{1}{2}n(n+1)}$$

is, ook $$r_{n+1} = \frac{\tfrac{1}{4}a}{\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)},$$

zijn zal.

Uit de figuur hebben wij daartoe:

$$(a+r_{n+1})^2 = a^2 + (a - 2r_1 - 2r_2 - 2r_3 - \text{enz.} - 2r_n - r_{n+1})^2$$

of, volgens de onderstelling, dat de formule voor de stralen der eerste n cirkels doorgaat,

$$(a+r_{n+1})^2 = a^2 + (a - 2\frac{\tfrac{1}{4}a}{1} - 2\frac{\tfrac{1}{4}a}{3} - 2\frac{\tfrac{1}{4}a}{6} - \text{enz.} \ldots - 2\frac{\tfrac{1}{4}a}{\tfrac{1}{2}n(n+1)} - r_{n+1})^2$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$(a+r_{n+1})^2 = a^2 + \left(a - a(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{12} + \text{enz.} \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right) - r_{n+1})^2$$

Nu is, volgens het CLXV. Voorstel van het V. Deel dezer *Verzameling*,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \text{enz.} \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

en dit in de laatstgevondene vergelijking substituerende, heeft men

$$(a + r_{n+1})^2 = a^2 + (a - \frac{n}{n+1}a - r_{n+1})$$

of $$(a + r_{n+1})^2 = a^2 + \left(\frac{a}{n+1} - r_{n+1}\right)^2,$$

dat is: $$a^2+2ar_{n+1}+r^2_{n+1}=a^2+\frac{a^2}{(n+1)^2}-\frac{2ar_{n+1}}{n+1}+r^2_{n+1},$$

of $$2ar_{n+1} = \frac{a^2}{(n+1)^2} - \frac{2ar_{n+1}}{n+1}$$

of $$2(n+1)^2\, r_{n+1} = a - 2(n+1)\, r_{n+1},$$

waaruit men dadelijk vindt

$$r_{n+1} = \frac{a}{2(n+1)^2 + 2(n+1)} = \frac{\frac{1}{4}a}{\frac{1}{2}(n+1)\,(n+2)}.$$

Daar nu boven aangetoond is, dat de gevondene formule voor de stralen der eerste drie ingeschrevene cirkels doorgaat, zoo zal zij blijkens het bewezene ook voor den straal van den vierden cirkel doorgaan; derhalve ook voor den straal van den vijfden cirkel, *enz.*, waaruit volgt, dat zij in het algemeen voldoen zal.

Om eindelijk nog de som der inhouden van al de ingeschrevene cirkels te bepalen, zoo hebben wij, volgens het bovengevondene, voor de stralen dier cirkels achtervolgens

$$\frac{\frac{1}{4}a}{1},\ \frac{\frac{1}{4}a}{3},\ \frac{\frac{1}{4}a}{6},\ \frac{\frac{1}{4}a}{10},\ \textit{enz.}$$

en dus voor hunne inhouden

$$\frac{\frac{1}{16}a^2\pi}{1},\ \frac{\frac{1}{16}a^2\pi}{9},\ \frac{\frac{1}{16}a^2\pi}{36},\ \frac{\frac{1}{16}a^2\pi}{100},\ \textit{enz.}$$

zoodat men, de som van alle die inhouden door S voorstellende, hebben zal

$$S = \tfrac{1}{16}a^2\pi\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{100} + \textit{enz.}\right)$$

Nu is in het CXLIII. Voorstel gebleken, dat

$$\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{100},\ \textit{enz.} = \tfrac{4}{3}\pi^2 - 12 = \tfrac{4}{3}(\pi^2 - 9)$$

is, wij hebben alzoo

$$S = \tfrac{1}{16}a^2\pi \times \tfrac{4}{3}(\pi^2-9) = \tfrac{1}{12}a^2\pi\,(\pi^2-9) = \tfrac{1}{12}a^2(\pi-3)\pi(\pi+3).$$

Aanmerking *van* W. J. C. Rammelman Elsevier. Daar de som der middellijnen of de dubbele som der stralen van de ingeschrevene cirkels, klaarblijkelijk de lijn GM (Fig. 79) en GM $= a$ is, heeft men

$$2\left(\frac{\frac{1}{4}a}{1} + \frac{\frac{1}{4}a}{3} + \frac{\frac{1}{4}a}{6} + \frac{\frac{1}{4}a}{100} + \textit{enz.}\right) = a.$$

of $\frac{1}{2}a\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \text{enz.}\right) = a$,

waaruit volgt

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \text{enz.} = 2.$$

Deze reeks is het dubbel van die, welke gediend heeft om de wet van opvolging der stralen te bewijzen, en moet alzoo omgekeerd, wanneer die wet van opvolging bewezen is, uit dezelve kunnen worden afgeleid.

CXLVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men vraagt de zijden van eenen regthoekigen driehoek in geheele getallen te bepalen, zoodanig, dat de som van de regthoekszijden en de middellijnen der in- en om-geschrevene cirkels een vierkant zij; en dat de wortel van dit vierkant, de middellijn des ingeschrevenen cirkels en de kleinste regthoekszijde eene rekenkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST door J. ACQUOY, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, B. LUBBERS, C. F. JULIUS, C. J. BOETEN, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOEK, I. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. VOS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING van J. ACQUOY.

Daar, volgens eene bekende eigenschap der regthoekige driehoeken, de som der middellijnen van de in- en omgeschrevene cirkels gelijk is aan de som der regthoekszijden, zoo kunnen wij elk dezer sommen door $2x^2$ voorstellen, om daardoor onmiddellijk aan de voorwaarde te voldoen, dat de som van al de genoemde lijnen een vierkant moet zijn. Daar voorts de wortel uit dit vierkant, namelijk $2x$, met de middellijn van den ingeschreven cirkel en de kortste regthoekszijde eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, zoo hebben wij, het verschil dezer reeks y noemende, voor de middellijn van den ingeschreven cirkel $2x + y$ en voor de kortste regthoekzijde $2x + 2y$; verder de middellijn des ingeschreven cirkels $2x + y$ van de som der middellijnen $2x^2$ aftrekkende, verkrijgen wij voor de middellijn des omgeschreven cirkels en dus ook voor de hypothenusa $2x^2 - 2x - y$; en de kortste regthoekszijde $2x + 2y$ van de som der regthoekszijden $2x^2$ aftrekkende, vinden wij voor de langste

regthoekszijde $2x^2 - 2x - 2y$. Wij hebben dus de vergelijking

$$(2x^2 - 2x - y)^2 = (2x^2 - 2x - 2y)^2 + (2x + 2y)^2$$

of, door ontwikkeling en verschikking der termen

$$4x^2 - 4x^2y + 12xy + 7y^2 = 0;$$

stelt men hierin $y = 2px$, dan heeft men

$$4x^4 - 8px^3 + 24px^2 + 28p^2x^2 = 0$$

of door $4x^2$ deelende, hetgeen, daar deze factor niet gelijk nul kan zijn, veilig kan geschieden,

$$1 - 2px + 6p + 7p^2 = 0,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{7p^2 + 6p + 1}{2p}$$

en

$$y = 2px = 7p^2 + 6p + 1.$$

Hierin kan men nu aan p alle mogelijke waarden geven, die x en y tot geheele getallen maken. Neemt men $p = 1$, dan is $x = 7$, en $y = 14$, en dus de kortste regthoekszijde $2x + 2y = 42$, de langste regthoekszijde $2x^2 - 2x - 2y = 56$, en de hypothenusa $2x^2 - 2x - y = 70$.

Neemt men $p = \frac{1}{7}$, dan is $x = 7$, en $y = 2$, en dus de kortste regthoekszijde $2x + 2y = 18$, de langste regthoekszijde $2x^2 - 2x - 2y = 80$, en de hypothenusa $2x^2 - 2x - y = 82$.

CXLVII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een driehoekig getal van twee cijfers te vinden, zoodanig dat, indien men achter deszelfs achtvoud eene 1 *plaatst, het komende getal een vierkant zij?*

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, A. Vos, H. A. Hartogh, H. W. Wettingh, M. L. Goede, A. F. van de Laar, Junior, B. Lubbers *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Zij het gevraagde getal $10x + y$, dan moet volgens het voorstel $800x + 80y + 1$ een vierkant zijn, want achter het achtvoud van een getal éene 1 te plaatsen is hetzelfde als bij deszelfs tachtigvoud 1 op te tellen. Laat $20p + 1$ de wortel van dit vierkant zijn, dan is:

$$800x + 80y + 1 = (20p + 1)^2$$

of $$800x + 80y = 400p^2 + 40p,$$

waaruit, na deeling, door 80, volgt

$$10x + y = \tfrac{1}{2}(10p^2 + p);$$

daar nu het bedoelde getal $10x + y$ een geheel getal en van twee cijfers moet wezen, zoo moet p even en niet grooter dan 4 zijn, derhalve kan p alleen de waarden $+2$, -2, $+4$ of -4 hebben, als wanneer het getal zijn zal 21, 19, 82 of 78. Daar het gevraagde getal verder driehoekig moet zijn, en onder de vier laatste getallen slechts 21 en 78 driehoekige getallen zijn, zoo zijn 21 en 78 de eenigste getallen, welke aan het voorstel beantwoorden.

CXLVIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Drie getallen te vinden, die harmoniesch evenredig zijn, zoodanig, dat derzelver vierkantswortels eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, C. J. Bolten, H. A. Hartogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek, J. S. Speijer, A. Vos, C. van Schaick *en* M. L. Goede.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat de vierkantswortels der verlangde getallen zijn:

$$x - y, \quad x \quad \text{en} \quad x + y,$$

dan is aan de laatste voorwaarde des voorstels voldaan en dan zijn de getallen zelve

$$(x - y)^2, \quad x^2 \quad \text{en} \quad (x + y)^2,$$

die nu nog harmoniesch evenredig moeten zijn; wij hebben dus, volgens de eigenschappen der harmoniesche evenredigheden,

$$x^2 - (x - y)^2 : (x + y)^2 - x^2 = (x - y)^2 : (x + y)^2,$$

dat is: $$2xy - y^2 : 2xy + y^2 = (x - y)^2 : (x + y)^2,$$

of $$2x - y : 2x + y = (x - y)^2 : (x + y)^2;$$

hieruit volgt de vergelijking

$$(2x - y)(x + y)^2 = (2x + y)(x - y)^2,$$

welke door ontwikkeling en herleiding verandert in

$$y^3 = 3x^2y,$$

en waaraan, daar y niet gelijk nul zijn kan, alleen voldaan wordt door

$$y = \pm x\sqrt{3}.$$

Derhalve zijn de vierkantswortels der begeerde getallen

$$x \mp x\sqrt{3},\quad x \text{ en } x \pm x\sqrt{3},$$

en bijgevolg die getallen zelve

$$(x \mp x\sqrt{3})^2,\quad x^2 \text{ en } (x \pm x\sqrt{3})^2,$$

of $\qquad x^2(4 \mp 2\sqrt{3}),\quad x^2 \text{ en } x^2(4 \pm \sqrt{3}),$

waarin voor x eenige willekeurige waarde kan genomen worden.

CXLIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Drie getallen te vinden, die meetkunstig evenredig zijn, zoodanig, dat derzelver vierkantswortels eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, C. J. Bolten, M. L. Goede, H. A. Hartogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoer, J. S. Speijer, A. Vos, H. W. Weytingh *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Men stelle de wortels der begeerde getallen door $x - y$, x en $x + y$ voor, dan is aan de voorwaarde, dat deze wortels eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, voldaan; de getallen zelve zijn dan $(x - y)^2$, x^2 en $(x + y)^2$; deze moeten meetkunstig evenredig zijn en bijgevolg moet men hebben $\qquad x^4 = (x - y)^2 (x + y)^2,$

of na ontwikkeling $x^4 = x^4 - 2x^2 y^2 + y^4$

en $\qquad y^4 = 2x^2 y^2.$

Daar $y = 0$ wel aan deze vergelijking voldoet, maar niet aan de bedoeling des voorstels kan beantwoorden, deelen wij dezelve door y^2, dan komt er

$$y^2 = 2x^2$$

en $\qquad y = \pm x\sqrt{2}.$

De vierkantswortels der begeerde getallen zijn alzoo:

$$x - y = x(1 \mp \sqrt{2}),\ x \text{ en } x - y = x(1 \pm \sqrt{2});$$

en die getallen zelve zijn

$$x^2(3 \mp 2\sqrt{2}),\quad x^2 \quad \text{en} \quad x^2(3 \pm 2\sqrt{2}),$$

waarin men aan x eene waarde naar welgevallen kan geven; voor $x=1$ en het bovenste teeken, verkrijgt men voor de getallen

$$3-2\sqrt{2},\quad 1 \quad \text{en} \quad 3+2\sqrt{2},$$

waarvan $1-\sqrt{2}$, 1 en $1+\sqrt{2}$

de vierkantswortels zijn, welke eene rekenkunstige reeks vormen.

CL. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Men verlangt eene rekenkunstige reeks van de tweede orde te vinden, waarvan de som een vierkant is; terwijl bovendien het aantal termen, de eerste term der reeks en de eerste term van de reeks der eerste verschillen, ieder in het bijzonder, gelijk moeten zijn aan de tweede verschillen der reeks?

OPGELOST *door* A. VOS, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, B. LUBBERS, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING *van* A. VOS.

Indien wij het aantal termen n, den eersten term der reeks a, den eersten term van de reeks der eerste verschillen b, en de tweede verschillen c noemen, dan zal (Zie LACROIX, *Beg. der Stelk.* door I. R. SCHMIDT, 2e druk, § 287—288.) de som werden uitgedrukt door

$$\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}c,$$

of, daar gegeven is $a=b=c=n$, door

$$\frac{n^2}{1}+\frac{n^2(n-1)}{1.\ 2}+\frac{n^2(n-1)(n-2)}{1.\ 2\ 3.}=\frac{n^4+5n^2}{6}=\frac{n^2}{36}(6n^2+30),$$

welke uitdrukking nu een vierkant moet zijn.

Dewijl $\frac{n^2}{36}$ reeds een vierkant is, zoo hebben wij slechts $6n^2+30$ daartoe te maken. Wanneer wij hierop toepassen, hetgeen EULER zegt in zijne *Voll. Inl. tot de Algebra*, 2e deel bladz. 299 en verv., over het rationaal maken van de formule ax^2+b, dan vinden wij, voor de waarden van n, twee reeksen, als:

— 1, 7, 71, 703, 6959, *enz.*

1, 17, 169, 1673, 16561, *enz.*

welke de eigenschap hebben, dat elke volgende term het

tienvoud van den voorgaanden, verminderd met den tweeden voorgaanden, is.

Nemen wij tot een voorbeeld $n = 7$, dan is de reeks

$$7,\ 14,\ 28,\ 49,\ 77,\ 112,\ 154,$$

waarvan de som $441 = (21)^2$ is.

CLI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Indien twee lijnen a en b gegeven zijn, begeert men eene lijn x te construeren, zoodat $x = \sqrt[4]{(a^4 + a^2 b^2 - a^3 b)}$ zij?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, Bas Backer, C. J. Bolten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, J. S. Speijer, L. J. Ulman, A. F. van de Laar, Junior, J. Acquoy *en* A. Vos.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Schrijven wij de opgegevene formule in de gedaante

$$x = \sqrt{\{a \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\}},$$

dan kan men de begeerde lijn op de volgende wijze construeren.

Men make eenen hoek XOY (Fig. 80) van 60°. hetgeen kan geschieden, door eenen willekeurigen gelijkzijdigen driehoek te construeren; op OX en OY neme men $OA = a$ en $OB = b$ en trekke vervolgens de lijn BA, dezelve aan den kant van A verlengende, tot dat $AC = AO = a$ zij; verder beschrijve men op BC als middellijn een halven cirkel en rigte uit A op BC eene loodlijn op, welke den cirkelomtrek in D snijdt; dan zal AD de begeerde lijn zijn. Want uit den driehoek AOB heeft men

$$AB = \sqrt{(OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \mathit{Cos.}\, AOB)}$$

en dus, daar *Cos.* AOB = *Cos.* 60° = ½ is,

$$AB = \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)};$$

voorts is volgens de constructie

$$AD = \sqrt{(AC \times AB)}$$

en dus, daar $AC = a$ genomen is,

$$AD = \sqrt{\{a \sqrt{(a^2 + b^2 - ab)}\}} = \sqrt[4]{(a^4 + a^2 b^2 - a^3 b)}$$

CLII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De zijden van eenen driehoek te berekenen, waarvan de hoogte, de opstaande zijden en de baxis eene opklimmende rekenkunstige reeks van vier termen daarstellen, welker verschil gegeven is?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. VOS, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, W. VAN LOON, J. S. SPEIJER, M. G. SNOER, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Laat de hoogte des driehoeks door . . . . $2x$,
de eene opstaande zijde door . . . . $2x + a$,
de andere opstaande zijde door . . . . $2x + 2a$
en de bazis door . . . . $2x + 3a$
voorgesteld worden, dan stellen deze vier lijnen, volgens de opgaaf, eene rekenkunstige reeks daar, waarvan het verschil a gegeven is.

Nu wordt de inhoud I eens driehoeks, waarvan de zijden p, q en r zijn, als men kortheidshalve $\frac{1}{2}(p + q + r) = s$ stelt, altijd uitgedrukt door de formule

$$I = \sqrt{s(s - p)(s - q)(s - r)};$$

hier is nu $p = 2x + a$, $q = 2x + 2a$, $r = 2x + 3a$; bijgevolg $s = 3x + 3a$, $s - p = x + 2a$, $s - q = x + a$, $s - r = x$ en derhalve

$$I = \sqrt{(3x + 3a)(x + 2a)(x + a)x}$$

of $$I = (x + a)\sqrt{3x(x + 2a)}.$$

Verder wordt de inhoud eens driehoeks ook gevonden, door de bazis met de halve hoogte te vermenigvuldigen; wij hebben dus ook $I = x(2x + 3a)$
en bijgevolg de vergelijking

$$(x + a)\sqrt{3x(x + 2a)} = x(2x + 3a).$$

Deze vergelijking tot de tweede magt verheffende en, daar x niet gelijk nul kan zijn, door x deelende, komt er

$$3(x + a)^2(x + 2a) = x(2x + 3a)^2$$

of, ontwikkelende en naar de magten van x rangschikkende,

$$x^3 - 6a^2x - 6a^3 = 0.$$

Stelt men $x = ay$, dan verandert de vergelijking in

$$y^3 - 6y - 6 = 0,$$

welke, volgens de leerwijze van CARDANUS opgelost, slechts de eene bestaanbare wortel

$$y = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}$$

oplevert; derhalve is $x = ay = a(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2})$ en wij hebben

dus $$2x = 2a\,(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}),$$
$$2x + a = a\,(1 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}),$$
$$2x + 2a = a\,(2 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}),$$
$$2x + 3a = a\,(3 + 2\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2}),$$
waardoor de zijden des driehoeks in het gegevene verschil a zijn uitgedrukt.

AANMERKING *van* L. J. ULMAN. Wanneer niet bepaald ware, dat de bazis de laatste term der reeks en dus de grootste der drie zijden zijn moest, dan zou men $2x$ voor de hoogte, $2x + a$ en $2x + 3a$ voor de opstaande zijden, en $2x + 2a$ voor de bazis stellende, op dezelfde wijze als boven, tot de vergelijking

$$(x + a)\,\sqrt{3x\,(x + 2a)} = 2x\,(x + a)$$

geraakt zijn; deze vergelijking door $x + a$ en $\sqrt{x}$, welke factoren niet gelijk nul kunnen zijn, deelende en vervolgens tot de tweede magt verheffende, zou men hebben

$$3\,(x + 2a) = 4x$$

en dus $$x = 6a,$$
zoodat alsdan de zijden des driehoeks zouden zijn: $13a$, $14a$ en $15a$, van welke nu $14a$ de bazis, of die zijde waarop de loodlijn valt, beteekent.

CLIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Het getal 765 in vier geheele getallen te verdeelen, welke alle vierkanten zijn en eene meetkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. AGQUOY, C. F. JULIUS, A. VOS, H. W. WETTINGH, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. VAN LOON, F. C. RADIJS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, M. DE LEON, H. A. HARTOGH en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men stelle de deelen voor door x^2, x^2y^2, x^2y^4 en x^2y^6, dan zijn dezelve alle vierkanten en maken eene meetkunstige reeks uit; derzelver som is dan

$$x^2\,(1 + y^2 + y^4 + y^6) = 765.$$

Uit deze vergelijking blijkt dadelijk, dat 765 door x^2, dat is door een volkomen vierkant deelbaar moet zijn; daar nu

765 = 3 × 3 × 5 × 17 is, kan x^2 niet anders dan 1 of 9 zijn, neemt men $x^2 = 1$, dan is

$$1 + y^2 + y^4 + y^6 = 765,$$

welke vergelijking geene meetbare wortels oplevert en dus, ter beantwoording van het voorstel, niet dienen kan.

Wij moeten dus $x^2 = 9$ nemen; dan is

$$1 + y^2 + y^4 + y^6 = 85$$

of

$$y^6 + y^4 + y^2 - 84 = 0,$$

welke vergelijking slechts eenen meetbaren wortel heeft, namelijk $y = 2$; wij hebben alzoo $x^2 = 9$ en $y^2 = 4$, waaruit volgt, dat de begeerde deelen van het getal 765 zijn

$$9 = 3^2, \quad 36 = 6^2, \quad 144 = 12^2 \quad \text{en} \quad 576 = 24^2$$

en dat deze verdeeling de eenige in geheele getallen is, die aan de vraag kan beantwoorden.

CLIV. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Alle mogelijke getallen van drie cijfers te vinden, welke de eigenschap hebben, dat zij gelijk zijn aan 37 maal de som hunner cijfers?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, F. C. BADIJS, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. VOS, H. W. WEYTINGH, C. J. BOLTEN, BAS BACKER, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK, M. DE LEON, H. A. HARTOGH *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Stelt men voor de gevraagde getallen $100x + 10y + z$, dan moet

$$100x + 10y + z = 37(x + y + z)$$

zijn, waaruit men terstond vindt

$$y = \frac{7x - 4z}{3} = 2x - z + \frac{x - z}{3};$$

dewijl hieruit blijkt dat $x - z$ door 3 deelbaar moet zijn, stelle men $x - z = 3p$, waarin nu p geen gebroken mag wezen, dan vindt men

$$y = x + 4p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

terwijl dan tevens $z = x - 3p$ . . . . (2)

is. Daar nu x, y en z geheele getallen kleiner dan 10 moeten zijn, terwijl bovendien $x > 0$ moet wezen, zoo blijkt

reeds terstond uit (1) dat p tusschen $+3$ en -3 moet genomen worden; deze grenzen kunnen echter nog naauwer bepaald worden; want stelt men $p=2$, dan volgt uit (1), dat men voor x niet anders dan $x=1$ kan nemen, waardoor volgens (2) de waarde van z negatief zou worden; en stelt men $p=-2$, dan kan volgens (1) x niet anders dan 8 of 9 zijn, en dan zou, volgens (2), $z=14$, of $z=15$ en dus z grooter dan 9 worden. Derhalve moet p tusschen $+2$ en -2 genomen worden, dat is: men kan aan p geene andere waarden geven, dan $+1$, 0 of -1.

Stelt men $p=1$, dan is volgens (1) $x<6$ en volgens (2) $x>3$; men kan dus, in verband met $p=1$, hebben

$x=3$, $x=4$ of $x=5$,
alsdan is $y=7$, $y=8$ of $y=9$
en $z=0$, $z=1$ of $z=2$,

waardoor men de getallen 370, 481 en 592 verkrijgt.

Stelt men $p=0$, dan is volgens (1) en (2) $x=y=z$, waaruit volgt, dat alle getallen van drie gelijke cijfers de in het voorstel genoemde eigenschap bezitten.

Stelt men eindelijk $p=-1$, dan is volgens (1) $x>3$ en volgens (2) $x<7$; men kan dus, in verband met $p=-1$,

hebben $x=4$, $x=5$ of $x=6$,
alsdan is $y=0$, $y=1$ of $y=2$
en $z=7$, $z=8$ of $z=9$,

waardoor men de getallen 407, 518 en 629 verkrijgt.

Er bestaan alzoo in het geheel *vijftien* getallen, welke aan het voorstel voldoen; te weten: 111, 222, 333, 370, 407, 444, 481, 518, 555, 592, 629, 666, 777, 888 en 999.

CLV. VOORSTEL.

Door M. DE LEON.

Men wil de verhouding bepalen tusschen een getal van n *gelijke cijfers en de som van deze* n *cijfers?*

OPGELOST *door* J. ACQUOY, BAS BACKER, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, W. VAN LOON, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, L. J. ULMAN, A. VOS *en* M. L. GOEDE.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Noemt men de gelijke cijfers p, dan zal een getal van n

zulke cijfers, als men het grondtal van het talstelsel, waarin men dat getal begeert uit te drukken, gelijk a stelt, voorgesteld kunnen worden door

$$a^{n-1}p + a^{n-2}p + a^{n-3}p + enz. \ldots + a^2 p + ap + p,$$

terwijl de som van alle die cijfers gelijk is aan np.

De gevraagde verhouding is alzoo als

$$a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + enz. \ldots + a^2 + a + 1 : n,$$

waaruit volgt: *dat een getal van n gelijke cijfers tot de som van deze cijfers altijd in reden is, als een getal van n éénen tot n.*

Daar voorts $a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + enz. \ldots + a^2 + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ is, zoo zal men de gevraagde verhouding ook kunnen voorstellen door

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} : n = a^n - 1 : (a - 1)n.$$

In het gewone talstelsel, waar $a = 10$ is, zal deze verhouding dus zijn,

als $\quad 10^n - 1 : 9n,$

of als $\quad \frac{10^n - 1}{9} : n;$

neemt men in aanmerking dat $10^n - 1$ een getal van n negens en dus $\frac{10^n - 1}{9}$ een getal van n éénen is, dan komt men op de evenredigheid terug, welke wij boven voor een willekeurig talstelsel bewezen hebben.

CLVI. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

De vergelijkingen

$$x^3y + x^2yz + x^2 = 76$$
$$xy^3 + zy^3 + y^2 = 171$$
$$yz^3 + xyz^2 + z^2 = 304$$

op te lossen?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, J. ACQUOY, A. VOS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. VAN LOON, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, *en* J. S. SPEIJER.

OPLOSSING van C. F. JULIUS.

Schrijven wij de gegevene vergelijkingen aldus:

$$x^2\,(xy + yz + 1) = 76 \;\ldots\ldots\; (1),$$
$$y^2\,(xy + yz + 1) = 171 \;\ldots\ldots\; (2),$$
$$z^2\,(xy + yz + 1) = 304 \;\ldots\ldots\; (3),$$

en deelen wij (1) in (2) en (3), dan hebben wij

$$\frac{y^2}{x^2} = \tfrac{9}{4} \text{ of } y = \pm \tfrac{3}{2}x \quad (4)$$

en

$$\frac{z^2}{x^2} = 4 \text{ of } z = \pm 2x \quad (5);$$

nu kunnen wij de dubbele waarden, in (4) en (5) voorkomende, op alle mogelijken wijzen verbinden, waardoor wij elk der volgende stelsels waarden voor y en z verkrijgen:

$$y = \tfrac{3}{2}x \text{ en } z = 2x \;\ldots\ldots\; (6),$$
$$y = \tfrac{3}{2}x \text{ en } z = -2x \;\ldots\ldots\; (7),$$
$$y = -\tfrac{3}{2}x \text{ en } z = 2x \;\ldots\ldots\; (8),$$
$$y = -\tfrac{3}{2}x \text{ en } z = -2x \;\ldots\ldots\; (9);$$

substitueren wij nu elk dezer stelsels, in eene der gegevene vergelijkingen, dan zullen wij, door het gebruik van elk stelsel eene verschillende vergelijking in x verkrijgen; wij vinden namelijk door het gebruik:

van (6), $x^2(\tfrac{3}{2}x^2+3x^2+1) = 76$ of $9x^4 + 2x^2 = 152$ (10),
van (7), $x^2(\tfrac{3}{2}x^2-3x^2+1) = 76$ of $3x^4 + 2x^2 = -152$ (11),
van (8), $x^2(-\tfrac{3}{2}x^2-3x^2+1) = 76$ of $9x^4 - 2x^2 = -152$ (12),
en van
(9), $x^2(-\tfrac{3}{2}x^2+3x^2+1) = 76$ of $3x^4 + 2x^2 = 152$ (13);

uit elk dezer vier vergelijkingen vindt men nu, door de gewone leerwijze voor het oplossen der vierkantsvergelijkingen, gemakkelijk vier waarden voor x, te weten:

uit (10), $x = \pm 2$ of $x = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{-38}$ ......(14),
uit (11), $x = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3\,(1 \pm \sqrt{-455})}$ ..(15),
uit (12), $x = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{(1 \pm \sqrt{-1367})}$ ....(16)
en uit (13), $x = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3\,(-1 \pm \sqrt{457})}$ ...(17).

Daar nu, met elke dezer *zestien* waarden voor x, eene waarde voor y, en eene waarde voor z overeenstemt, volgens (6), (7), (8) en (9), zoo laten de opgegevene vergelijkingen ook *zestien* oplossingen toe. Onder de gevondene waarden voor x, zijn er echter slechts *vier* bestaanbaar, te weten: uit (14) $x = \pm 2$ en uit (17) $x = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3\,(-1 + \sqrt{457})}$,

zoo dat dan ook de vergelijkingen slechts voor *vier* oplossingen in bestaanbare waarden vatbaar zijn. Dezelve zijn:

$$x = 2 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = 4 \quad ;$$
$$x = -2 \quad , \quad y = -3 \quad , \quad z = -4 \quad ;$$
$$x = +\tfrac{1}{3}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457}), \quad y = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457}), \quad z = -\tfrac{2}{3}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457});$$
en
$$x = -\tfrac{1}{3}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457}), \quad y = +\tfrac{1}{2}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457}), \quad z = +\tfrac{2}{3}\sqrt{3}(-1+\sqrt{457}).$$

CLVII. VOORSTEL.

Door H. W. BLOEM.

Indien men eenen willekeurigen vierhoek, door het trekken der beide diagonalen, in vier driehoeken verdeelt, en vervolgens de zwaarte-punten dezer driehoeken door regte lijnen vereenigt, zullen deze vereenigingslijnen een parallelogram vormen, waarvan de inhoud $\frac{2}{9}$ *is van den inhoud des oorspronkelijken vierhoeks. Men vraagt dit te bewijzen?*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. VAN LOON, F. C. RADIJS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, L. J. ULMAN *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Laat de vierhoek ABCD (Fig. 81.), door de diagonalen AC en BD, in vier driehoeken AIB, BIC, CID en DIA verdeeld worden, die respectievelijk de punten E, F, G en H tot zwaartepunten hebben. Vereenigt men dan deze zwaartepunten, zoo ontstaat er klaarblijkelijk eenen vierhoek EFGH. Indien men, door de zwaartepunten F en G, de lijnen BFK en DGK trekt, zullen deze lijnen elkander, zoo als genoegzaam bekend is, in een zelfde punt K, op het midden van IC, ontmoeten, zoodanig dat tevens KF $= \frac{1}{3}$ KB en KG $= \frac{1}{3}$ KD zal wezen;

derhalve is, in den driehoek BKD, KD : KG = KB : KF = 3 : 1; alzoo is FG evenwijdig met en tevens gelijk aan $\frac{1}{3}$ van BD. Door het trekken der lijnen BL en DL, zal men hetzelfde van EH bewijzen; FG dus gelijk en evenwijdig met EH zijnde, is EFGH een parallelogram.

Door het trekken der lijnen AEM en CFM, zal men wederom bewijzen, dat EF evenwijdig aan en gelijk aan $\frac{1}{3}$ van AC is; derhalve is *hoek* HEF = *hoek* AIB. Nu is

$$\textit{Inh. vierh.}\ ABCD = \tfrac{1}{2}\ AC \times BD \times \textit{Sin.}\ AIB$$

en $$\textit{Inh. par.}\ EFGH = EF \times HE \times \textit{Sin.}\ HEF$$
$$= \tfrac{1}{3}\ AC \times \tfrac{1}{3}\ BD \times \textit{Sin.}\ AIB$$
$$= \tfrac{1}{9}\ AC \times BD \times \textit{Sin.}\ AIB,$$

waaruit volgt

$$\textit{Inh. par.}\ EFGH = \tfrac{2}{9}\ \textit{Inh. vierh.}\ ABCD;$$

zijnde hierdoor het gestelde bewezen.

CLVIII. Voorstel.

Door K. Smit.

Men vraagt de zijden van eenen driehoek te berekenen, waarvan bekend is: dat de omtrek 124,8; *het product van de drie getallen, waardoor de zijden worden uitgedrukt*, 67392; *en een der hoeken het dubbel van een der beide andere is?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, A. Vos, C. F. Julius, J. S. Speijer, L. J. Ulman, W. J. C. Rammelman Elsevier, A. F. van de Laar, Junior, *en* D. van Lankeren Matthes.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABC (Fig. 82) de bedoelde driehoek zijn, waarin *hoek* B = 2 *hoek* A gegeven is, beschrijven wij dan uit het hoekpunt C met de zijde CB als straal eenen cirkel snijdende AC en haar verlengde in D en F, gelijk mede AB in E, dan zal, indien men CE trekt, BCE een gelijkbeenige driehoek en bijgevolg *hoek* CEB = *hoek* B = 2 *hoek* A zijn; maar men heeft ook *hoek* CEB = *hoek* A + *hoek* ACE; derhalve is *hoek* ACE = *hoek* A en AE = EC. Stellen wij nu

$$CF = CB = CE = CD = AE = r,\ AD = x \text{ en } BE = y;$$

dan geeft de eigenschap des cirkels, dat AD × AF = AE × AB is, de vergelijking

$$x(x + 2r) = r\,(r + y)\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1);$$

voorts gemakshalve de gegevene omtrek door a en het bekende product der zijden door b voorstellende, hebben wij nog

$$x + y + 3r = a \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

en

$$(x+r)\ r\ (r+y) = b \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

zoodat wij nu drie vergelijkingen, tusschen even zoo vele onbekenden, x, y en r hebben.

Uit de vergelijkingen (1) en (3) trekken wij

$$r(r+y) = x\,(x+2r) = \frac{b}{x+r},$$

waaruit volgt

$$x\,(x+r)\,(x+2r) = b \ldots\ldots\ldots (4);$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2) trekken wij

$$r+y = \frac{x\,(x+2r)}{r} = a-(x+2r),$$

waaruit volgt

$$x\,(x+2r) = ar - r(x+2r)$$

of

$$(x+r)\,(x+2r) = ar \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5);$$

uit het verband van (4) en (5) volgt terstond

$$arx = b \text{ of } r = \frac{b}{ax} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6);$$

en deze waarde van r in (5) overbrengende, komt er

$$\left(x+\frac{b}{ax}\right)\left(x+\frac{2b}{ax}\right) = \frac{b}{x}$$

of, na ontwikkeling en rangschikking

$$x^4 + 3\frac{b}{a}x^2 - bx + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0 \ldots\ldots\ldots (7).$$

Stellen wij nu in deze vergelijking voor a en b de gegevene getallen, waardoor $\frac{b}{a} = \frac{67392}{124{,}8} = 540$ wordt, dan verandert zij in

$$x^4 + 1620x^2 - 67392x + 583200 = 0;$$

hierin $x = 6z$ stellende, verkrijgen wij de eenvoudiger vergelijking

$$z^4 + 45z^2 - 312z + 450 = 0 \ldots\ldots\ldots (8).$$

Deze vergelijking heeft vooreerst eenen meetbaren wortel $z = 3$; hierdoor wordt $x = 6z = 18$, $r = \frac{b}{ax} = \frac{540}{x} = 30$, $y = a - (3r + x) = 124{,}8 - 108 = 16{,}8$, zoodat wij alsdan voor de zijden des driehoeks hebben:

$AC = x + r = 48$, $AB = y + r = 46{,}8$ en $BC = r = 30$.

Deelen wij het eerste lid der vergelijking (8) door $z - 3$, dan vinden wij

$$z^3 + 3z^2 + 54z - 150 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (9);$$

hierin $z = u - 1$ stellende, komt er

$$u^3 + 51u - 202 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (10);$$

uit het positieve teeken van den term $51u$ blijkt, dat deze vergelijking twee onbestaanbare wortels heeft en dat de bestaanbare door de formule van CARDANUS kan gevonden worden; deze formule geeft

$$u = \sqrt[3]{(101 + \sqrt{15114})} - \sqrt[3]{(-101 + \sqrt{15114})},$$

welke waarde van u, tot in drie decimalen berekend, geeft $u = 3{,}273$; dus wordt $z = u - 1 = 2{,}273$, $x = 6z = 13{,}639$,

$$r = \frac{540}{x} = 39{,}592,\ y = a - (3r + x) = -7{,}615,$$ zoodat

wij, dezen tweeden wortel gebruikende, voor de zijden des driehoeks hebben:

$AC = x + r = 53{,}231$, $AB = y + r = 31{,}977$ en $BC = r = 39{,}592$.

Er zijn dus twee driehoeken, welke aan het voorstel beantwoorden; bij de eerste, y positief zijnde, is *hoek* B scherp; bij de tweede is y negatief en dus *hoek* B stomp, zoo als in Fig. 83. Hadden wij ons aanvankelijk den driehoek ABC in den toestand van Fig. 83 voorgesteld, dan zouden wij (opmerkende dat, *hoek* CEG = *hoek* B = 2 *hoek* A en ook *hoek* CEG = *hoek* A + *hoek* ACE zijnde, wederom *hoek* ACE = *hoek* A, en dus AE = CE is) tot dezelfde vergelijkingen (1), (2) en (3) als boven geraakt zijn, alleen met dit onderscheid, dat y van positief negatief zou zijn geworden.

CLIX. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men wil de zijden eens driehoeks en deszelfs hoogte in rationale getallen bepalen, zoodat de omtrek viermaal zoo lang is als de hoogte?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, M. L. GORDE, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, J. S. SPEIJER, A. VOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS *en* W. J. C. BAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat de bazis des driehoeks a, deszelfs hoogte h en de zijden x en y genoemd worden, dan heeft men, tusschen de zijden en de hoogte, de bekende vergelijking

$$(a+x+y)\,(a+x-y)\,(a-x+y)\,(-a+x+y)=4a^2\,h^2 \quad (1),$$

van welke elk lid zestien maal de tweede magt van den inhoud voorstelt; voorts is gegeven

$$a+x+y=4h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Uit de laatste vergelijking trekken wij

$$x+y=4h-a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

en substitueren deze waarde van $x+y$ in den eersten en laatsten factor van het eerste lid der vergelijking (1), dan komt er

$$4h\,(a+x-y)\,(a-x+y)\,(4h-2a)=4a^2\,h^2$$

of door achtervolgende herleiding

$$\{a+(x-y)\}\,\{a-(x-y)\}=\frac{a^2\,h}{4h-2a},$$

$$a^2-(x-y)^2=\frac{a^2\,h}{4h-2a},$$

$$(x-y)^2=a^2-\frac{a^2\,h}{4h-2a},$$

$$(x-y)^2=a^2\,\frac{3h-2a}{4h-2a},$$

en
$$x-y=\pm a\sqrt{\frac{3h-2a}{4h-2a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4);$$

door nu (3) en (4) te verbinden, vindt men

$$x \text{ en } y=\tfrac{1}{2}\left\{4h-a\pm a\sqrt{\frac{3h-2a}{4h-2a}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

waarvan men naar willekeur het bovenste teeken bij de eene en het benedenste bij de andere opstaande zijde kan laten behooren.

Daar wij tusschen de vier lijnen, x, y, a en h slechts de twee onafhankelijke vergelijkingen (1) en (2) hebben, kunnen wij twee derzelve, waartoe wij a en h zullen kiezen, naar welgevallen nemen, mits slechts zoodanig, dat de beide anderen x en y rationaal worden. Hiertoe behoeft alleen de wortelgrootheid in (5) voorkomende rationaal gemaakt te worden, waartoe wij stellen

$$(3h-2a)\,(4h-2a)=(2ph-2a)^2;$$

uit deze stelling volgt onmiddelijk

$$\frac{h}{a} = \frac{4p-7}{2(p^2-3)},$$

stellen wij nu $h = n\,(4p-7)$ . . . . (6)

dan is $a = 2n\,(p^2-3)$ . . . . (7)

en deze waarden in (5) substituerende, vinden wij na herleiding

$$x \text{ en } y = n\left\{-p^2+8p-11 \pm \frac{(p^2-3)(2p-3)}{2(p-2)}\right\} \ldots (8);$$

en zoo wij verder, ter vermijding van gebrokens, $n = 2r\,(p-2)$ stellen, gaan de vergelijkingen (6), (7) en (8) over in:

$$h = 2r\,(p-2)\,(4p-7) \;\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$a = 4r\,(p-2)\,(p^2-3) \;\ldots\ldots\ldots (10);$$

$$x \text{ en } y = r\left\{-2(p-2)(p^2-8p+11) \pm (p^2-3)(2p-3)\right\} \;(11);$$

de laatste waarden ieder afzonderlijk uitwerkende, heeft men ook

$$x \text{ en } y = \begin{cases} r\,(17p^2-60p+53) \;\ldots\ldots\ldots (12) \\ r\,(-4p^3+23p^2-48p+35) \;\ldots (13); \end{cases}$$

hierin mag men nu voor p en r alle mogelijke rationale waarden nemen, alleen onder die bepaling, dat a, h, x en y, alle positief en zoo men wil ook geheele getallen worden. De factor $17p^2-60p+53$ van (12) wordt, voor alle waarden van p, positief en dus moet ook r positief zijn. Alle negatieve waarden van p, maken h, x en y positief, doch geene negatieve waarde van p kan a positief maken, ten zij $p > -\sqrt{3}$ zij; neemt men p positief, dan is voor $p = 2$ of $p > 2$ de waarde van (13) negatief; neemt men p positief, tusschen 2 en $\sqrt{3}$, dan wordt a negatief; p moet dus tusschen de grenzen $-\sqrt{3}$ en $\sqrt{3}$ genomen worden en dan zullen a, h, x en y alle positief worden. Men kan voor p gebrokens nemen, doch dan zal het gemakkelijk vallen, voor r zulke waarden te nemen, dat er voor de zijden des driehoeks en de hoogte geheele getallen komen.

Daar wij nu voor de gevraagde lijnen de formulen (9), (10) en (11) hebben uitgebragt, en aangetoond, wat men voor p en r in deze formulen nemen mag; is het voorstel in het algemeen opgelost. Tot voorbeelden heeft men:

voor $p = 0$: $h = 28r$, $a = 24r$, x en $y = 35r$ en $53r$;

voor $p = 1$: $h = 6r$, $a = 8r$, x en $y = 10r$ en $6r$;

voor $p = -1$: $h = 66r$, $a = 24r$, x en $y = 130r$ en $110r$;

voor $p = \frac{4}{3}$: $h = \frac{20}{9}r$, $a = \frac{88}{27}r$, x en $y = \frac{29}{9}r$ en $\frac{65}{27}r$;

voor $p = \frac{5}{4}$: $h = 3r$, $a = \frac{69}{16}r$, x en $y = \frac{73}{16}r$ en $\frac{25}{8}r$;

voor $p = \frac{3}{2}$: $h = r$, $a = \frac{3}{2}r$, x en y beide $= \frac{5}{4}r$;

enz. Neemt meu in het eerste dezer voorbeelden $r = 1$ in het tweede en derde $r = \frac{1}{2}$, in het vierde $r = 27$, in het vijfde $r = 16$, in het zesde $r = 4$, dan verkrijgt men:

$h = 28$, $a = 24$, x en $y = 36$ en 53;
$h = 3$, $a = 4$, x en $y = 5$ en 3;
$h = 33$, $a = 12$, x en $y = 65$ en 55;
$h = 60$, $a = 88$, x en $y = 87$ en 65;
$h = 48$, $a = 69$, x en $y = 73$ en 50;
$h = 4$, $a = 6$, x en y beide $= 5$;

enz. enz.

CLX. VOORSTEL.

Door K. SMIT.

Men wil de zijden eens driehoeks en deszelfs hoogte in rationale getallen bepalen, zoodat de hoogte en de beide opstaande zijden eene harmonische reeks uitmaken?

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, M. L. GOEDE, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, J. S. SPEIJER, A. VOS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Zij ABC (Fig. 84.) de begeerde driehoek; stellen wij $AD = x$, $AC = y$ en $AB = \frac{xy}{2x - y}$, dan zijn deze drie lijnen in eene harmonische evenredigheid, het komt er nu alleen op aan x en y zoodanig te bepalen, dat BC eene rationale waarde bekomt.

Nu is

$$CD = \sqrt{(AC^2 - AD^2)} = \sqrt{(y^2 - x^2)}$$

en

$$BD = \sqrt{(AB^2 - AD^2)} = \sqrt{\left\{\frac{x^2y^2}{(2x - y)^2} - x^2\right\}}$$

of

$$BD = \frac{2x}{2x - y}\sqrt{(xy - x^2)}.$$

Om CD rationaal te maken, stellen wij $y = p^2 + q^2$, en $x = 2pq$, dan wordt

$$CD = p^2 - q^2;$$

terwijl deze gestelde waarden voor x en y de bovenstaande waarde voor BD doen overgaan in

$$BD = \frac{4pq}{4pq - p^2 - q^2} \sqrt{\{2pq(p^2+q^2) - 4p^2q^2\}}$$

$$= \frac{4pq}{4pq - p^2 - q^2} \sqrt{2pq\,(p^2 + q^2 - 2pq)}$$

$$= \frac{4pq\,(p-q)}{4pq - p^2 - q^2} \sqrt{2pq}.$$

Deze uitdrukking nu wordt rationaal, door te stellen $p = 2qr^2$; alsdan wordt

$$BD = \frac{16r^3\,(2r^2 - 1)}{-4r^4 + 8r^2 - 1}\, q^2,$$

$$CD = p^2 - q^2 = (4r^4 - 1)\, q^2,$$

$$AB = \frac{xy}{2x - y} = \frac{2pq\,(p^2+q^2)}{4pq - p^2 - q^2} = \frac{4r^2\,(4r^4+1)}{-4r^4 + 8r^2 - 1}\, q^2,$$

$$AC = y = p^2 + q^2 = (4r^4 + 1)q^2$$

en $$AD = x = 2pq = 4r^2\, q^2.$$

Neemt men nu hierin voor r eene willekeurige rationale waarde, mits zoodanig dat de bovenstaande coëfficienten van q^2 positief blijven, dan kan men altijd daarna aan q zulk eene waarde geven, dat de verschillende lijnen in geheele getallen worden gevonden; bijv. voor $r = 1$ heeft men:

$BD = \frac{16}{3}q^2$, $CD = 3q^2$, $AB = \frac{20}{3}q^2$, $AC = 5q^2$ en $AD = 4q^2$;

en neemt men nu q^2 gelijk aan 3, of aan een veelvoud van 3, dan verdwijnen de gebrokens; men vindt voor $q^2 = 3$: $BD = 16$, $CD = 9$, $AB = 20$, $AC = 15$ en $AD = 12$.

De basis BC des driehoeks wordt eindelijk terstond gevonden, door BD en CD op te tellen of af te trekken, naar gelang men begeert, dat de kortste opstaande zijde eenen scherpen of stompen hoek met de basis maakt. In het eerste geval heeft men voor het gekozen voorbeeld $BC = 25$; in het tweede geval $BC = 7$.

CLXI. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De kromme lijn te vinden, die de eigenschap heeft, dat zij al de parabolen, die dezelfde as, hetzelfde brandpunt en de openingen naar dezelfde zijde gekeerd hebben, regthoekig doorsnijdt?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, A. VOS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

I. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Om al de genoemde parabolen door eene zelfde vergelijking te kunnen voorstellen, moeten wij de gemeenschappelijke as, als as der abscissen, en het gemeenschappelijk brandpunt, als oorsprong der onderling regthoekige coordinaten aannemen; alsdan is deze vergelijking

$$y^2 = px + \tfrac{1}{4}p^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin p de parameter beteekent, zijnde het klaar, dat men, aan p alle mogelijke verschillende positieve waarden gevende, door deze vergelijking alle mogelijke parabolen verkrijgt, die dezelfde as, hetzelfde brandpunt en de openingen naar de zelfde zijde gekeerd hebben.

Laat nu AB (Fig. 85.) een dezer parabolen zijn, AX tot as en F tot brandpunt hebbende; laat CD een gedeelte der begeerde kromme lijn zijn, deze parabool, in S, in het algemeen onder eenen hoek α snijdende, trekken wij dan in S raaklijnen SP en SQ aan de beide kromme lijnen, zoo is *hoek* PSQ $= \alpha$ en zoo wij verder *hoek* SPX $= \phi$ en *hoek* SQX $= \phi'$ stellen, is $\phi' = \phi + \alpha$ en dus

$$Tang.\,\phi' = \frac{Tang.\,\phi + Tang.\,\alpha}{1 - Tang.\,\phi\; Tang.\,\alpha} \quad \ldots\ldots (2)$$

Door de vergelijking (1) te differentiëren, vinden wij $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{2y}$,

weshalve $\qquad Tang.\,\phi = \frac{p}{2y}$;

deze waarde van $Tang\,\phi$ behoort echter alleen tot de parabool, wier parameter p is; lossen wij echter p uit de vergelijking (1) op, als wanneer wij vinden

$$p = 2\,(-x \pm \sqrt{(x^2 + y^2)}),$$

waarin, omdat de parameter positief moet zijn, alleen het bovenste teeken geldt, en substitueeren wij eze waarde van p, in de gevondene uitdrukking voor *Tang.* ϕ, dan zal de komende waarde

$$\text{Tang.}\ \phi = \frac{-x+\sqrt{(x^2+y^2)}}{y} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

tot al de parabolen behooren, in de vergelijking (1) begrepen, onverschillig welke waarde men aan p wil toekennen.

Voorts is *Tang.* ϕ' het eerste differentiaal quotient, opgemaakt uit de nog onbekende vergelijking der kromme lijn CD, en dus hebben wij

$$\text{Tang.}\ \phi' = \frac{\delta y}{\delta x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

stellen wij verder gemakshalve

$$\text{Tang.}\ \alpha = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

dan gaat de vergelijking (2), door (3), (4) en (5), over in

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\dfrac{-x+\sqrt{(x^2+y^2)}}{y}+a}{1-\dfrac{-x+\sqrt{(x^2+y^2)}}{y}\cdot a}$$

of in

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{ay-x+\sqrt{(x^2+y^2)}}{ax+y-a\sqrt{(x^2+y^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (6);$$

en deze is nu de differentiaal vergelijking der kromme lijn CD.

Om dezelve te integreren, stellen wij vooreerst

$$y = ux \quad \text{en dus} \quad \delta y = u\delta x + x\delta u,$$

dan gaat zij over in

$$u + \frac{x\delta u}{\delta x} = \frac{au-1+\sqrt{(1+u^2)}}{a+u-a\sqrt{(1+u^2)}};$$

men heeft dus achtervolgens

$$\frac{x\delta u}{x} = \frac{au-1+\sqrt{(1+u^2)}}{a+u-a\sqrt{(1+u^2)}} - u,$$

$$\frac{u}{x} = \frac{-(1+u^2)+(au+1)\sqrt{(1+u^2)}}{a+u-a\sqrt{(1+u^2)}},$$

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{a+u-a\sqrt{(1+u^2)}}{au+1-\sqrt{(1+u^2)}}\cdot\frac{\delta u}{\sqrt{(1+u^2)}} \ldots (7),$$

en alsnu is de vergelijking behoorlijk afgescheiden.

Om het tweede lid dezer laatste vergelijking te integreren, stellen wij verder

$$\sqrt{(1+u^2)} = u + w \text{ of } w = -u + \sqrt{(1+u^2)},$$

dan vinden wij

$$u = \frac{1-w^2}{2w},\ \delta u = -\frac{1+w^2}{2w^2}\delta w,\ \sqrt{(1+u^2)} = \frac{1+w^2}{2w},$$

waardoor de vergelijking (7) overgaat in

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\{(a-1) - 2aw + (a+1)w^2\}\delta w}{\{(a-1) + 2w - (a+1)w^2\}w};$$

teller en noemer van het tweede lid dezer vergelijking hebben eenen gemeenen factor $1 - w$, hierdoor deelende komt er

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\{(a-1) - (a+1)w\}\delta w}{\{(a-1) + (a+1)w\}w};$$

eindelijk vindt men, door de gewone leerwijze voor het verdeelen van gebrokens, in de som of het verschil van anderen,

$$\frac{(a-1) - (a+1)w}{\{(a-1) + (a+1)w\}w} = \frac{1}{w} - \frac{2(a+1)}{(a-1) + (a+1)w},$$

en hierdoor verkrijgen wij

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta w}{w} - \frac{2(a+1)\delta w}{(a-1) + (a+1)w},$$

waarvan de integraal onmiddelijk blijkt te zijn

$$Log.\, x = Log.\, w - 2\, Log.\, \{(a-1) + (a+1)w\} + Log.\, c,$$

dat is: $\dfrac{x\{(a-1) + (a+1)w\}^2}{w} = c$

of ontwikkelende

$$(a-1)^2\frac{x}{w} + 2(a^2-1)x + (a+1)^2 wx = c$$

en $(a^2+1)\left(\dfrac{x}{w} + wx\right) - 2a\left(\dfrac{x}{w} - wx\right) + 2(a^2-1)x = c$ (8),

nu is $w = -u + \sqrt{(1+u^2)}$ en $u = \dfrac{y}{x}$, derhalve

$$w = -\frac{y}{x} + \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)},$$

$$wx = -y + \sqrt{(x^2+y^2)},$$

$$\frac{x}{w} = \frac{x^2}{wx} = \frac{x^2}{-y + \sqrt{(x^2+y^2)}} = y + \sqrt{(x^2+y^2)},$$

hierdoor verandert (8), na deeling door 2, in

$$(a^2+1)\sqrt{(x^2+y^2)} - 2ay + (a^2-1)x = \tfrac{1}{2}c \ldots (9),$$

en deze nu, de integraal van (6) zijnde, is alzoo de vergelijking van de kromme lijn CD.

Deze vergelijking kan tot eenen beteren vorm herleid worden; daar $a = Tang.\ \alpha$ is, heeft men

$$a = \frac{Sin.\ 2\alpha}{1 + Cos.\ 2\alpha},\ a^2 + 1 = \frac{2}{1 + Cos.\ 2\alpha},\ a^2 - 1 = -\frac{2\ Cos.\ 2\alpha}{1 + Cos.\ 2\alpha},$$

door substitutie dezer waarden, verandert de vergelijking (θ), na vermenigvuldiging met $1 + Cos.\ 2\alpha$ en deeling door 2, in

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} - y\ Sin.\ 2\alpha - x\ Cos.\ 2\alpha = \tfrac{1}{4}c\ (1 + Cos.\ 2\alpha);$$

kortheidshalve $\frac{1}{4}c\ (1 + Cos.\ 2\alpha) = c'$ stellende, is dus ook

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = x\ Cos.\ 2\alpha + y\ Sin.\ 2\alpha + c'$$

$$\text{of } x^2 + y^2 = \begin{cases} x^2\ Cos.^2\ 2\alpha + y^2\ Sin.^2\ 2\alpha + 2xy\ Sin. 2\alpha\ Cos. 2\alpha \\ + 2c'x\ Cos.\ 2\alpha + 2c'y\ Sin.\ 2\alpha + c'^2, \end{cases}$$

en de laatste vergelijking herleidt men gemakkelijk tot

$$x^2\ Sin.^2\ 2\alpha + y^2\ Cos.^2\ 2\alpha - 2xy\ Sin.\ 2\alpha\ Cos.\ 2\alpha = 2c'x\ Cos.\ 2\alpha + 2c'y\ Sin.\ 2\alpha + c'^2$$

of tot

$$(y Cos.\ 2\alpha - x\ Sin.\ 2\alpha)^2 = 2c'\ (y\ Sin.\ 2\alpha + x Cos.\ 2\alpha) + c'^2 \quad (10).$$

Trekken wij door den oorsprong F eene lijn FX', met FX eenen hoek 2α makende, en nemen wij, met behoud van denzelfden oorsprong, FX' als nieuwe as van abscissen aan, waarop wij de ordinaten wederom regthoekig rekenen, dan hebben wij, de nieuwe coördinaten x' en y' noemende, door de bekende formulen voor het veranderen der coördinaten-assen,

$$y' = y\ Cos.\ 2\alpha - x\ Sin.\ 2\alpha \text{ en } x' = y\ Sin.\ 2\alpha + x\ Cos.\ 2\alpha;$$

de vergelijking (10) der kromme lijn CD, wordt dus voor deze nieuwe assen van coördinaten

$$y'^2 = 2c'x' + c'^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

welke de gewone vergelijking is eener parabool, indien men den oorsprong in het brandpunt plaatst.

De kromme lijn CD is dus eene parabool, waarvan FX' de groote as, F het brandpunt en $2c'$ de parameter is; daar $2c'$ de standvastige is, door het integreren ontstaan, kan dezelve willekeurig genomen worden; en bijgevolg zullen al de parabolen, die FX' tot as en F tot brandpunt hebben, de gegevene parabolen onder eenen hoek α snijden. Men zal zich dan ook *a priori* gemakkelijk kunnen overtuigen: *dat indien twee parabolen hetzelfde brandpunt hebben, hunne assen elkander zullen snijden onder eenen hoek, die het dubbel is van den hoek, onder welken deze kromme lijnen zelve elkander snijden.*

Voor het bijzonder geval in de opgaaf voorgesteld, is $\alpha = 90^\circ$ en $2\alpha = 180^\circ$; hierdoor verandert de vergelijking (10) in

$$y^2 = -2c'x + c'^2, \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

welke tot eene parabool behoort, die almede het brandpunt in den oorsprong F, de lijn FX tot as, maar eenen negatieven parameter $2c'$ heeft, waarvan de hoegrootheid overigens willekeurig is. De in het voorstel verlangde kromme lijn is dus een parabool, die met de gegevene parabolen dezelfde as, hetzelfde brandpunt, de opening naar de tegengestelde zijde gekeerd, maar eenen willekeurigen parameter heeft.

Aanmerking. De gewone weg, die wij gevolgd hebben, om de vergelijking (6) te integreren, zouden wij kunnen vermeden hebben, indien wij eenen factor hadden kunnen ontdekken, met welken de teller en noemer van het tweede lid dier vergelijking (6) behoorden vermenigvuldigd te worden, om de vergelijking dadelijk afscheidbaar en dus integrabel te maken. Hoewel het vinden van zulk eenen factor *a priori*, niet gemakkelijk is, zullen wij aantoonen, dat dezelve bestaat.

Hernemen wij de vergelijking (6):

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{ay - x + \sqrt{(x^2 + y^2)}}{ax + y - a\sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

en vermenigvuldigen wij teller en noemer van het tweede lid met de uitdrukking $ax - y + a\sqrt{(x^2 + y^2)}$; dan komt er na behoorlijke herleiding

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{(a^2 + 1)x + (a^2 - 1)\sqrt{(x^2 + y^2)}}{-(a^2 + 1)y + 2a\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

dat is:

$$(a^2 + 1)x\delta x + (a^2 - 1)\delta x\sqrt{(x^2 + y^2)} = -(a^2 + 1)y\delta y + 2a\delta y\sqrt{(x^2 + y^2)}$$

of, al de termen aan éénen kant brengende,

$$(a^2 + 1)(x\delta x + y\delta y) + \{(a^2 - 1)\delta x - 2a\delta y\}\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0;$$

deelen wij nu door $\sqrt{(x^2 + y^2)}$, dan vinden wij

$$(a^2 + 1).\frac{x\delta x + y\delta y}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + (a^2 - 1)\delta x - 2a\delta y = 0$$

en hiervan blijkt de integraal dadelijk te zijn

$$(a^2 + 1)\sqrt{(x^2 + y^2)} + (a^2 - 1)x - 2ay = c,$$

even als de vergelijking (9), die wij langs eenen veel langeren weg gevonden hebben.

II. Oplossing van J. Acquoy.

De eigenschap der parabool, dat de voerstralen met de as hoeken maken, die het dubbel zijn van de hoeken welke zij met de kromme lijn zelve vormen, geeft ons voor dit voorstel een gemakkelijk middel ter oplossing aan de hand, waarbij men het gebruik der differentiaal- en integraalrekening kan ontwijken.

Laten AB, A'B', A"B", enz. (Fig. 86) de in de opgaaf genoemde parabolen voorstellen, die het gemeenschappelijk brandpunt F en de gemeenschappelijke as FX hebben, en stellen wij ons voor de kromme lijn CD te bepalen, welke al die parabolen in de punten S, S', S", enz. onder eenen gegevenen hoek α doorsnijdt; dan zal vooreerst die kromme lijn CD ook de as FX, in P, onder eenen hoek α, snijden; om dat de lijn FX kan aangezien worden als een' der bedoelde parabolen, waarvan de parameter nul is. In de figuur zijn dus gegeven de volgende kromlijnige hoeken:
hoek APD $=\alpha$, *hoek* ASD $=\alpha$; *hoek* A'S'D $=\alpha$, *hoek* A"S"D $=\alpha$, *enz.*
wanneer wij dus de voerstralen FS, FS', FS", *enz.* trekken, hebben wij, uit de figuur,

$$\left.\begin{aligned} &\textit{hoek}\ \mathrm{FPD} = \alpha, \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FSD} = \alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{FSA}, \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS'D} = \alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{FS'A'}, \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS''D} = \alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{FS''A''},\ \textit{enz.} \end{aligned}\right\}\ (A)$$

maar, volgens de bovenaangehaalde eigenschap der parabool, is

$$\begin{aligned} &\textit{hoek}\ \mathrm{FSA} = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ \mathrm{SFX}, \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS'A'} = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ \mathrm{S'FX}, \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS''A} = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ \mathrm{S''FX},\ \textit{enz.} \end{aligned}$$

en door dit in de vergelijkingen (A) over te brengen, hebben wij

$$\left.\begin{aligned} &\textit{hoek}\ \mathrm{FPD} = \tfrac{1}{2}\,(2\alpha), \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FSD} = \tfrac{1}{2}\,(2\alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{SFX}), \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS'D} = \tfrac{1}{2}\,(2\alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{S'FX}), \\ &\textit{hoek}\ \mathrm{FS''D} = \tfrac{1}{2}\,(2\alpha - \textit{hoek}\ \mathrm{S''FX}),\ \textit{enz.} \end{aligned}\right\}\ (B)$$

Trekt men nu door het punt F de onbepaalde lijn FX', die met FX eenen hoek X'FX $= 2\alpha$ maakt, dan volgt uit de figuur

$2\alpha =$ *hoek* PFX'

$2\alpha -$ *hoek* SFX $=$ *hoek* SFX'

$2\alpha -$ *hoek* S'FX $=$ *hoek* S'FX',

$2\alpha -$ *hoek* S"FX $=$ *hoek* S"FX', *enz.*

waardoor de vergelijkingen (B) veranderen in

$$\left.\begin{array}{l} \textit{hoek}\ FPD = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ PFX', \\ \textit{hoek}\ FSD = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ SFX', \\ \textit{hoek}\ FS'D = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ S'FX', \\ \textit{hoek}\ FS''D = \tfrac{1}{2}\ \textit{hoek}\ S''FX', \ \textit{enz.} \end{array}\right\} (C).$$

Hieruit blijkt dat de lijnen FP, FS, FS', FS", *enz.* met de lijn FX' hoeken maken, die het dubbel zijn van de hoeken, welke deze zelfde lijnen met de kromme lijn CD vormen; bijgevolg is CD eene parabool, die F tot brandpunt en FX' tot as heeft, maar wier parameter geheel onbepaald is. Stelt men dien parameter gelijk nul, dan gaat de parabool CD over in de regte lijn FX'.

Begeert men dat CD de parabolen AB, A'B', A"B", *enz.* regthoekig doorsnijdt, of is $\alpha = 90°$ gegeven, dan zal men hoek X'FX $= 2\alpha = 180°$ moeten maken, en dus zal, voor dit geval, de as FX' van den snijdenden parabool in het verlengde van FX komen; waaruit blijkt dat de kromme lijn, die de parabolen AB, A'B'—A"B", *enz.*, regthoekig snijdt, een parabool is van willekeurigen parameter, hetzelfde brandpunt en dezelfde lijn tot as hebbende als de parabolen AB, A'B' A"B", *enz.*, maar wier opening naar de tegengestelde zijde gekeerd is.

CLXII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Vier parabolen, waarvan er twee de openingen naar de tegengestelde zijde van de beide anderen gekeerd hebben, hebben dezelfde lijn tot as en hetzelfde brandpunt. Men vraagt den inhoud te vinden van het kromlijnige vierhoekje, door de onderlinge snijding dezer parabolen gevormd?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Hoezeer de gevraagde inhoud het gemakkelijkst, door optelling en aftrekking van segmenten der gegevene parabolen,

kan gevonden worden, zullen wij eenen geheel anderen weg inslaan, om daardoor een voorbeeld te geven, hoe men van de tweede differentialen gebruik kan maken, ter inhoudvinding van vlakke figuren. Hierbij zullen wij ons gronden op de eigenschap der parabolen in het voorgaande voorstel gebleken, en wij zullen den gevraagden inhoud verkrijgen, zonder eenige optelling of aftrekking van andere vlakke figuren noodig te hebben.

Laten A, B, C en D (Fig. 87) de toppen der gegevene parabolen zijn; alle het brandpunt in F en de lijn XX' tot as hebbende, dan moet de inhoud van het figuur MNPQ berekend worden. Nemen wij XX' tot as der abcissen en F tot oorsprong der regthoekige coördinaten aan; laten verder $2a$, $2b$, $2c$ en $2d$ respectievelijk de parameters zijn van de parabolen A, B, C en D, dan zijn de vergelijkingen dezer kromme lijnen:

$y^2 = 2ax + a^2$, $y^2 = 2bx + b^2$, $y^2 = -2cx + c^2$ en $y^2 = -2dx + d^2$; hieruit vindt men, op de gewone wijze, voor de coördinaten:

van het punt M $x = \frac{1}{2}(c - a)$ en $y = \sqrt{ac}$,
— — — N $x = \frac{1}{2}(c - b)$ en $y = \sqrt{bc}$,
— — — P $x = \frac{1}{2}(d - b)$ en $y = \sqrt{bd}$,
— — — Q $x = \frac{1}{2}(d - a)$ en $y = \sqrt{ad}$.

Men late nu tusschen A en B, gelijk mede tusschen C en D, een oneindig aantal parabolen doorgaan, alle hetzelfde brandpunt F en dezelfde lijn XX' tot as hebbende, dan zal het vierhoekje MNPQ in een oneindig aantal kleinere vierhoekjes verdeeld zijn, elk van welke eene tweede differentiaal van het figuur MNPQ voorstelt. Zij H de top van eenen der parabolen tusschen A en B, K de top van eenen derzelve tusschen C en D doorgaande en $mnpq$ het oneindig kleine vierhoekje, begrepen tusschen de parabolen H en K en de oneindig digt bij deze gelegene parabolen; zoo wij dan stellen

$$Inh.\ MNPQ = I, \text{ heeft men } Inh.\ mnpq = \delta^2 I.$$

Daar nu uit het verige voorstel gebleken is, dat al deze parabolen elkander regthoekig snijden, moet $mnpq$ als een regthoekje beschouwd worden, welks zijden mn en mp de differentialen zijn van de boogen der parabolen H en K; deze differentialen respectievelijk door δs en $\delta s'$ voorstellende, hebben wij dus

$$\delta^2 I = Inh.\ mnpq = mn \times np = \delta s \times \delta s'.$$

Laten nu om δs en $\delta s'$ te bepalen, $2h$ en $2k$ de parameters der parabolen H en K zijn, dan zijn hunne vergelijkingen

$$y^2 = 2hx + h^2 \quad \text{en} \quad y^2 = -2kx + k^2$$

en men vindt hieruit, voor de coördinaten van het snijpunt n,

$$x = \tfrac{1}{2}(k-h) \quad \text{en} \quad y = \sqrt{hk};$$

voor de parabool H is $y\delta y = h\delta x$ en dus

$$\delta s = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \frac{1}{h}\sqrt{(h^2\delta x^2 + h^2\delta y^2)} = \frac{1}{h}\sqrt{(y^2\delta y^2 + h^2\delta y^2)} = \frac{\delta y}{h}\sqrt{(y^2 + h^2)};$$

voor de parabool K is $y\delta y = k\delta x$ en dus

$$\delta s' = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \frac{1}{k}\sqrt{(k^2\delta x^2 + k^2\delta y^2)} = \frac{1}{k}\sqrt{(y^2\delta y^2 + k^2\delta y^2)} = \frac{\delta y}{k}\sqrt{(y^2 + k^2)};$$

maar dewijl δs en $\delta s'$, tot bereiking van het doel, zullen moeten geïntegreerd worden tusschen de grenzen, voor δs door de parabolen C en D, en voor $\delta s'$ door de parabolen A en B aangewezen, zullen wij δs in k en $\delta s'$ in h als veranderlijke grootheden moeten uitdrukken; substitueren wij dus in de bovenstaande formule $y = \sqrt{hk}$, daarbij, om δy te vinden, h standvastig en k veranderlijk of k standvastig en h veranderlijk nemende, naar gelang men δs voor de parabool H of $\delta s'$ voor de parabool K wil bepalen, dan vindt men

$$\delta s = \frac{\delta k\sqrt{h}}{2\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{h}\sqrt{(hk + h^2)} = \tfrac{1}{2}\delta k\sqrt{\frac{h+k}{k}}$$

en

$$\delta s' = \frac{\delta h\sqrt{k}}{2\sqrt{h}} \cdot \frac{1}{k}\sqrt{(hk + k^2)} = \tfrac{1}{2}\delta h\sqrt{\frac{h+k}{h}},$$

van welke differentialen nu, de integralen de eerste van $k = c$ tot $k = d$, en de tweede van $h = a$ tot $h = b$ moeten gedacht worden.

Door deze waarden van δs en $\delta s'$ vinden wij

$$\delta^2 \mathrm{I} = \tfrac{1}{4}\, \delta h\, \delta k\, \frac{h+k}{\sqrt{hk}},$$

hieruit volgt

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{4} \int \left(\delta k \int \delta h \frac{h+k}{\sqrt{hk}}\right),$$

mits de integralen, tusschen de genoemde grenzen worden genomen.

Nu is, eerst ten opzigte van h integrerende

$$\int \delta h \frac{h+k}{\sqrt{hk}} = \int \frac{\delta h \sqrt{h}}{\sqrt{k}} + \int \frac{\delta h \sqrt{k}}{\sqrt{h}} = \frac{2h\sqrt{h}}{3\sqrt{k}} + 2\sqrt{hk} + \mathrm{C}$$

en, tusschen de grenzen $h = a$ en $h = b$,

$$\int \delta h \frac{h+k}{\sqrt{hk}} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{k}} + 2(\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{k};$$

derhalve is $\mathrm{I} = \tfrac{1}{4} \int \delta k \left(\tfrac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{\sqrt{k}} + 2(\sqrt{a} - \sqrt{b})\sqrt{k}\right)$.

of $\quad \mathrm{I} = \tfrac{1}{6}(a\sqrt{a} - b\sqrt{b}) \int \frac{\delta k}{\sqrt{k}} + \tfrac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \int \delta k \sqrt{k};$

als nu integrerende ten opzigte van k, komt er

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{3}(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})\sqrt{k} + \tfrac{1}{3}(\sqrt{a} - \sqrt{b})\, k\sqrt{k} + \mathrm{C}$$

of, deze integraal van $k = c$ tot $k = d$ nemende,

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{3}(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})(\sqrt{d} - \sqrt{c}) + \tfrac{1}{3}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(d\sqrt{d} - c\sqrt{c})$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{3}(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{d} - \sqrt{c})(a + \sqrt{ab} + b + c + \sqrt{cd} + d).$$

Deze zelfde formule vinden wij door het optellen en aftrekken van verschillende segmenten der vier gegevene parabolen; hiertoe laten wij uit M, N, P en Q de loodlijnen MM', NN', PP' en QQ' op de as XX' vallen, en maken van de vroeger berekende coordinaten der punten M, N, P en Q, gebruik. Hierdoor hebben wij

$$\mathrm{MM'} = \sqrt{ac},\ \mathrm{NN'} = \sqrt{bc},\ \mathrm{PP'} = \sqrt{bd},\ \mathrm{QQ'} = \sqrt{ad};$$

$$\mathrm{FM'} = \tfrac{1}{2}(c-a),\ \mathrm{FN'} = \tfrac{1}{2}(c-b),\ \mathrm{FP'} = \tfrac{1}{2}(d-b),\ \mathrm{FQ'} = \tfrac{1}{2}(d-a);$$

en deze vier laatste waarden verbindende met

$$\mathrm{AF} = \tfrac{1}{2}a,\ \mathrm{BF} = \tfrac{1}{2}b,\ \mathrm{CF} = \tfrac{1}{2}c,\ \mathrm{DF} = \tfrac{1}{2}d,$$

vinden wij

$$\mathrm{AM'} = \mathrm{AF} + \mathrm{FM'} = \tfrac{1}{2}c,\quad \mathrm{AQ'} = \mathrm{AF} + \mathrm{FQ'} = \tfrac{1}{2}d,$$
$$\mathrm{BN'} = \mathrm{BF} + \mathrm{FN'} = \tfrac{1}{2}c,\quad \mathrm{BP'} = \mathrm{BF} + \mathrm{FP'} = \tfrac{1}{2}d,$$
$$\mathrm{CM'} = \mathrm{CF} - \mathrm{FM'} = \tfrac{1}{2}a,\quad \mathrm{CN'} = \mathrm{CF} - \mathrm{FN'} = \tfrac{1}{2}b,$$
$$\mathrm{DQ'} = \mathrm{DF} - \mathrm{FQ'} = \tfrac{1}{2}a,\quad \mathrm{DP'} = \mathrm{DF} - \mathrm{FP'} = \tfrac{1}{2}b.$$

Daar nu de inhoud van het segment eener parabool gelijk is aan twee derde van den omgeschreven regthoek, hebben wij voor de inhouden der segmenten

$$AMM' = \tfrac{2}{3}\ AM'.\ MM' = \tfrac{1}{3}c\ \sqrt{ac},\quad AQQ' = \tfrac{2}{3}\ AQ'.\ QQ' = \tfrac{1}{3}d\ \sqrt{ad},$$
$$BNN' = \tfrac{2}{3}\ BN'.\ NN' = \tfrac{1}{3}c\ \sqrt{bc},\quad BPP' = \tfrac{2}{3}\ BP'.\ PP' = \tfrac{1}{3}d\ \sqrt{bd},$$
$$CMM' = \tfrac{2}{3}\ CM'.\ MM' = \tfrac{1}{3}a\ \sqrt{ac},\quad CNN' = \tfrac{2}{3}\ CN'.\ NN' = \tfrac{1}{3}b\ \sqrt{bc},$$
$$DQQ' = \tfrac{2}{3}\ DQ'.\ QQ' = \tfrac{1}{3}a\ \sqrt{ad},\quad DPP' = \tfrac{2}{3}\ DP'.\ PP' = \tfrac{1}{3}b\ \sqrt{bd}.$$

Nu is uit de figuur klaarblijkelijk

$$\textit{Inh.}\ MNPQ = (AQQ' + DQQ') - (AMM' + CMM') - (BPP' + DPP') + (BNN' + CNN');$$

en hierin de gevondene waarden voor de segmenten overbrengende, komt er

$$I = \tfrac{1}{3}\ \{(a+d)\ \sqrt{ad} - (a+c)\ \sqrt{ac} - (b+d)\ \sqrt{bd} + (b+c)\ \sqrt{bc}.\}$$

Deze formule, die eene zeer regelmatige gedaante heeft, kan men achtervolgens herleiden tot

$$I = \tfrac{1}{3}\ \{(\sqrt{d}-\sqrt{c})\ a\sqrt{a} - (\sqrt{d}-\sqrt{c})b\sqrt{b} + (\sqrt{a}-\sqrt{b})\ d\sqrt{d} - (\sqrt{a}-\sqrt{b})\ c\sqrt{c}\}$$
$$I = \tfrac{1}{3}\ \{(\sqrt{d}-\sqrt{c})\ (a\sqrt{a}-b\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})\ (d\sqrt{d}-c\sqrt{c})\}$$

of

$$I = \tfrac{1}{3}\ (\sqrt{a}-\sqrt{b})\ (\sqrt{d}-\sqrt{c})\ (a+\sqrt{ab}+b+c+\sqrt{cd}+d),$$

even als boven.

CLXIII. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men begeert ook het zwaartepunt te vinden van het kromlijnige vierhoekje, in het voorgaande voorstel bedoeld?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES en W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Wij zullen ter bepaling van dit zwaartepunt, denzelfden weg inslaan, dien wij in het voorgaande voorstel tot het berekenen van den inhoud gevolgd hebben; en men zal zien, dat wij de uitkomst hier gemakkelijker langs dien weg zullen verkrijgen, dan door het bepalen van de afzonderlijke zwaartepunten der segmenten om daaruit tot het gevraagde zwaartepunt te geraken, of door het gebruiken van den regel van GULDIN.

Dezelfde figuur (Fig. 87) als in de oplossing van het voorgaande voorstel gebruikende, en alles door dezelfde letters voorstellende, kunnen wij van de aldaar gevondene uitkomsten dadelijk gebruik maken.

Trekken wij uit n eene loodlijn nn' op XX', dan zijn de momenten van het vierhoekje $mnpq$, ten opzigte van de assen der x, en y respectievelijk

$$nn' \times Inh.\ mnpq \quad \text{en} \quad Fn' \times Inh.\ mnpq,$$

of daar reeds $nn' = \sqrt{hk}$, $Fn' = \frac{1}{2}(k - h)$, $Inh.\ mnpq = \delta^2 I = \frac{1}{4}\,\delta h.\,\delta k\,\frac{h+k}{\sqrt{hk}}$ gevonden is, hebben wij voor deze momenten

$$\tfrac{1}{4}\,\delta h.\,\delta k\,(h+k) \quad \text{en} \quad \tfrac{1}{8}\,\delta h.\,\delta k.\,\frac{k^2 - h^2}{\sqrt{hk}};$$

laat nu de afstand van het begeerde zwaartepunt, tot de as der x door v, en tot de as der y door w voorgesteld worden, dan hebben wij, volgens den gewoonen regel ter bepaling dezer afstanden,

$$v = \frac{\frac{1}{4}\int(\delta k \int \delta h\,(h+k))}{I} \quad \text{en} \quad w = \frac{\frac{1}{8}\int\left(\delta k \int \delta h\,\frac{k^2 - h^2}{\sqrt{hk}}\right)}{I},$$

waarin de integralen tusschen dezelfde grenzen moeten genomen worden, al in het voorgaande voorstel.

Voor deze integralen hebben wij

$$\int \delta h\,(h+k) = \int h\,\delta h + \int k\,\delta h = \tfrac{1}{2}\,h^2 + hk + C$$

of, van $h = a$ tot $h = b$,

$$\int \delta h\,(h+k) = \tfrac{1}{2}\,(a^2 - b^2) + (a-b)\,k;$$

dus $\int(\delta k \int \delta h\,(h+k)) = \int \delta k\left(\tfrac{1}{2}\,(a^2 - b^2) + (a-b)\,k\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\,(a^2 - b^2)k + \tfrac{1}{2}\,(a-b)\,k^2 + C$$

of, van $k = c$ tot $k = d$,

$$\int\left(\partial k \int \partial h\,(h+k)\right) = \tfrac{1}{2}(a^2-b^2)(d-c)+\tfrac{1}{2}(a-b)(d^2-c^2)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a-b)(d-c)(a+b+c+d);$$

voorts is
$$\int \partial h.\frac{k^2-h^2}{\sqrt{hk}} = k\sqrt{k}.\int\frac{\partial h}{\sqrt{h}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\int h\partial h\sqrt{h}$$
$$= 2k\sqrt{hk}-\frac{2h^2\sqrt{h}}{5\sqrt{k}}+C$$

of, van $h = a$ tot $h = b$
$$\int\partial h\frac{k^2-h^2}{\sqrt{hk}} = 2(\sqrt{a}-\sqrt{b})\,k\sqrt{k}-\frac{2(a^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b})}{5\sqrt{k}};$$

dus
$$\int\left(\partial k\int\partial h\frac{k^2-h^2}{\sqrt{hk}}\right) = 2(\sqrt{a}-\sqrt{b})\int k\partial k\sqrt{k}-\tfrac{2}{5}(a^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b})\int\frac{\partial k}{\sqrt{k}}$$
$$= \tfrac{4}{5}(\sqrt{a}-\sqrt{b})k^2\sqrt{k}-\tfrac{4}{5}(a^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b})\sqrt{k}+C$$

of; van $k = c$ tot $k = d$,
$$\int\left(\partial k\int\partial h\frac{k^2-h^2}{\sqrt{hk}}\right) = \tfrac{4}{5}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(d^2\sqrt{d}-c^2\sqrt{c})-\tfrac{4}{5}(a^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b})(\sqrt{d}-\sqrt{c}).$$

Substitueëren wij nu de waarden dezer integralen, gelijk mede de in het voorgaande voorstel gevondene waarde voor I, in de formulen voor v en w, dan komt er:

$$v = \frac{\tfrac{1}{2}(a-b)(d-c)(a+b+c+d)}{\tfrac{1}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{d}-\sqrt{c})(a+\sqrt{ab}+b+c+\sqrt{cd}+d)}$$

en
$$w = \frac{\tfrac{1}{10}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(d^2\sqrt{d}-c^2\sqrt{c})-\tfrac{1}{10}(a^2\sqrt{a}-b^2\sqrt{b})(\sqrt{d}-\sqrt{c})}{\tfrac{1}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{d}-\sqrt{c})(a+\sqrt{ab}+b+c+\sqrt{cd}+d)}$$

of, de gemeene factoren uit teller en noemer weglatende,

$$v = \tfrac{3}{8}.\frac{(a+b+c+d)\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{c}+\sqrt{d})}{a+\sqrt{ab}+b+c+\sqrt{cd}+d}$$

en

$$w = \tfrac{3}{10}.\frac{c^2+cd+d^2+(c+d)\sqrt{cd}-(a^2+ab+b^2+(a+b)\sqrt{ab})}{a+\sqrt{ab}+b+c+\sqrt{cd}+d}$$

waardoor de coördinaten van het zwaartepunt zijn gevonden en dus het voorstel opgelost is.

Stelt men $a = d$ en $b = c$, waardoor de figuur MNPQ symmetriek wordt, ten opzigte van de as der y, dan wordt

$$v = \tfrac{3}{8}.\frac{(a+b)\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{a+\sqrt{ab}+b} = \tfrac{3}{8}.\frac{(a^2-b^2)\,(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}$$

en $w = 0$

Stelt men $a = b$ en $d = c$, waardoor de vierhoek MNPQ in het enkele punt N overgaat, dan vindt men

$$v = \tfrac{3}{8}.\frac{8\,(b+c)\sqrt{bc}}{3\,(b+c)} = \sqrt{bc}$$

en $$w = \tfrac{3}{10}.\frac{5\,c^2-5\,b^2}{3\,(b+c)} = \tfrac{1}{2}\,(c-b),$$

hetwelk dezelfde uitdrukkingen zijn, in de voorgaande oplossing, voor de coördinaten van het punt N, gevonden.

Stelt men $b = 0$, en $c = 0$, dan vindt men, voor het zwaartepunt van de vlakke figuur FAQDF,

$$v = \tfrac{3}{8}\sqrt{ad} \quad \text{en} \quad w = \tfrac{3}{10}\,(d-a).$$

Stelde men, in de formulen voor v en w, $a = b$ of $b = a$, dan zou men de coördinaten verkrijgen van het zwaartepunt der boogen NP of MQ; even als men die van het zwaartepunt der boogen MN of PQ zou vinden, door $d = c$ of $c = d$ te nemen.

CLXIV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Eene kromme lijn te vinden van eene soortgelijke gedaante als de parabolen, maar die de eigenschap heeft, dat de raaklijn van een willekeurig punt P *dezer kromme en de raaklijn aan den top* A, *elkander zoodanig in* X *snijden,* (Fig. 88) *dat de lijn* AX *gelijk is aan den afstand, tusschen het zwaartepunt van de boog* AP *der kromme, en de as* AA′, *die in* A *regthoekig door de kromme lijn gaat?*

OPGELOST *door* D. VAN LANKEREN MATTHES, J. ACQUOY, C. F. JULIUS, *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* D. VAN LANKEREN MATTHES.

Nemen wij de onderling regthoekige lijnen AA′ en AX tot assen der x en y aan, stellen wij dus AP′ $= x$ en PP′ $= y$, trekken wij uit X eene loodlijn XB op PP′, dan is BP $=$ BX. *Tang.* PXB $= x\frac{\partial y}{\partial x}$ en bijgevolg

$$AX = y - x\frac{\partial y}{\partial x}.$$

De afstand, tusschen het zwaartepunt van de boog AP en de as AA′, wordt, de boog AP $= s$ stellende, uitgedrukt door de formule $\frac{\int y \partial s}{s}$; (zie I. R. SCHMIDT, *Beg. der Statica*, 1e Dl. § 91.) en daar, volgens de opgaaf, deze afstand gelijk moet zijn aan AX, hebben wij de vergelijking

$$y - x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\int y \partial s}{s}.$$

Maar nu is $\int y\partial s = ys - \int s\partial y$, waardoor onze vergelijking verandert in $$y - \frac{x\partial y}{\partial x} = y - \frac{\int s\partial y}{s},$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{s\partial y}{\int s\partial y},$$

in welken vorm dezelve terstond kan geintegreerd worden. Deze integraal is $\quad Log.\, cx = Log.\,(\int s\partial y)$,

waaruit volgt $\quad cx = \int s\partial y$,

en weder differentierende

$$c\partial x = s\partial y.$$

Daar voorts $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2$ en dus $\partial y = \sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}$ is, hebben wij ook $\quad c\partial x = s\sqrt{(\partial s^2 - \partial x^2)}$

of $\quad c^2\partial x^2 = s^2\,\partial s^2 - s^2\,\partial x^2$,

waaruit volgt $\quad \partial x = \frac{s\partial s}{\sqrt{(s^2+c^2)}}$

of integrerende $\quad x + c' = \sqrt{(s^2+c^2)}$;

en hierin moet, omdat voor $x = 0$ ook $s = 0$ is, $c' = c$ zijn, weshalve $\quad x + c = \sqrt{(s^2+c^2)}$

is; uit deze vergelijking s afzonderende, vindt men

$$s = \sqrt{(x^2 + 2cx)}.$$

Alsnu nogmaals differentierende, verkrijgt men

$$\delta s = \frac{(x+c)\,\delta x}{\sqrt{(x^2+2cx)}},$$

dus

$$\delta s^2 = \frac{(x+c)^2\,\delta x^2}{x^2+2cx},$$

of

$$\delta x^2 + \delta y^2 = \frac{(x+c)^2\,\delta x^2}{x^2+2cx};$$

en, hieruit δy afzonderende, komt er

$$\delta y = \frac{c\delta x}{\sqrt{(x^2+2cx)}}.$$

Eindelijk nogmaals integrerende, wordt

$$y = c\,Nep.\,Log.\left\{c + x + \sqrt{(2cx+x^2)}\right\} + c';$$

hierin is, omdat voor $x = 0$ ook $y = 0$ moet worden, $c' = -c\,Nep.\,Log.\,c$ en deze waarde voor c' substituerende, verkrijgt men

$$y = c\,Nep.\,Log.\frac{c + x + \sqrt{(2cx+x^2)}}{c}$$

voor de vergelijking der gevraagde kromme lijn, die dus blijkens deze vergelijking niet anders dan de gewone kettinglijn is.

CLXV. Voorstel.

Door F. J. Stamkart.

A *en* B, *genomen hebbende de eerste* p *en de tweede* q *penningen, spelen met eenen dobbelsteen van* $s+t$ *zijden, op voorwaarde, dat, zoo een van de* s *zijden boven valt,* A *eenen penning van* B *zal bekomen, maar dat, indien eene der* t *zijden boven valt,* B *eenen penning van* A *zal ontvangen; terwijl diegene het spel zal winnen, die het eerst al de penningen zal hebben. Men vraagt naar eenige algemeene formule, om de kansen van* A *en* B *te bepalen?* (*)

Opgelost *door* F. J. Stamkart, J. Acquoy, C. F. Julius *en* A. Vos.

Oplossing *van* F. J. Stamkart.

Laten a en b de kansen zijn van A en B, om bij eenen

(*) Zie het CCL. Voorstel van het V. Deel dezer Verzameling, zoomede: *Uitrekening der kansen in het spelen, door de Arithmetica en Algebra, benevens eene verhandeling over Loterijen en Interest*; door N. S. te Amsterdam bij de Wed. Paul Marret, 1716.

worp eenen penning van hunne tegenpartij te bekomen, dan hebben wij al dadelijk

$$a = \frac{s}{s+t} \text{ en } b = \frac{t}{s+t}.$$

Laten voorts α en β de kansen zijn van A en B, om het spel voor, of bij den h^{den} worp te winnen, dan hebben wij bij de oplossing van het CCL VOORSTEL van het V DEEL, gezien, dat

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= a^q(1 + x_1\, ab + x_2\, a^2b^2 + enz.\ldots tot\ x_n\ a^n b^n)\\ \beta &= b^p(1 + y_1\, ab + y_2\, a^2b^2 + enz.\ldots tot\ y_m\ a^m b^m)\end{aligned}\right\} (1)$$

zijn zal; in de eerste van deze formulen, verbeelden x_1, x_2, x_3, *enz.* het aantal mogelijke gevallen, waarop A, juist bij den $(q+2)^{den}$, $(q+4)^{den}$, $(q+6)^{den}$ *enz.* worp, al de q penningen van B kan hebben verkregen, terwijl het getal n door de vergelijking $h = q + 2n$, of $h = q + 2n + 1$ gevonden wordt, naar gelang h en q overeenkomen of verschillen, in het zijn van evene en onevene getallen; in de tweede formule beteekenen y_1, y_2, y_3, *enz.* hetzelfde ten opzigte van B, terwijl m door de vergelijking $h = p + 2m$ of $h = p + 2m + 1$ bepaald wordt.

Er ontbreekt dus nog maar aan, dat wij de getallen x_1, y_1, x_2, y_2, *enz.*, die van p en q afhangen, in het algemeen leeren bepalen; hiertoe zullen wij thans overgaan, en wel volgens eenen anderen weg, dan wij ons, bij de oplossing van het genoemde CCL. VOORSTEL, daartoe voorstelden.

Ten eerste, kunnen wij de kansen van A en B, in de veronderstelling, dat het spel onbepaaldelijk moet voortduren, tot dat het gewonnen wordt, op de volgende wijze vinden. In dit geval is $h = \infty$, dus ook $m = \infty$, $n = \infty$, en bijgevolg

$$\alpha = a^q(1 + x_1\, ab + x_2\, a^2b^2 + enz.\ tot\ in\ het\ oneindige)$$
$$\beta = b^p(1 + y_1\, ab + y_2\, a^2b^2 + enz.\ tot\ in\ het\ oneindige)$$

en daar A of B een van beiden het spel zullen moeten winnen, is tevens $\alpha + \beta = 1$.

Verder is het klaar, dat, als wij in de vorige uitdrukkingen p in q en q in p veranderen, ook x_1, x_2, *enz.* in y_1, y_2, *enz.*, zullen overgaan en omgekeerd; wij hebben dus ook, indien wij de kansen van A en B, door deze verwisseling van penningen ontstaan, α' en β' noemen:

$$\alpha' = a^p(1 + y_1\, ab + y_2\, a^2b^2 + enz.\ tot\ in\ het\ oneindige)$$
$$\beta' = b^q(1 + x_1\, ab + y_2\, a^2b^2 + enz.\ tot\ in\ het\ oneindige)$$

terwijl wederom even als boven

$$\alpha' + \beta' = 1$$

moet zijn

Uit de zes vergelijkingen, die wij nu hebben, vindt men gemakkelijk:

$$\frac{\alpha}{a^q} = \frac{\beta'}{b^q} \text{ of } \alpha\left(\frac{b}{a}\right)^q = \beta',$$

$$\frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta}{b^p} \text{ of } \beta\left(\frac{a}{b}\right)^p = \alpha'$$

en

$$\alpha\left(\frac{b}{a}\right)^q + \beta\left(\frac{a}{b}\right)^p = 1;$$

verbindt men nu deze vergelijking met

$$\alpha + \beta = 1,$$

dan vindt men dadelijk

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^p}{\left(\frac{b}{a}\right)^q-\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^q-\left(\frac{a}{b}\right)^{p+q}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{p+q}} = a^q\,\frac{a^p-b^p}{a^r-b^r} \\ &\text{en} \\ \beta &= \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^q-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^q-\left(\frac{a}{b}\right)^p} = \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^q}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{p+q}} = b^p\,\frac{a^q-b^q}{a^r-b^r} \end{aligned}\right\}(2),$$

gemakshalve $p+q=r$ gesteld zijnde.

Door deze zeer eenvoudige formulen, waarin men des verkiezende, om alles in de gegevene getallen uit te drukken, $\frac{a}{b}=\frac{s}{t}$ substitueren kan, zijn dan nu de kansen der spelers in het algemeen gevonden, voor het geval dat het spel onbepaald voortgezet wordt. Voor dit geval is het dus onnoodig, de waarden van x_1, y_1, x_2, y_2, enz. te kennen.

Was $p=q$, of hadden de spelers bij het begin ieder even veel penningen, dan zou men hebben

$$\alpha = \frac{a^p}{a^p+b^p} \text{ en } \beta = \frac{b^p}{a^p+b^p},$$

dat wil zeggen: de kansen om het spel te winnen, zouden dan evenredig zijn, met de p^{de} magten van de kansen om bij eenen worp eenen penning te bekomen.

Is $a=b$ (of $s=t$, dat op hetzelfde neerkomt), dan nemen

de uitdrukkingen voor α en β den vorm $\frac{0}{0}$ aan; het is echter gemakkelijk te vinden, dat alsdan

$$\alpha = \frac{p}{p+q} \quad \text{en} \quad \beta = \frac{q}{p+q}$$

zijn zal; dat wil zeggen: dat alsdan de kansen om het spel te winnen, evenredig zullen zijn, met het getal penningen, dat elk bij den aanvang heeft.

Is $a = b$ en tevens $p = q$ dan wordt

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \quad \text{en} \quad \beta = \tfrac{1}{2};$$

de kansen der spelers zijn in dat geval even groot.

Ten tweede hebben wij de kansen van A en B te bepalen, indien bedongen is, dat er slechts h worpen in het geheel zullen plaats hebben; hiertoe is nu noodig de waarden van x_1, y_1, x_2, y_2, *enz.* te kennen, doch deze waarden ook eenmaal bekend zijnde, zullen de formulen (1) de kansen α en β aangeven.

De oplossing van het geval voor $h = \infty$, kan ons nu deze waarden van x_1, y_1, x_2, y_2, *enz.* doen vinden; want, voor $h = \infty$, hebben wij volgens (1)

$$\alpha = a^q (1 + x_1 ab + x_2 a^2 b^2 + \textit{enz. tot in het oneindige})$$

en volgens (2)

$$\alpha = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^q - \left(\frac{a}{b}\right)^r}{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^r};$$

deze waarden van α moeten dus identiek zijn; wanneer wij dezelve alzoo beide in oneindig voortloopende reeksen ontwikkelen, welke naar de magten van eene zelfde functie van a en b gerangschikt zijn, zullen de coëfficienten van die ontwikkelingen één voor één aan elkander gelijk moeten zijn; en dan zal ons de gelijkstelling dier coëfficienten de waarden van x_1, x_2, *enz.* leeren kennen. Nemen wij voor de genoemde functie $\frac{a}{b}$, en stellen wij $\frac{a}{b} = z$, waardoor, omdat $a + b = 1$ is, $a = \frac{z}{1+z}$, $b = \frac{1}{1+z}$ en $ab = \frac{z}{(1+z)^2}$ wordt, dan geeft de eerste der twee bovenstaande formulen

$$u = \frac{z^q}{(1+z)^q}\left\{1 + x_1\frac{z}{(1+z)^2} + x_2\frac{z^2}{(1+z)^4} + x_3\frac{z^3}{(1+z)^6} + x_4\frac{z^4}{(1+z)^8} + enz.\right\}$$

$$= z^q\left\{(1+z)^{-q} + x_1 z(1+z)^{-q-2} + x_2 z^2(1+z)^{-q-4} + x_3 z^3(1+z)^{-q-6} + x_4 z^4(1+z)^{-q-8} + enz.\right\};$$

terwijl de tweede dier formulen geeft, oplettende dat $r = p + q$ is,

$$u = \frac{z^q - z^r}{1 - z^r} = z^q(1 - z^p)\frac{1}{1 - z^r} = z^q(1 - z^p)(1 + z^r + z^{2r} + z^{3r} + enz.);$$

wij hebben dus voor de bedoelde ontwikkelingen, volgens de magten van z gerangschikt,

$$u = z^q\left\{1 + \left(x_1 - \frac{q}{1}\right)z + \left(x_2 - \frac{q+2}{1}x_1 + \frac{q(q+1)}{1\,.\,2}\right)z^2 + \left(x_3 - \frac{q+4}{1}x_2 + \frac{(q+2)(q+3)}{1\,.\,2}x_1 - \frac{q(q+1)(q+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)z^3\right.$$

$$\left. + \left(x_4 - \frac{q+6}{1}x_3 + \frac{(q+4)(q+5)}{1\,.\,2}x_2 - \frac{(q+2)(q+3)(q+4)}{1\,.\,2\,.\,3}x_1 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)z^4 + enz.\right.$$

en $u = z^q\left\{1 - z^p + z^r - z^{r+p} + z^{2r} - z^{2r+p} + z^{3r} - enz.\right\}$,

waaruit, door gelijkstelling der coëfficienten van dezelfde magten van z, de volgende vergelijkingen voortvloeijen

$$\left.\begin{aligned}
& x_1 - \frac{q}{1} = 0, \\
& x_2 - \frac{q+2}{1}x_1 + \frac{q(q+1)}{1.\ 2} = 0, \\
& x_3 - \frac{q+4}{1}x_2 + \frac{(q+2)(q+3)}{1\ .\ 2}x_1 - \frac{q(q+1)(q+2)}{1.\ 2.\ 3} = 0, \\
& x_4 - \frac{q+6}{1}x_3 + \frac{(q+4)(q+5)}{1\ .\ 2}x_2 - \frac{(q+2)(q+3)(q+4)}{1\ .\ 2\ .\ 3}x_1 + \frac{q(q+1)(q+2)(q+3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} = 0,
\end{aligned}\right\}(3)$$

en in het algemeen

$$x_k - \frac{q+2k-2}{1} x_{k-1} + \frac{(q+2k-4)(q+2k-3)}{1 \,.\, 2} x_{k-2} - \frac{(q+2k-6)\ (q+2k-5)\ (q+2k-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x_{k-3} +$$

$$+ \textit{enz.} \ldots\ldots \mp \frac{q\,(q+1)\,(q+2)\ldots\ldots(q+k-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, k} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3'),$$

mits men, zoo k gelijk p, $r+p$, $2r+p$, *enz.* is, in het tweede lid der vergelijking (3′), in plaats van 0, schrijve -1; en dat men even zoo, voor dit tweede lid, $+1$ in plaats van 0 schrijve, indien k gelijk is aan r, $2r$, $3r$, *enz.* In deze vergelijkingen kan men x_1, x_2, x_k in y_1, y_2, y_k veranderen, mits men ook q in p verandere; en daar zij dus de waarden van x_1, x_2, *enz.* y_1, y_2, *enz.* doen kennen, is het voorstel in het algemeen opgelost.

Voor het bijzondere geval van $p = 3$ en $q = 5$, geven deze vergelijkingen. (3)

$$x_1 = 5,\quad x_2 = 20,\quad x_3 = 74,\quad x_4 = 264,\ \textit{enz.}$$

en

$$y_1 = 3,\quad y_2 = 9,\quad y_3 = 28,\quad y_4 = 90,\ \textit{enz.}$$

hetwelk dezelfde getallen zijn als in de Aanmerking op het meergenoemde CCL. Voorstel zijn gevonden.

I. Aanmerking *van* F. J. Stamkart. In het bij de opgaaf aangehaalde werk, wordt, voor het *tweede* geval van onze oplossing, eene formule zonder bewijs gevonden, waar van N. Bernouilli als vinder genoemd wordt (*); terwijl de oplossingswijze, die wij in de Aanmerking op het meermalen genoemde CCL. Voorstel voorgedragen hebben, ook aldaar opgegeven en aan Moivre toegeschreven wordt. De verhandeling van N. S.

(*) Het bewijs dezer formule, door den Heer Stamkart medegedeeld, is hier niet opgenomen; eensdeels omdat de daarin voorkomende vergelijkingen en formulen, niet gemakkelijk maar behooren, in een beperkt formaat gedrukt kunnen worden; anderdeels, dewijl het doel dier formule, op eene weinig omslagtige wijze, in de volgende Aanmerking bereikt wordt.

(mogelijk wel NICOLAAS STRUYK) bevat de oplossingen van verscheidene vrij moeijelijke voorstellen; en ofschoon veel in dit werk van elders schijnt overgenomen te zijn, zoo komt ons hetzelve toch voor, als geenszins onder de minste Vaderlandsche wiskundige geschriften te kunnen gerangschikt worden. Zie hier, eenigzins gewijzigd, hoe de formule (2) aldaar bewezen wordt:

Laat in het algemeen α_m de kans van A zijn, als hij m penningen bezit, dan is, omdat het spel onbepaald voortgezet wordt,

$$\alpha_p = a\alpha_{p+1} + b\,\alpha_{p-1};$$

want A, p penningen hebbende, heeft ten eerste de kans a om er $p+1$ bij den eerstvolgenden worp te zullen hebben verkregen en daarenboven nog de kans b om er bij dien worp maar $p-1$ te zullen hebben behouden. Uit deze vergelijking volgt nu

$$\alpha_{p+1} = \frac{1}{a}\alpha_p - \frac{b}{a}\alpha_{p-1} = \alpha_p + \frac{1-a}{a}\alpha_p - \frac{b}{a}\alpha_{p-1}$$

of, omdat $1-a=b$ is

$$\alpha_{p+1} = \alpha_p + \frac{b}{a}(\alpha_p - \alpha_{p-1}).$$

Stellen wij in de deze formule achtervolgens $p=1, p=2, p=3$, *enz.*, in het oog houdende dat $\alpha_0 = 0$ is, omdat als A *geene* penningen meer bezit, hij ook *geenen* kans hoegenaamd meer heeft om het spel te winnen, dan verkrijgen wij:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{b}{a}\alpha_1,$$

$$\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{b}{a}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$\alpha_4 = \alpha_3 + \frac{b}{a}(\alpha_3 - \alpha_2), \text{ enz.}$$

en zoo wij deze formulen in elkander substitueren, om alles in α_1 uit te drukken,

$$\alpha_2 = \left\{1+\frac{b}{a}\right\}\alpha_1,$$

$$\alpha_3 = \left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right\}\alpha_1,$$

$$\alpha_4 = \left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^3\right\}\alpha_1, \text{ enz.}$$

$$a_p = \left\{1+\left(\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}\right)^2+enz.\ldots.+\left(\frac{b}{a}\right)^{p-1}\right\}a_1,$$

$$a_r = \left\{1+\ \frac{b}{a}\ +\left(\frac{b}{a}\right)^2+enz.\ldots.+\left(\frac{b}{a}\right)^{r-1}\right\}a_1.$$

Voor de beide laatste formulen kunnen wij, door het sommeren der meetkunstige reeksen, schrijven

$$a_p = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1-\frac{b}{a}}a_1 \quad \text{en} \quad a_r = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^r}{1-\frac{b}{a}}a_1;$$

en dezelve in elkander deelende, verkrijgt men:

$$\frac{a_p}{a_r} = \frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^p}{1-\left(\frac{b}{a}\right)^r} = a^{r-p}\frac{a^p-b^p}{a^r-b^r};$$

maar neemt men nu $r = p+q$, dan is $a_r = 1$, omdat als A al de $p+q$ penningen heeft, hij het spel *zeker* heeft gewonnen; hierdoor gaat dan de vergelijking over in

$$a_p = a^q\frac{a^p-b^p}{a^r-b^r},$$

welke formule dezelfde is, die wij langs eenen anderen weg vonden.

II. Aanmerking *van* J. Acquoy. Door de leerwijze der onbepaalde coëfficienten, wordt gemakkelijk gevonden, dat eene uitdrukking, van den vorm

$$(1-a)^{l-1}+a(1-a)^{l-2}+a^2(1-a)^{l-3}+enz.+a^{l-2}(1-a)+a^{l-1},$$

kan herleid worden, tot den vorm

$$1-\frac{l-2}{1}a(1-a)+\frac{(l-3)(l-4)}{1\ .\ 2}a^2(1-a)^2-\frac{(l-4)(l-5)(l-6)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3(1-a)^3+enz.;$$

zijnde de laatste term

$$\pm\tfrac{1}{2}la^{\frac{1}{2}l-1}(1-a)^{\frac{1}{2}l-1} \text{ of } \pm a^{\frac{1}{2}(l-1)}(1-a)^{\frac{1}{2}(l-1)},$$

naar gelang l een even of een oneven getal is.

Daar bij de oplossing van het tegenwoordige voorstel $a+b=1$, of $1-a=b$ is, zal dus ook

$$b^{l-1}+b^{l-2}a+b^{l-3}a^2+enz.\ldots.+ba^{l-2}+a^{l-1}$$

herleid kunnen worden tot

$$1-\frac{l-2}{1}ab+\frac{(l-3)(l-4)}{1\ .\ 2}a^2b^2-\frac{(l-4)(l-5)(l-6)}{1\ .\ 2\ .\ 3}a^3b^3+enz.$$

Schrijven wij nu de formulen (2), teller en noemer door den gemeenen factor $a-b$ deelende, in de gedaante

$$\alpha = a^q \frac{a^{p-1}+a^{p-2}b+enz.\ldots\ldots+ab^{p-2}+b^{p-1}}{a^{r-1}+a^{r-2}b+enz.\ldots\ldots+ab^{r-2}+b^{r-1}},$$

$$\beta = b^p \frac{a^{q-1}+a^{q-2}b+enz\ \ldots\ +ab^{q-2}+b^{q-1}}{a^{r-1}+a^{r-2}b+enz.\ldots\ldots+ab^{r-2}+b^{r-1}},$$

en passen wij er vervolgens de bovengenoemde herleiding op toe, dan vinden wij, altijd voor het geval van $h=\infty$,

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= a^q \frac{1-\frac{p-2}{1}ab+\frac{(p-3)(p-4)}{1\,.\,2}a^2b^2-enz.}{1-\frac{r-2}{1}ab+\frac{(r-3)(r-4)}{1\,.\,2}a^2b^2-enz.}, \\ \beta &= b^p \frac{1-\frac{q-2}{1}ab+\frac{(q-3)(q-4)}{1\,.\,2}a^2b^2-enz.}{1-\frac{r-2}{1}ab+\frac{(r-3)(r-4)}{1\,.\,2}a^2b^2-enz.}, \end{aligned}\right\} (4.)$$

Ontwikkelt men verder deze gebrokens in wederkeerige reeksen, dan vindt men de waarden van α en β in oneindige reeksen, die naar de opklimmende magten van het product ab gerangschikt zijn, die dus identiek moeten zijn met de reeksen (1), zoo daarin $h=\infty$ genomen wordt, weshalve de waarden van x_1, y_1, x_2, y_2, *enz.*, door die ontwikkeling van zelve zullen te voorschijn komen.

Even zeer als voor $h=\infty$, kunnen dus de formulen (4) klaarblijkelijk voor eene bepaalde waarde van h dienen, mits men dan de ontwikkeling der gebrokens in wederkeerige reeksen niet verder voortzette, dan tot en met de termen, welke $a^n b^n$ en $a^m b^m$ bevatten; wordende de getallen m en n altijd door de vergelijkingen $h=q+2n$ of $h-1=q+2n$ en $h=p+2m$ of $h-1=p+2m$ bepaald.

Voor het bijzonder geval dat $p=3$ en $q=5$ is, zijn de formulen (4),

$$\alpha = a^5 \frac{1-ab}{1-6ab+10a^2b^2-4a^3b^3},$$

$$\beta = b^3 \frac{1-3ab+a^2b^2}{1-6ab+10a^2b^2-4a^3b^3},$$

en de gebrokens in wederkeerige reeksen ontwikkelende, heeft men

$\alpha = a^5 (1 + 5ab + 20a^2 b^2 + 74 a^3 b^3 + 264a^4 b^4 + enz.)$,
$\beta = b^3 (1 + 3ab + 9a^2 b^2 + 28 a^3 b^3 + 90a^4 b^4 + enz.)$,
even als in de AANMERKING op het CCL. VOORSTEL is gevonden.

Zal nu het spel onbepaald voortgezet worden, dan moeten ook deze reeksen tot in het oneindige worden voortgezet; maar wordt het spel tot bijv 12 worpen bepaald, dan vindt men, door in de vergelijkingen

$$h - 1 = q + 2n \qquad h - 1 = p + 2m$$

$h = 12, p = 3$ en $q = 5$ te stellen, $n = 3$ en $m = 4$, als dan moet de reeks voor α niet verder dan tot $a^3 b^3$ en voor β niet verder dan tot $a^4 b^4$ worden voortgezet, zoo dat de kansen zijn

$$\alpha = a^5 (1 + 5 ab + 20 a^2 b^2 + 74 a^3 b^3)$$
$$\beta = b^3 (1 + 3 ab + 9 a^2 b^2 + 28 a^3 b^3 + 90 a^4 b^4).$$

voor $h = 11$, zoude men door de vergelijkingen

$$h = q + 2n \qquad h = p + 2m$$

volkomen hetzelfde vinden; maar het is ook klaar, dat B een oneven getal penningen hebbende, A het spel bij geenen evenen worp kan winnen; dat B het spel ook bij geenen evenen worp winnen kan, omdat het getal penningen van A oneven is; en dat het alzoo tot de kansen niets afdoet, of er 11 of 12 worpen zullen geschieden.

CLXVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Eene harmonische reeks van vier termen te vinden, zoodat de eerste term, de tweede term, de vierkantswortel uit de som der termen en de derde term eene rekenkunstige reeks uitmaken?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, BAS BACKER, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, A. VOS *en* C. BRUNINGS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Laat x de eerste en y de tweede term der harmonische reeks zijn, dan zal, volgens de eigenschappen der harmoni-

sche reeksen, de derde term door $\frac{xy}{2x-y}$ en de vierde door $\frac{xy}{3x-2y}$ moeten worden voorgesteld, zoodat dan de harmonische reeks is

$$x,\ y,\ \frac{xy}{2x-y},\ \frac{xy}{3x-2y}.$$

Nu moet ook x de eerste en y de tweede term zijn, der in het voorstel genoemde rekenkunstige reeks, het verschil van die reeks zal dus $y - x$ zijn, en bijgevolg die reeks zelve

$$x,\ y,\ 2y-x,\ 3y-2x.$$

Volgens de opgaaf moet de derde term der harmonische reeks, tevens de vierde der rekenkunstige reeks zijn; hieruit volgt de vergelijking

$$\frac{xy}{2x-y} = 3y - 2x,$$

die na herleiding verandert in

$$4x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$$

of in

$$(4x-3y)(x-y) = 0;$$

daar $x = y$ geene eigenlijke reeksen zou geven, nemen wij van de twee voorwaarden $x - y = 0$ en $4x - 3y = 0$, die aan deze vergelijking voldoen zouden, alleen de laatste en dus $x = \frac{3}{4}y$, waardoor de gestelde harmonische en rekenkunstige reeksen overgaan in:

$$\frac{3}{4}y,\ y,\ \frac{3}{2}y,\ 3y$$

en

$$\frac{3}{4}y,\ y,\ \frac{5}{4}y,\ \frac{3}{2}y.$$

Alnu is de som der harmonische reeks $\frac{25}{4}y$, de vierkantswortel uit deze som moet de derde term der rekenkunstige reeks zijn, dus hebben wij nog de vergelijking

$$\sqrt{\tfrac{25}{4}y} = \tfrac{5}{4}y$$

of

$$\tfrac{25}{4}y = \tfrac{25}{16}y^2,$$

dat is:

$$4y = y^2;$$

daar verder $y = 0$ geene eigenlijke reeksen zou opleveren kunnen wij uit de laatste vergelijking alleen trekken $y = 4$, waardoor wij voor de begeerde harmonische reeks vinden:

$$3,\ 4,\ 6 \text{ en } 12,$$

terwijl dan

$$3,\ 4,\ 5 \text{ en } 6,$$

de termen der in het voorstel genoemde rekenkunstige reeks zijn.

CLXVII. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

Men vraagt een m-hoekig en een $(m+1)$-hoekig getal te vinden, zoodat het eerste 1 minder dan het tweede, en ook de m-hoekige wortel uit het eerste 1 minder dan de $(m+1)$-hoekige wortel uit het tweede is?

Opgelost *door* J. Acquoy, H. W. Bloem, C. J. Bolten, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoer *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Stellen wij voor den wortel van het m-hoekige getal ......x, dan is die van het $(m+1)$-hoekige getal............$x+1$, bijgevolg is het m-hoekige getal zelf $\frac{(m-2)x^2-(m-4)x}{2}$,

en het $(m+1)$-hoekige $\frac{(m-1)(x+1)^2-(m-3)(x+1)}{2}$,

en wij hebben dus de vergelijking

$$\frac{(m-1)(x+1)^2-(m-3)(x+1)}{2}-\frac{(m-2)x^2-(m-4)x}{2}=1;$$

deze vergelijking eerst met 2 vermenigvuldigende, vervolgens ontwikkelende en herleidende, vinden wij

$$x^2+(2m-3)x=0$$

of

$$x\{x+(2m-3)\}=0,$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door $x=0$ en $x=3-2m$.

Nemen wij $x=0$, dan is het m-hoekige getal 0 en het $(m+1)$-hoekige 1, waarvan de wortels respectievelijk zijn 0 en 1.

Nemen wij $x=3-2m$ dan vinden wij voor het m-hoekige getal

$$\frac{(m-2)(3-2m)^2-(m-4)(3-2m)}{2}=2m^3-9m^2+11m-3$$

en voor het $(m+1)$-hoekige

$$\frac{(m-1)(4-2m)^2-(m-3)(4-2m)}{2}=2m^3-9m^2+11m-2,$$

waarvan de wortels respectievelijk zijn $3-2m$ en $4-2m$ welke wortels, als men eigenlijke veelhoekige getallen begeert en dus $m =$ of > 3 neemt, altijd negatief zullen zijn.

Voor $m=3$ verkrijgen wij:

het *drie*hoekige getal 3, waarvan de wortel -3 is,
en het *vier*hoekige getal 4, waarvan de wortel -2 is.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Welke vijf getallen zijn het, waarvan de drie eerste eene rekenkunstige reeks, de drie middelste eene meetkunstige reeks en de drie laatste eene harmonische reeks uitmaken, terwijl de som der rekenkunstige reeks 75, *en die der meetkunstige* 129 *bedraagt?*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, BAS BACKER, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK, A. VOS, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, W. G. VAN DELDEN, G. GRAAFLAND, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, W. VAN LOON, B. LUBBERS, C. VAN SCHAICK *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Omdat de som der rekenkunstige reeks 75 is, kunnen wij de drie eerste getallen door $25 - x$, 25 en $25 + x$ voorstellen; het vierde getal moet de meetkunstig derde evenredige tot 25 en $25 + x$ zijn, en is bijgevolg $\frac{(25+x)^2}{25}$, even zoo moet het vijfde getal harmonisch evenredig met het derde en vierde zijn en wij vinden alzoo voor hetzelve $\frac{(25+x)^2}{25-x}$; zoo dat dan de vijf gevraagde getallen voorgesteld worden door:

$$25-x,\quad 25,\quad 25+x,\quad \frac{(25+x)^2}{25},\quad \frac{(25+x)^2}{25-x} \ldots\ldots\ldots (A)$$

De eenige voorwaarde des voorstels, die wij nu nog niet gebruikt hebben, is dat de som der meetkunstige reeks 129 moet zijn; deze voorwaarde geeft ons de vergelijking

$$25 + (25+x) + \frac{(25+x)^2}{25} = 129$$

of

$$x + \frac{(25+x)^2}{25} = 79,$$

welke gemakkelijk herleid wordt tot

$$x^2 + 75x = 1350,$$

waaruit men vindt $x = 15$, of $x = -90$.

Naar gelang men de eerste of tweede dezer waarden van x verkiest te gebruiken, verkrijgt men voor de gevraagde getallen

10, 25, 40, 64 en 160; of 115, 25, — 65, 169 en $36\frac{17}{23}$.

Aanmerking. Uit de verkregene vormen (A) blijkt, dat, wanneer van vijf getallen de drie eerste rekenkunstig, de drie middelste meetkunstig en de drie laatste harmonisch evenredig zijn, ook het eerste, middelste en laatste der vijf getallen eene meetkunstige reeks zullen uitmaken, waarvan de gemeene reden $\frac{s+x}{s-x}$ is; s het derde gedeelte van de som der drie eerste getallen voorstellende.

CLXIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar drie vijfhoekige getallen, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, zoodanig, dat hun gemeen verschil mede een vijfhoekig getal zij?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, C. F. Julius, A. Vos, C. J. Bolten, H. W. Bloem, F. Lubbers, M. G. Snoek, J. S. Speijer, D. van Lankeren Matthes *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij den vijfhoekigen wortel van den middelsten term der reeks door x, en den vijfhoekigen wortel van het gemeen verschil der termen door y voor, dan is:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{de middelste term zelve} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{3x^2-x}{2} \\ \text{en het gemeen verschil} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{3y^2-y}{2}, \\ \text{alzoo is de eerste term} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{3x^2-x}{2}-\dfrac{3y^2-y}{2} \\ \text{en de laatste term} \ldots\ldots\ldots\ldots & \dfrac{3x^2-x}{2}+\dfrac{3y^2-y}{2}. \end{array}\right\} (1)$$

Daar nu alle willekeurige rationale waarden van x en y, voor den middelsten term en voor het gemeene verschil vijfhoekige getallen zullen geven, behoeven wij alleen x en y zoodanig te bepalen, dat ook de eerste en laatste termen vijfhoekige getallen zullen worden.

Indien het 24-voud van eenig getal A met de eenheid vermeerderd wordt, en er alsdan een volkomen vierkant ontstaat, zal dat getal A, zoo als genoegzaam bekend is, een vijfhoekig getal zijn; wij behoeven dus slechts de uitdrukkingen

$$24\left\{\frac{3x^2-x}{2}-\frac{3y^2-y}{2}\right\}+1$$

en

$$24\left\{\frac{3x^2-x}{2}+\frac{3y^2-y}{2}\right\}+1$$

tot volkomen vierkanten te maken.

Schrijven wij hiertoe deze uitdrukkingen in de gedaanten

$$(6x-1)^2-12y(3y-1)$$
$$(6x-1)^2+12y(3y-1)$$

en stellen wij

$$(6x-1)^2-12y(3y-1)=(p-q)^2$$
$$(6x-1)^2+12y(3y-1)=(p+q)^2,$$

dan zullen wij, door deze vergelijkingen bij elkander op te tellen en van elkander af te trekken, verkrijgen

$$(6x-1)^2=p^2+q^2$$

en

$$6y(3y-1)=pq,$$

waar uit wij x en y oplossende, vinden

$$x=\tfrac{1}{6}\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(p^2+q^2)}$$

en

$$y=\tfrac{1}{6}\pm\tfrac{1}{6}\sqrt{(1+2pq)},$$

zoodat er nu niets anders overblijft, dan p en q derwijze te bepalen, dat x en y rationale waarden verkrijgen.

Om x rationaal te maken, gebruiken wij de algemeen bekende formulen, voor de regthoekszijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek; wij stellen dienvolgens

$$p=2mnr \text{ en } q=(m^2-n^2)r,$$

waardoor de bovenstaande waarden voor x en y worden

$$x=\tfrac{1}{6}\{1\pm(m^2+n^2)r\}$$

en

$$y=\tfrac{1}{6}\{1\pm\sqrt{(1+4mn(m^2-n^2)r^2)}\}.$$

Om nu ook y rationaal te maken, stellen wij

$$1+4mn(m^2-n^2)r^2=(1+2rs)^2,$$

dan vinden wij hieruit

$$r=\frac{s}{mn(m^2-n^2)-s^2},$$

en hierdoor worden dan x en y

$$x=\tfrac{1}{6}\left\{1\pm\frac{(m^2+n^2)s}{mn(m^2-n^2)-s^2}\right\},$$

$$y = \tfrac{1}{6}\left\{1 \pm \frac{mn(m^2 - n^2) + s^2}{mn(m^2 - n^2) - s^2}\right\}.$$

Hierin kan men nu voor m, n en s willekeurige getallen stellen, daardoor zal men voor x en y rationale waarden verkrijgen, die, in de uitdrukkingen (1) overgebragt, de begeerde vijfhoekige getallen zullen te voorschijn brengen.

Begeert men geheele getallen, dan is de eenvoudigste weg, om eerst voor m en n willekeurige getallen aan te nemen en vervolgens s zoodanig te bepalen, dat x en y geheele getallen worden; hiertoe moeten de breuken, die in de formulen voor x en y voorkomen, getallen van den vorm $6t \pm 1$ worden, kunnende dan de bovenste of benedenste teekens gebruikt worden, naar gelang dit noodig is om gebrokens te vermijden.

Nemen wij, bij voorbeeld, $m = 3$ en $n = 2$, dan wordt

$$x = \tfrac{1}{6}\left\{1 \pm \frac{13s}{30 - s^2}\right\} \quad \text{en} \quad y = \tfrac{1}{6}\left\{1 \pm \frac{30 + s^2}{30 - s^2}\right\},$$

met weinig moeite ziet men duidelijk, dat de breuken $\frac{13s}{30 - s^2}$ en $\frac{30 + s^2}{30 - s^2}$, beide tot een der vormen $6t \pm 1$ zullen behoren, indien men $s = 5$ neemt; deze waarde voor s substituerende, vindt men, bij x het benedenste teeken gebruikende, $x = -2$, bij y het bovenste teeken gebruikende, $y = 2$ en deze waarden voor x en y in de uitdrukkingen (1) overbrengende, vindt men voor de gevraagde vijfhoekige getallen 2, 7, 12; waarvan de wortels zijn -1, -2, $+3$; terwijl hun gemeen verschil 5, een vijfhoekig getal is, dat $+1$ tot wortel heeft.

Even zoo vindt men, dat, voor $m = 6$, $n = 1$ en $s = 14$, de verlangde getallen zijn: 22, 57, 92, tot vijfhoekige wortels hebbende 4, -6 en 8, terwijl 5 den vijfhoekigen wortel, van het gemeen verschil 35, is.

Voor $m = 13$, $n = 8$ en $s = 104$, vindt men 442, 2262, 4062; de wortels zijn -17, 39, -52; van het gemeen verschil 1820 is 35 de wortel.

CLXX Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men vraagt naar een getal van twee cijfers, zoodat, als men het getal, met deszelfs omgekeerde vermeerderd, deelt door het getal, met deszelfs omgekeerde verminderd, het quotiënt een geheel getal zij?

Opgelost *door* M.G. Snoer, J. Ao oy, H. W. Bloem, C. J. Bolten, C. Brunings, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, J. S. Speijer, A. Vos, A. F. van de Laar Junior, W. J. C. Rammelman Elsevier, H. van Assendelft de Coningh, W. G. van Delden *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* M. G. Snoer.

Zij $10x+y$ het gevraagde getal, dan moet

$$\frac{(10x+y)+(10y+x)}{(10x+y)-(10y+x)}=\frac{11(x+y)}{9(x-y)}$$

een geheel getal zijn.

Daar de factor 9 van den noemer, niet in den factor 11 van den teller deelbaar is, en 9 en 11 ook geene gemeene factoren hebben, moet 9 in $x+y$ deelbaar zijn. Daar voorts x en y ongelijk moeten zijn, omdat anders de deeler $9(x-y)$ gelijk aan nul zou worden, en x en y ieder afzonderlijk niet grooter dan 9 kunnen zijn, moet noodzakelijk $x+y=9$ wezen.

Hierdoor gaat het quotient over in $\frac{11}{x-y}$; nu moet $x-y$ in 11 deelbaar en dus gelijk aan 1 of 11 zijn; maar, omdat x en y weder ieder afzonderlijk niet grooter dan 9 kunnen wezen, kan $x-y$ geen 11 zijn; wij hebben dus $x-y=1$.

De vergelijkingen $x+y=9$ en $x-y=1$ met elkander verbindende, vindt men daaruit terstond $x=5$ en $y=4$, zoodat het gevraagde getal $10x+y=54$ is.

CLXXI. Voorstel.

Door E. Boas.

Eene rekenkunstige en eene meetkunstige reeks te vinden, ieder van vier termen, zoodanig, dat de eerste, tweede en vierde termen der rekenkunstige reeks, gelijk zijn aan de eerste, tweede en derde termen der meetkunstige; en dat

de derde term der meetkunstige reeks 36 *minder zij, dan de som van de eerste en vierde termen der meetkunstige reeks?*

Opgelost *door* C. Brunings, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Bakker, H. W. Bloem, E. Boas, C. J. Bolten, W. G. van Delden, H. A. Hartogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, A. Vos, W. van Loon *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* C. Brunings.

Laat de rekenkunstige reeks voorgesteld worden door

$$x + 3y, \quad x + y, \quad x - y \quad \text{en} \quad x - 3y,$$

dan moeten de drie eerste termen der meetkunstige reeks zijn

$$x + 3y, \quad x + y \quad \text{en} \quad x - 3y,$$

waaruit volgt

$$(x + y)^2 = (x + 3y)(x - 3y),$$

dat is

$$2xy = -10y^2$$

of, daar uit den aard der zaak y niet gelijk nul kan zijn,

$$x = -5y.$$

Hierdoor wordt nu de rekenkunstige reeks

$$-2y, \quad -4y, \quad -6y \quad \text{en} \quad -8y$$

en de meetkunstige, waarvan de vierde term terstond uit de drie eerste kan afgeleid worden,

$$-2y, \quad -4y, \quad -8y \quad \text{en} \quad -16y.$$

Eindelijk geeft de laatste voorwaarde des voorstels, ter bepaling van y, de vergelijking

$$-6y + 36 = -18y,$$

waaruit volgt

$$y = -3;$$

de gevraagde reeksen zijn dus

$$6, 12, 18, 24; \quad \text{en} \quad 6, 12, 24, 48.$$

CLXXII. Voorstel.

Door E. Boas.

De naam van eenen onzer Nederlandsche helden, wordt met zes letters geschreven; de getallen, die de plaats dezer letters in het alphabeth aanwijzen, hebben de volgende eigenschappen: 1°. *de* 3de, 5de *en* 6de *dier getallen, maken eene rekenkunstige reeks uit;* 2°. *de* 1ste, 6de *en* 2de min 3de *vormen eene dergelijke reeks;* 3°. *de som van de* 2de *en* 4de *dat ge-*

tallen is gelijk aan de som van de 1ste, 5de *en* 6de; 4o. *de som van de* 1ste *en* 3de *is gelijk aan het* 6de min 3de; 5o. *de som van al de zes getallen, gedeeld wordende door de som van de twee eerste, geeft het laatste getal tot quotient; en* 6°. *dit zelfde quotient wordt verkregen, wanneer de som der vijf eerste getallen, door de som van het* 2de *en tweemaal het* 3de, *gedeeld wordt. Welke is hier de bedoelde naam?*

Opgelost *door* C. van Schaick, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, H. W. Bloem, E. Boas, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, G. Graafland, H. A. Hartogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, W. van Loon, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Sjoenis, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* C. van Schaick.

Stellen wij de getallen, die de plaatsen der letters in het alphabeth aanwijzen, voor door

$$x,\ y,\ z,\ v,\ w,\ s,$$

dan hebben wij, volgens de voorwaarden van het voorstel, de zes volgende vergelijkingen:

$$z + s = 2x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

$$x + y - z = 2s \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

$$y + v = x + w + s \quad \ldots \quad (3),$$

$$x + z = s - z \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$\frac{x + y + z + v + w + s}{x + y} = s \quad \ldots \quad (5),$$

$$\frac{x + y + z + v + w}{y + 2z} = s \quad \ldots \quad (6).$$

Uit (4) volgt $s = x + 2z \ldots \ldots (7)$,

hierdoor gaat de vergelijking (1) over in

$$z + x + 2z = 2x, \text{ of } x = 3z \quad (8)$$

en dan is volgens (7) $\quad s = 5z \quad (9)$;

de waarden (8) en (9) in de vergelijking (2) overbrengende, komt er $3z + y - z = 10z$, of $y = 8z$ (10)

en de waarden (8), (9) en (10) in de vergelijking (3) substituerende, vinden wij

$$8z + v = 3z + w + 5z, \text{ of } v = w \quad (11).$$

Uit het verband der vergelijkingen (5) en (6), hebben wij

$$\frac{x+y+z+v+w+s}{x+y} = \frac{x+y+z+v+w}{y+2z}$$

en hierin de waarden (8), (9), (10) en (11) overbrengende, komt er

$$\frac{17z+2v}{11z} = \frac{12z+2v}{10z},$$

waaruit wij dadelijk vinden $v = 19z$ . . . (12),
terwijl dan volgens (11) ook $w = 19z$ . . . (13)
is.

Wij hebben dus nu al de overige onbekenden in z uitgedrukt, namelijk

$$x = 3z, \quad y = 8z, \quad z = z, \quad v = 19z, \quad w = 19z, \quad s = 5z,$$

en daar nu alle deze onbekenden geheele getallen, kleiner dan 27 moeten zijn, kan z niet anders dan 1 zijn; wij hebben alzoo voor de getallen,

$$x = 3, \quad y = 8, \quad z = 1, \quad v = 19, \quad w = 19, \quad s = 5,$$

waarmede overeenkomen de letters

C, H, A, S, S, E,

welke ons den bedoelden naam leeren kennen.

Aanmerking. Wij hebben bij deze oplossing eene voorwaarde minder gebruikt dan er gegeven was, omdat wij de vergelijkingen (5) en (6) slechts tot ééne verbonden hebben, zonder dezelve ieder afzonderlijk in aanmerking te nemen, wij konden echter deze voorwaarde ontberen, door gebruik te maken van de eigenschap der onbekenden, dat zij allen geheele getallen kleiner dan 27 moesten zijn.

CLXXIII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Een zeker getal is in drie deelen verdeeld, die eene rekenkunstige reeks uitmaken; de vierkantswortel uit dat getal, is gelijk aan den kleinsten term dezer reeks; en het product der beiden uiterste termen, door den middelsten gedeeld wordende, geeft tot quotient een vierde gedeelte van het getal. Welk is dit getal en welke zijn deszelfs deelen?

Opgelost door C. J. Bolten, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, Bas Backer, A. C. Belinfante, H. W. Bloem, C. Bruinings. W. G. van Delden, H. A. Hertogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van

Lankeren Matthes, W. van Loon, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, J. Sjoenis, M. G. Snoek, J. S. Speijer, en A. Vos.

Oplossing van C. J. Bolten.

Stellen wij voor de deelen $x-y$, x en $x+y$, dan is het getal zelve $3x$ en daar wij $x-y$ als het kleinste deel aanzien, kan y slechts een positief getal zijn. Volgens het voorstel hebben wij nu de vergelijkingen:

$$\sqrt{3x} = x - y$$

en

$$\frac{3x}{4} = \frac{x^2 - y^2}{x};$$

uit deze laatste vergelijking volgt

$$x^2 = 4y^2$$

en dus

$$x = \pm 2y;$$

deze waarde van x in de eerste vergelijking stellende en alleen het bovenste teeken gebruikende, daar y positief moet zijn en dus het benedenste teeken $\sqrt{3x}$ onbestaanbaar zou maken, vinden wij $\sqrt{6y} = y$,

waaruit volgt $y = 6$;

derhalve is $x = 2y = 12$

en bijgevolg hebben wij, voor het getal en deszelfs deelen,

$$3x = 36, \quad x-y = 6, \quad x = 12 \quad \text{en} \quad x+y = 18.$$

CLXXIV. Voorstel.

Door A. C. Belinfante

Men begeert drie positieve getallen, elk van twee cijfers, te vinden, waarvan het volgende bekend is: 1°. de som van de cijfers der eenheden is 18; 2°. de som van de cijfers der tientallen is 15; 3°. de som der cijfers van het tweede getal is gelijk aan het dubbel van de som der cijfers van het eerste; 4°. de som der cijfers van het derde getal is gelijk aan $2\frac{1}{2}$ maal de som der cijfers van het eerste; 5°. het eerste getal, met 1 vermeerderd, geeft een vierkant, welks wortel 1 meer is, dan het cijfer der eenheden van het eerste getal; en 6°. de twee eerste getallen elk met 1 verhoogende komen er vierkanten, welker wortels de uiterste termen zijn eener rekenkunstige reeks, die het cijfer der eenheden van het derde getal tot middelsten term heeft?

OPGELOST *door* W. VAN LOON, J. ACQUOY, H. VAN ASSENDELFT DE CONINGH, A. C. BELINFANTE, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, W. G. VAN DELDEN, G. GRAAILAND, H. A. HARTOGH, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. DE LEON, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, J. SJOENIS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* W. VAN LOON.

Zij de som van de cijfers van het eerste getal........ s,
dan is volgens 3°. die van het tweede getal............ $2s$
en volgens 4°. die van het derde getal................ $2\frac{1}{2}s$,
maar volgens 1°. en 2°. is de som van al de cijfers 33, alzoo
is ook $5\frac{1}{2}s = 33$
en dus $s = 6$, $2s = 12$ en $2\frac{1}{2}s = 15$.

Laten nu de cijfers der tientallen van het eerste, tweede en derde getal respectievelijk worden voorgesteld door

$$x, \quad y \quad \text{en} \quad z,$$

dan zijn de cijfers der eenheden klaarblijkelijk

$$6 - x, \quad 12 - y \quad \text{en} \quad 15 - z$$

en dus de begeerde getallen zelve

$$9x + 6, \quad 9y + 12 \quad \text{en} \quad 9z + 15.$$

Verder is dan volgens 2°. $x + y + z = 15$...... (1),
volgens 5°. $\sqrt{(9x + 7)} = 7 - x$....... (2),
en volgens 6°. $\sqrt{(9x + 7)} + \sqrt{(9y + 13)} = 2(15 - z)$ (3).

De vergelijking (2) in het vierkant brengende, komt er na verplaatsing der termen $x^2 - 23x + 42 = 0$,
waaruit men vindt $x = 2$ of $x = 21$, van welke beide waarden alleen de eerste in aanmerking kan komen, omdat x niet grooter dan 9 kan wezen. Alzoo, $x = 2$ in de vergelijkingen (1) en (3) substituerende, komt er

$$y + z = 13 \ldots\ldots\ldots (4),$$
$$\sqrt{(9y + 13)} = 25 - 2z \ldots\ldots (5);$$

trekt men nu uit (4) $z = 13 - y$ en brengt men deze waarde van z in (5) over, dan komt er

$$\sqrt{(9y + 13)} = 2y - 1,$$

of deze vergelijking tot de tweede magt verheffende en de termen verplaatsende,

$$4y^2 - 13y - 12 = 0,$$

waaruit men vindt $y = 4$, of $y = -\frac{3}{4}$, van beide welke

waarden weder alleen de eerste in aanmerking kan komen, omdat y een geheel positief getal moet wezen; brengende dus $y=4$ in de vergelijking (4) over, dan vindt men $z=9$.

Daar dan nu gevonden is $x=2$, $y=4$ en $z=9$, komt er voor de gevraagde getallen

$$9x+6=24,\quad 9y+12=48 \quad\text{en}\quad 9z+15=96.$$

CLXXV. Voorstel.

Door H. A. Hartogh.

Uit de vergelijkingen

$$x^4+(4-3x)\,y^4-xy^3=(6x-5x^2)\,y^2+(x^3+6x^2)\,y$$

en

$$\frac{x-2}{y}=\frac{y^2-y+2}{x}$$

de waarden van x en y te vinden?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. J. Bolten, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, A. Vos, H. van Assendelft de Coninogh, H. W. Bloem, W. G. van Delden, H. A. Hartogh, A. F. van de Laar, Junior, C. Brunings *en* M. G. Snoek.

Oplossing *van* J. Acquoy.

De eerste der gegevene vergelijkingen ontwikkelende, verkrijgt men, na eenige verschikking der termen,

$$x^4-x^3y+5x^2y^2-xy^3+4y^4=3xy^4+6xy^2+6x^2y,$$

of $(x^2+y^2)(x^2-xy+4y^2)=3xy\,(y^3+2y+2x)$ (1); en vermenigvuldigt men de tweede der gegevene vergelijkingen met xy, dan verkrijgt men, almede na eenige verplaatsing der termen,

$$x^2+y^2=y^3+2y+2x \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Brengt men nu de waarde van $y^3+2y+2x$ uit (2), over in (1), dan komt er

$$(x^2+y^2)(x^2-xy+4y^2)=3xy\,(x^2+y^2),$$

of

$$(x^2+y^2)(x^2-4xy+4y^2)=0,$$

of

$$(x^2+y^2)(x-2y)^2=0$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door

$$x=2y \quad x=y\sqrt{-1} \quad\text{en}\quad x=-y\sqrt{-1}.$$

Neemt men *ten eerste* $x=2y$, dan gaat de vergelijking (2) over in $y^3-5y^2+6y=0$

of $y(y-2)(y-3)=0,$

waaraan voldaan wordt door $y=0$, $y=2$ en $y=3$; de waarden van x, die met deze waarden van y overeenstemmen, zijn, uithoofde dat $x=2y$ is,

1°. voor $y=0$, $x=0$
2°. voor $y=2$, $x=4$;
3°. voor $y=3$, $x=6$.

Neemt men *ten tweede* $x=y\sqrt{-1}$, dan gaat de vergelijking (2) over in

$$y^3+2y+2y\sqrt{-1}=0,$$

of

$$y(y^2+2+2\sqrt{-1})=0,$$

waaraan voldaan wordt door $y=0$ of $y=\pm\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$; met deze waarden van y stemmen overeen, omdat hier $x=y\sqrt{-1}$ is,

1°. voor $y=0$, $x=0$;
2°. voor $y=+\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$, $x=(\sqrt{-1})\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$;
3°. voor $y=-\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$, $x=(-\sqrt{-1})\sqrt{(-2-2\sqrt{-1})}$.

Neemt men *ten derde* $x=-y\sqrt{-1}$, dan gaat de vergelijking (2) over in

$$y^3+2y-2y\sqrt{-1}=0,$$

of

$$y(y^2+2-2\sqrt{-1})=0,$$

waaraan voldaan wordt door $y=0$, of $y=\pm\sqrt{(-2+2\sqrt{-1})}$; met deze waarden van y stemmen overeen, daar hier $x=-y\sqrt{-1}$ is,

1°. voor $y=0$, $x=0$;
2°. voor $y=+\sqrt{(-2+2\sqrt{-1})}$, $x=(-\sqrt{-1})\sqrt{(-2+2\sqrt{-1})}$;
3°. voor $y=-\sqrt{(-2+2\sqrt{-1})}$, $x=(+\sqrt{-1})\sqrt{(-2+2\sqrt{-1})}$.

Het blijkt dus, dat er aan de opgegevene vergelijkingen op zeven verschillende wijzen kan voldaan worden; doch slechts op tweederlei wijze, indien men de onbestaanbare waarden van x en y, alsmede het nul zijn dezer onbekenden, buiten wil sluiten.

CLXXVI. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Wanneer men de som van de n eerste driehoekige getallen, die van de n eerste vier-, vijf, zes-, zevenhoekige getallen en zoo vervolgens, neemt, dan zullen deze sommen eene gewone rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil is $\frac{1}{6}(n-1)\,n\,(n+1)$. *Men vraagt het bewijs hiervan?*

OPGELOST door A. VOS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, H. W. BLOEM, C. J. BOLTEN, C. BRUNINGS, S. DIK, CORNSZ., C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOEK en J. S. SPEIJER.

OPLOSSING van A. VOS.

Zij de som van de n eerste m-hoekige getallen .....S_m en die van de n eerste $(m+1)$-hoekige...............S_{m+1} dan hebben wij, volgens eene bekende formule, (Zie LACROIX, *Beg. der Stelk. door* I. R. SCHMIDT, 2de druk, § 291.)

$$S_m = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,\{(m-2)\,n-(m-5)\}$$

en $$S_{m+1} = \tfrac{1}{6}\, n\,(n+1)\,\{(m-1)\,n-(m-4)\};$$

derhalve is

$$S_{m+1} - S_m = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1).$$

Nemen wij nu achtervolgend $m=3$, $m=4$, $m=5$, *enz.* dan hebben wij:

$$S_4 - S_3 = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1),$$
$$S_5 - S_4 = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1),$$
$$S_6 - S_5 = \tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1),$$

enz. *enz.*

Gevolgelijk maken S_3, S_4, S_5, S_6, *enz.* eene gewone rekenkunstige reeks uit, waarvan het verschil gelijk aan $\tfrac{1}{6}\,(n-1)\,n\,(n+1)$ is.

AANMERKING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER. 1°. Indien men, in plaats van de sommen der n eerste drie-, vier-, vijfhoekige getallen, *enz.* te nemen, de sommen nam van een willekeurig aantal op elkander volgende termen uit de reeksen der drie-, vier-, vijf-hoekige getallen *enz.*, mits in elk dier reeksen met den evenveelsten term beginnende en eindigende, dan zouden ook deze sommen eene gewone rekenkunstige reeks uitmaken.

Stellen wij namelijk door ${}^{p-q}S_m$ de som voor der m-hoekige getallen van en zonder het p^{de} tot en met het q^{de}, dan hebben wij, volgens de bovengebruikte formule,

$${}^{o-q}S_m = \tfrac{1}{6}\,q(q+1)\,\{(m-2)q-(m-5)\}$$

en $${}^{o-p}S_m = \tfrac{1}{6}\,p(p+1)\,\{(m-2)p-(m-5)\}$$

waaruit door aftrekking volgt

$$^{p-q}S_m = \tfrac{1}{6}(m-2)\{q^2(q+1)-p^2(p+1)\} - \tfrac{1}{6}(m-5)\{q(q+1)-p(p+1)\};$$

schrijven wij nu $m+1$ in plaats van m, dan hebben wij ook

$$^{p-q}S_{m+1} = \tfrac{1}{6}(m-1)\{q^2(q+1)-p^2(p+1)\} - \tfrac{1}{6}(m-4)\{q(q+1)-p(p+1)\}$$

en bijgevolg, door aftrekking,

$$^{p-q}S_{m+1} - {}^{p-q}S_m = \tfrac{1}{6}\{q^2(q+1)-p^2(p+1)\} - \tfrac{1}{6}\{q(q+1)-p(p+1)\}.$$

Daar nu de laatste uitdrukking onafhankelijk van m is, zullen wij, door achtervolgend $m=3$, $m=4$, $m=5$, *enz.* te stellen, vinden dat elk der sommen

$$^{p-q}S_3,\ ^{p-q}S_4,\ ^{p-q}S_5,\ ^{p-q}S_6\ \textit{enz.}$$

van de onmiddellijk voorgaande even veel verschilt, en dat dus deze sommen eene gewone rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil is

$$\tfrac{1}{6}\{q^2(q+1)-p^2(p+1)\} - \tfrac{1}{6}\{q(q+1)-p(p+1)\}.$$

2°. Stellen wij, in het zoo even behandelde algemeene geval, $p=0$ en $q=n$, dan vinden wij, dat de sommen der n eerste veelhoekige getallen eene rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil $\frac{1}{6}n(n+1)(n-1)$ is, hierdoor komen wij dus op het opgegeven voorstel terug.

3°. Stellen wij $p=-n-1$ en $q=-1$, dan vinden wij, dat de sommen der n eerste veelhoekige getallen, met negatieve wortels -1, -2, -3, *enz.* genomen eene rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil is $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

4°. Stellen wij $p=-n-1$ en $q=n$, dan vinden wij, dat de sommen der n eerste veelhoekige getallen met positieve en negatieve wortels, beide te zamen genomen, eene rekenkunstige reeks vormen, waarvan het verschil is $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

CLXXVII. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Men vraagt naar twee oneindige reeksen van op elkander volgende vijfhoekige getallen, zoodanig dat, als men de termen der eene reeks van de overeenkomstige termen der andere aftrekt, men de oneindige rij van opeenvolgende vijfhoekige wortels van de kleinste der beide reeksen bekomt?

Opgelost, *door* S. Dik, Cornsz., J. Acquoy, H. W. Bloem, C. Brunings, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, A. Vos, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes *en* M. G. Snoek,

Oplossing van S Dix, Cornsz.

Stelt men voor den algemeenen term van de reeks der kleinste vijfhoekige getallen $\frac{3n^2 - n}{2}$, dan zal hierbij den wortel n moeten worden opgeteld, om den overeenkomstigen algemeenen term van de reeks der grootste vijfhoekige getallen te verkrijgen; de laatstgenoemde algemeene term is dus $\frac{3n^2 + n}{2}$; dezelve stelt een vijfhoekig getal voor; waarvan de wortel $-n$ is, en derhalve bestaat tusschen de beide gevraagde reeksen geen ander verband, dan dat de wortels der overeenkomstige termen, gelijk in hoegrootheid, maar verschillend in teeken zijn. Substitueert men dus, in de bogenoemde algemeene termen, voor n de op elkander volgende geheele getallen . . 1, 2, 3, 4, 5, *enz.* dan verkrijgt men voor de kleinste reeks 1, 5, 12, 22, 35, *enz*,
en voor de grootste
reeks . . . . . 2, 7, 15, 26, 40, *enz*;
de verschillen . . 1, 2, 3, 4, 5, *enz.*
zijn juist de vijfhoekige wortels van de termen der kleinste reeks; terwijl deze zelfde wortels, met omgekeerd teeken genomen, namelijk

—1, —2, —3, —4, —5, *enz.*

de vijfhoekige wortels der grootste reeks zijn.

CLXXVIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Wanneer men voor een getal, uit drie cijfers bestaande, het dubbele van dat getal plaatst, zal het alsdan komende getal van zes of zeven cijfers altijd door 3, *door* 23 *en door* 29, *zonder overschot kunnen gedeeld worden. Men vraagt naar het bewijs hiervan?*

Opgelost *door* A. Volkersz, J. Acquoy, H. G. Witlage, H. van Assendelft de Coningh, H. W. Bloem, Bas Backer, C. J. Bolten, C. Brunings, W. G. van Delden, H. G. Hartogh, C. F. Julius, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, M. de Leon, W. van Loon, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek, J. S. Speijer *en* A. Vos.

I. Oplossing van A. Volkersk.

Laat het getal, uit drie cijfers bestaande, door a worden voorgesteld, dan zal, als men het dubbel $2a$ daarvoor plaatst, het komende getal

$$1000 \times 2a + a = 2001\ a$$

zijn, daar nu $2001 = 3 \times 23 \times 29$ is, is het zeker, dat $2001\ a$ altijd door 3, door 23 en door 29 deelbaar zal zijn; mitsgaders nog door zoodanige andere getallen als a tot deelers heeft. Hierdoor is dus niet alleen het gestelde bewezen, maar tevens blijkbaar, dat men het nieuw gevormde getal $2001\ a$ achtervolgens door 3, 23 en 29 deelende, juist het eerste getal a tot quotient zal bekomen.

II. Oplossing van J. Acquoy.

Als men voor een getal P, uit n cijfers bestaande, het m-voud van dat getal plaatst, dan is dit hetzelfde, alsof men het getal P met $m \times (10)^n$ vermenigvuldigt en bij dat product het getal P optelt. Hieruit volgt, dat, als men een getal, door de aangeduide bewerking verkregen, Q noemt,

$$Q = m \times (10)^n \times P + P = \{m \times (10)^n + 1\}\ P$$

zijn zal; en dus zal het getal Q, behalve door de deelers in het getal P begrepen, ook nog deelbaar zijn door $m \times (10)^n + 1$ en door al de deelers van $m \times (10)^n + 1$.

Stelt men, overeenkomstig het geval in het voorstel opgegeven, $m = 2$ en $n = 3$, dan is $m \times (10)^n + 1 = 2001 = 3 \times 23 \times 29$ en dus zal, voor dit geval, het getal Q door 3, door 23 en door 29 deelbaar zijn.

CLXXIX. Voorstel.

Door S. T. Boas.

Men vraagt uit de vergelijkingen

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{v^2} = a\ \left(\frac{41209}{129600}\right),$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} = b\ \left(\frac{337}{360}\right),$$

$$x + y + z + v = c\ \ (24),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = d\ \ (174),$$

de waarden van x, y, z en v te vinden? (*)

(*) Prinsen, *Algebra*. bladz. 191. No. 12.

OPGELOST door C. BRUNINGS, J. ACQUOY, H. W. BLOEM, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, C. F. JULIUS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER en A. VOS.

OPLOSSING van C. BRUNINGS.

De derde vergelijking tot de tweede magt verheffende en daarvan de vierde aftrekkende, komt er, na deeling door 2,

$$xy + xz + xv + yz + yv + zv = \frac{c^2 - d}{2} \quad . \; . \; . \; (1).$$

Eveneens de tweede vergelijking tot de tweede magt verheffende en daarna de eerste vergelijking er aftrekkende, vindt men na deeling door 2,

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xv} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{yv} + \frac{1}{zv} = \frac{b^2 - a}{2}$$

of, de breuken in het eerste lid onder denzelfden noemer brengende

$$\frac{zv + yv + yz + xv + xz + xy}{xyzv} = \frac{b^2 - a}{2};$$

stelt men nu hierin, voor den teller van het voorste lid de gevondene waarde (1), dan verkrijgt men

$$xyzv = \frac{c^2 - d}{b^2 - a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Verder uit de tweede der gegevene vergelijkingen de breuken verdrijvende, komt er

$$yzv + xzv + xyv + xyz = bxyzv$$

of, hierin voor $xyzv$ de waarde (2) stellende,

$$yzv + xzv + xyv + xyz = \frac{b(c^2 - d)}{b^2 - a} \quad . \; . \; (3).$$

Door de derde der gegevene vergelijkingen en door de gevondene waarden (1), (2) en (3), zijn dan nu van de vier onbekenden x, y, z en v bekend: de som; de som der producten twee aan twee; de som der producten drie aan drie; en het gedurig product; derhalve zijn deze vier onbekenden de wortels eener vierde-magts-vergelijking, welke de genoemde waarden tot coëfficienten heeft, dat is van de vergelijking

$$X^4 - cX^3 + \frac{c^2 - d}{2} X^2 - \frac{b(c^2 - d)}{b^2 - a} X + \frac{c^2 - d}{b^2 - a} = 0;$$

en derhalve moet het voorstel in het algemeen voor opgelost gehouden worden.

Stelt men, in deze vierde-magts-vergelijking, voor a, b, c en d de gegevene waarden, dan wordt dezelve

$$X^4 - 24\,X^3 + 201\,X^2 - 674\,X + 720 = 0,$$

waarvan de wortels zijn: $X=2$, $X=5$, $X=8$, $X=9$; de onbekenden x, y, z en v hebben dus de getallenwaarden 2, 5, 8 en 9, doch het is onverschillig, welk dezer getallen men voor iedere onbekende neemt.

CLXXX. Voorstel.

Door A. F. van de Laar, Junior.

Van eenen driehoek, welks zijden eene rekenkunstige reeks daarstellen, is gegeven: de middenevenredige tusschen de middellijnen der in- en om-geschrevene cirkels gelijk a; en de som van de vierkanten op de zijden gelijk b^2. Men verlangt hieruit de zijden te berekenen, door zuivere vierkants-vergelijkingen?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Acquoy, H. van Assendelft de Coningh, H. W. Bloem, C. J. Bolten, W. G. van Delden, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, A. Vos, C. Brunings *en* A. F. van de Laar, Junior.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Stellen wij voor de drie zijden des driehoeks $x-y$, x en $x+y$, dan is, zoo wij den inhoud des driehoeks door I voorstellen, volgens bekende formulen; (Zie Lacroix, *Trigonometrie* door I. R. Schmidt, 2de druk, § 46.)

de middellijn van den ingeschreven' cirkel . . . . $\dfrac{4\,I}{3\,x}$

en die van den omgeschreven' cirkel . . $\dfrac{(x-y)\,x\,(x+y)}{2\,I}$.

Volgens de opgaaf hebben wij dus de vergelijkingen:

$$\sqrt{\frac{(x-y)\,x\,(x+y)}{2I} \times \frac{4I}{3x}} = a$$

en $$(x-y)^2 + x^2 + (x+y)^2 = b^2,$$

die dadelijk herleidbaar zijn tot

$$2x^2 - 2y^2 = 3a^2 \quad \text{en} \quad 3x^2 + 2y^2 = b^2$$

Deze beide vergelijkingen optellende komt er terstond

$$5x^2 = 3a^2 + b^2 \quad \text{en dus} \quad x = \sqrt{\frac{3a^2 + b^2}{5}};$$

en, het drievoud der eerste van het dubbel der tweede aftrekkende, komt er even zoo,

$$10y^2 = 2b^2 - 9a^2 \text{ en dus } y = \sqrt{\frac{2b^2 - 9a^2}{10}};$$

De zijden des driehoeks zijn derhalve

$$\sqrt{\frac{3a^2+b^2}{5}} - \sqrt{\frac{2b^2-9a^2}{10}}, \sqrt{\frac{3a^2+b^2}{5}} \text{ en } \sqrt{\frac{3a^2+b^2}{5}} + \sqrt{\frac{2b^2-9a^2}{10}}.$$

Aanmerking van J. Acquoy. Zal de gevraagde driehoek bestaanbaar zijn, dan moet b^2 niet kleiner dan $\frac{9}{2}a^2$ gegeven zijn. Was $b^2 = \frac{9}{2}a^2$ gegeven, dan zou $y = 0$, en alzoo de driehoek gelijkzijdig zijn, zoodat dan de zijden geene eigenlijke rekenkunstige reeks zouden uitmaken. Het blijkt tevens, dat bij eenen gelijkzijdigen driehoek, de som van de vierkanten der zijden gelijk is aan $4\frac{1}{2}$ maal het product der middellijnen van de in- en om-geschrevene cirkels.

CLXXXI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De middelpunten der vier cirkels, die ieder twee zijden eens vierhoeks inwendig en eene derde zijde uitwendig raken, liggen in den omtrek van eenen cirkel. Men vraagt dit te bewijzen.

Opgelost *door* J. Acquoy, Bas Bakker, C. J. Bolten, C. Brunings, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* A. Vos.

Oplossing van J. Acquoy.

Zij ABCD (Fig. 89.) de willekeurige vierhoek, waarvan de zijden onbepaaldelijk verlengd zijn, en stellen wij deszelfs hoeken A, B, C, D, respectievelijk α, β, γ, δ; indien wij dan supplementen dier hoeken, door de lijnen M‴M, MM′, M′M″, M″M‴, midden door deelen, dan zullen de punten M, M′, M″, M‴, waarin die lijnen elkander snijden, de middelpunten der vier bedoelde cirkels zijn.

Uit deze constructie volgt, dat in den driehoek ABM

$$\textit{hoek } MAB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\textit{hoek } MBA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta,$$

en dus $\textit{hoek } M = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$

is, terwijl op gelijke wijze gevonden wordt

$$hoek\ M' = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma)$$
$$hoek\ M'' = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta)$$
en
$$hoek\ M''' = \tfrac{1}{2}(\delta + \alpha).$$

Telt men nu de waarden, voor de hoeken M en M'', als mede die voor de hoeken M' en M''' verkregen, bij elkander op, dan heeft men

$$hoek\ M + hoek\ M'' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
en
$$hoek\ M' + hoek\ M''' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta);$$

maar, omdat in het algemeen de som van de hoeken eens vierhoeks 360° is, zoo is ook $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$, derhalve

$$hoek\ M + hoek\ M'' = 180°$$
en
$$hoek\ M' + hoek\ M''' = 180°;$$

gevolgelijk is MM'M''M''' een vierhoek, om welken een cirkel kan beschreven worden, weshalve de punten M, M', M'', M''' in den omtrek eens cirkels liggen.

CLXXXII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer op de zijden eens driehoeks uitwendig gelijkzijdige driehoeken worden beschreven, dan zullen de drie lijnen, welke de toppunten dezer driehoeken met de overstaande hoekpunten des oorspronkelijken driehoeks vereenigen, onderling gelijk zijn en elkander in een zelfde punt snijden. Men vraagt naar het bewijs hiervan?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, H. W. Bloem, C. J. Bolten, C. Brunings, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoek, J. S. Speijer, J. Acquoy, C. F. Julius, A. Vos, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* A. F. van de Laar, Junior.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat ABC (Fig. 90) een willekeurige driehoek zijn, op welks zijden de gelijkzijdige driehoeken ABF, ACE en BCD zijn beschreven; trekken wij dan, van de drie in het voorstel genoemde lijnen, er vooreerst slechts twee, bij voorbeeld, AD en CF, dan zijn de driehoeken ABD en CBF gelijk en gelijkvormig, want in dezelve is

$FB = AB$, $BC = BD$ en $hoek\ FBC = hoek\ ABC + 60° = hoek\ ABD$

hieruit volgt dus $AD = CF$.

De gelijkheid van een dezer lijnen met de derde, die van B naar E kan getrokken worden, wordt volkomen op de-

zelfde wijze bewezen, derhalve zijn de drie in het voorstel genoemde lijnen onderling gelijk.

Om te bewijzen, dat die drie lijnen elkander in een zelfde punt snijden, behoeven wij slechts aan te toonen, dat wanneer men uit het punt P, waar AD en CF elkander snijden, naar B en E, lijnen PB en PE trekt, deze lijnen in elkanders verlengde zullen vallen. Daartoe hebben wij, uit de reeds aangetoonde gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken ABD en CBF,

hoek BDA = *hoek* BCF en *hoek* BFC = *hoek* BAD

of *hoek* BDP = *hoek* BCP en *hoek* BFP = *hoek* BAP;

willen wij nu op BP als koorde een cirkelsegment beschrijven, den hoek BDP = BCP bevattende, dan zou de omtrek diens cirkels door de punten C en D gaan; bijgevolg kan om den vierhoek BPCD een cirkel beschreven worden; de hoek BPC is dus het supplement van den hoek BDC, en derhalve *hoek* BPC = 120°.

Even zoo op BP een cirkelsegment willende beschrijven, dat den hoek BFP = BAP bevat, zou daaruit blijken, dat ook om den vierhoek BPAF een cirkel kan beschreven worden en dat bijgevolg *hoek* BPA = 120° is, als het supplement van den hoek AFB zijnde.

Omdat nu de hoeken BPC en BPA ieder 120° zijn, is ook *hoek* APC = 120° en *hoek* APC + *hoek* AEC = 180°; dus kan ook om den vierhoek APCE een cirkel beschreven worden; in dien cirkel zouden de hoeken EAC en EPC beide aan den omtrek en op denzelfden boog EC staan, derhalve zijn die hoeken even groot, zoodat *hoek* EPC = *hoek* EAC = 60° is

De hoek EPC = 60°, is dus het supplement van den hoek BPC = 120°, derhalve liggen PB en PE in elkanders verlengde, en het gestelde is alzoo bewezen.

Aanmerking. Als in den driehoek een der drie hoeken, bijv., ABC grooter dan 120° was, zoo als in Fig. 91, dan zou *hoek* ABC + *hoek* CBD = *hoek* ABC + *hoek* ABF > 180° zijn, derhalve zouden AD en CF en dus ook hun snijpunt P buiten den driehoek vallen. Dit zelfde zou plaats hebben, als men de gelijkzijdige driehoeken ABF, ACE en BCD *inwendig*, in plaats van uitwendig, op de zijden des oorspronkelijken driehoeks beschreef, zoo als in Fig. 92, waar de hoek ABC grooter dan 120° is; zoo als in Fig. 93, waar slechts een

van de hoeken des driehoeks namelijk ABC grooter dan 60° is, en dus de punten D, E en F, allen buiten den driehoek vallen; of zoo als in Fig. 94, waar twee hoeken des driehoeks, namelijk ABC en BAC, grooter dan 60° zijn, en dus een der punten D, E en F, namelijk F, binnen ABC valt.

In alle deze gevallen blijft de bewezene stelling doorgaan en men behoeft het bewijs, dat wij voor het geval van Fig. 90 gegeven hebben, slechts eenigzins te wijzigen, om het onmiddellijk op de Figuren 91, 92, 93 en 94 te kunnen toepassen. In al de vijf Figuren namelijk, is de driehoek ABD gelijk en gelijkvormig met CBF, omdat deze beide driehoeken twee gelijke zijden met gelijke ingesloten hoeken hebben; even zoo is het met de driehoeken BAE en FAC gelegen, en daaruit volgt, voor al de gevallen, AD = CF = BE.

Verder kan in al de vijf figuren om PBCD en PBAF een cirkel beschreven worden; zich die cirkels voorstellende, vindt men gemakkelijk:

in Fig. 90, BPC = 120°, BPA = 120°, en dus APC = 120°;
in Fig. 91, 92 en 93, BPC = 60°, BPA = 60°, en dus APC = 120°;
in Fig. 94, BPC = 60°, BPA = 120°, en dus APC = 60°;

in al deze Figuren kan dus ook, om den vierhoek APCE, een cirkel beschreven worden, hetwelk voor Fig. 94 daaruit blijkt, dat, als men op AC als koorde een cirkelsegment beschrijft, eenen hoek van 60° bevattende, de omtrek van dien cirkel zoowel door P als door E moet gaan. Zich nu wederom dezen laatsten cirkel voorstellende, ziet men gemakkelijk, dat in al de Figuren *hoek* EPC = 60° is; derhalve zal in Fig. 90, waar *hoek* BPC = 120° is, PE in het verlengde van BP vallen; maar in de Figuren 91, 92, 93 en 94, waar wij reeds aantoonden dat *hoek* BPC = 60° is, zal PE langs BE vallen, zoodat in alle gevallen de punten P, B en E in eene zelfde regte lijn liggen.

Aanmerking van J. Acquoy en A. Vos. In Fig. 90 zijn de driehoeken HEC en CEP gelijkvormig, omdat zij in E eenen hoek gemeen hebben en bovendien *hoek* ECH = *hoek* EPC = 60° is; derhalve heeft men

$$EH : EC = EC : EP,$$

dus is ook

$$EH : AC = AC : EP$$

of

$$AC^2 = EH \times EP;$$

op gelijke wijze blijkt, dat men ook heeft

$$AB^2 = FI \times FP \quad \text{en} \quad BC^2 = DG \times DP.$$

Men zal zich gemakkelijk overtuigen, dat deze zelfde vergelijkingen ook in de Figuren 91, 92, 93 en 94 onveranderd doorgaan; in Fig. 92 hebben wij het snijpunt I der lijnen AB en FC, en in Fig. 93 het snijpunt G der lijnen BC en AD, niet geteekend, ten einde de Figuren niet te omslagtig te maken.

CLXXXIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Indien men, uit het middelpunt van den cirkel, om eenen driehoek beschreven, lijnen naar de hoekpunten trekt, wordt de driehoek in drie kleinere driehoeken verdeeld. Als nu gegeven zijn de drie stralen der cirkels, om de laatstgenoemde driehoeken kunnende beschreven worden, wil men hieruit de zijden des geheelen driehoeks bepalen?

OPGELOST, *door* J. ACQUOY, J. S. SPEIJER, C. J. BOLTEN, H. W. BLOEM, C. BRUNINGS, C. F. JULIUS, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, A. VOS *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Zij ABC (Fig. 95) de bedoelde driehoek, M het middelpunt van den omgeschreven cirkel, en laten de stralen der cirkels, welke om de driehoeken AMB, BMC en CMA beschreven kunnen worden, respectievelijk gelijk r, r' en r'' gegeven zijn; laten voorts de hoeken des driehoeks door A, B en C voorgesteld worden en stellen wij MA = MB = MC = R, dan is volgens eene bekende formule:

in den driehoek ABC,

$$\left.\begin{aligned} AB &= 2\,R\,Sin.\,C, \\ BC &= 2\,R\,Sin.\,A, \\ \text{en} \quad AC &= 2\,R\,Sin.\,B, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

en in de driehoeken AMB, BMC en CMA,

$$\left.\begin{aligned} AB &= 2r\,Sin.\,AMB = 2r\,Sin.\,2\,C = 4r\,Sin.\,C\,Cos.\,C \\ BC &= 2r\,Sin.\,BMC = 2r'\,Sin.\,2\,A = 4r'\,Sin.\,A\,Cos.\,A \\ \text{en} \quad AC &= 2r''\,Sin.\,CMA = 2r''\,Sin.\,2\,B = 4r''\,Sin.\,B\,Cos.\,B \end{aligned}\right\} (2).$$

Uit de vergelijkingen (1) en (2) volgt nu

$$\left.\begin{array}{l} 2\,R\,Sin.\,C = 4r\,Sin.\,C\,Cos.\,C \text{ of } Cos.\,C = \dfrac{R}{2r}, \\ 2\,R\,Sin.\,A = 4r'\,Sin.\,A\,Cos.\,A \text{ of } Cos.\,A = \dfrac{R}{2r'}, \\ 2\,R\,Sin.\,B = 4r''\,Sin.\,B\,Cos.\,B \text{ of } Cos.\,B = \dfrac{R}{2r''}; \end{array}\right\} \quad (3).$$

Maar omdat $A + B + C = 180°$ is, heeft men (Zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 3e druk, § 959, *formule* (67)).

$Cos.^2\,A + Cos.^2\,B + Cos.^2\,C + 2\,Cos.\,A\,Cos.\,B\,Cos.\,C = 1$; substitueert men hierin voor $Cos.\,A$, $Cos.\,B$ en $Cos.\,C$ de gevondene waarden (3), dan vindt men na behoorlijke herleiding.

$$R^3 + \frac{r^2 r'^2 + r'^2 r''^2 + r''^2 r^2}{r r' r''} R^2 - 4 r r' r'' = 0 \quad . \quad . \quad (4).$$

Uit deze derdemagtsvergelijking, kan nu vooreerst de waarde van R bepaald worden; daarna kan men, door de formulen (3), de hoeken des driehoeks en eindelijk door de formulen (2), deszelfs zijden berekenen.

AANMERKINGEN. 1°. Stelt men in de vergelijking (4) $R = 0$, dan wordt het eerste lid der vergelijking negatief, en stelt men in dezelve $R = 2r$, of $R = 2r'$ of $R = 2r''$, dan wordt dit eerste lid $\frac{4r^2}{r'r''}(r' + r'')^2$ of $\frac{4r'^2}{rr''}(r + r'')^2$ of $\frac{4r''^2}{rr'}(r + r')^2$ en dus altijd positief; hieruit blijkt, dat de vergelijking (4) altijd eenen bestaanbaren wortel, grooter dan nul en kleiner dan $2r$, $2r'$ of $2r''$, heeft; hieruit volgt verder, door de formulen (3), dat de waarden voor $Cos.\,A$, $Cos.\,B$ en $Cos.\,C$, met dezen wortel overeenstemmende, kleiner dan de eenheid zullen wezen, en dat er dus altijd, hoedanig dan ook de gegevens mogen zijn, eene regtstreeksche oplossing van het voorstel mogelijk is.

2°. Het is, ter bepaling van den driehoek, niet noodzakelijk, dat men eerst de waarde van R uit de vergelijking (4) berekent. want volgens de vergelijkingen (3) is

$R = 2r\,Cos.\,C$, $R = 2r'\,Cos.\,A$ en $R = 2r''\,Cos.\,B$

en brengt men deze waarden voor R in de vergelijking (4) over, dan vindt men achtereenvolgend, na behoorlijke herleiding,

$$\left.\begin{array}{l} Cos.^3 C + \dfrac{r^2 r'^2 + r'^2 r''^2 + r''^2 r^2}{2r^2 r' r''} Cos.^2 C - \dfrac{r' r''}{2r^2} = 0, \\ Cos.^3 B + \dfrac{r^2 r'^2 + r'^2 r''^2 + r''^2 r^2}{2r''^2 r r'} Cos.^2 B - \dfrac{r r'}{2r''^2} = 0 \\ \text{en} \\ Cos.^3 A + \dfrac{r^2 r'^2 + r'^2 r''^2 + r''^2 r^2}{2r'^2 r r''} Cos.^2 A - \dfrac{r r''}{2r'^2} = 0; \end{array}\right\} (5.)$$

uit welke vergelijkingen men onmiddellijk de hoeken A, B en C kan vinden, om vervolgens door (2) de zijden te berekenen.

3°. Uit de formulen (3) volgt terstond:

$$Cos.\ C : Cos.\ A : Cos.\ B = \frac{1}{r} : \frac{1}{r'} : \frac{1}{r''},$$

zoodat de cosinussen van de hoeken des geheelen driehoeks omgekeerd evenredig zijn, met de stralen der cirkels om de overstaande gedeeltelijke driehoeken beschreven.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Den loop en de voornaamste eigenschappen op te sporen der kromme lijn, die de eigenschap heeft, dat de som van de ordinaat, normaal en subnormaal, van elk harer punten, eene standvastige grootheid is?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. F. JULIUS, C. BRUNINGS *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Daar de normaal en subnormaal voor elk punt eener kromme lijn, waarvan de vergelijking is $y = F(x)$, voorgesteld worden door de vormen:

$$y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2\right\}} \quad \text{en} \quad y\frac{\delta y}{\delta x},$$

zoo geeft het voorstel, indien wij de standvastige som van de ordinaat, normaal en subnormaal voor eenig punt der gevraagde kromme gelijk a stellen, aanleiding tot de vergelijking:

$$y + y\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2\right\}} + y\frac{\delta y}{\delta x} = a,$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - 2ay}{2ay - 2y^2};$$

dus is $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2ay - 2y^2}{a^2 - 2ay} = \frac{y}{a} - \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}a}{a - 2y}$........(1)

en $\partial x = \frac{y\partial y}{a} - \frac{\partial y}{2} + \frac{\frac{1}{2}a\,\partial y}{a - 2y}$.

Door deze vergelijking te integreren, en bij die integraal eene zoodanige standvastige grootheid te voegen, dat, voor $y = 0$, tevens $x = 0$ wordt, vindt men voor de vergelijking der bedoelde kromme lijn:

$$x = \frac{y^2 - ay}{2a} - \tfrac{1}{4}a \; Log. \frac{a - 2y}{a} \ldots\ldots\ldots (2),$$

waarbij verder geene standvastige behoeft gevoegd te worden, dewijl hierdoor alleen de as der ordinaten evenwijdig aan zich zelve verplaatst zou worden. Het eerste differentiaal quotient is boven reeds opgegeven, differentieren wij hetzelve andermaal ten opzigte van y, dan verkrijgen wij

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{2a^2 - 4ay + 4y^2}{a(a - 2y)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Om nu, uit de gevondene vergelijkingen (1), (2) en (3), den loop en de voornaamste eigenschappen der kromme op te sporen, zullen wij de lijnen XX′ en YY′, (Fig. 96.) snijdende elkander regthoekig in O, als coördinaten-assen aannemen.

Omdat, in de vergelijking (2), voor $y = 0$, tevens $x = 0$ wordt, is O een punt van de kromme, en dewijl volgens (1) voor $y = 0$, ook $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ wordt, is de as YY′ de raaklijn der kromme in dat punt O.

Stelt men in (2) y positief, dan ziet men terstond dat y niet grooter dan $\frac{1}{2}a$ zijn kan, omdat dan x onbestaanbaar zou worden. Neemt men $y = \frac{1}{2}a$, dan wordt, omdat $Log. 0 = -\infty$ is, $x = +\infty$ en men verkrijgt dus het op eenen oneindigen afstand ter regterzijde van de as YY′ verwijderde punt Z der kromme; daar voorts als $y = \frac{1}{2}a$ is, volgens (1) $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}a}{0} = \infty$ wordt, zoo zal de raaklijn van het punt Z de as YY′ regthoekig snijden. Neemt men dus op OY den afstand OA $= \frac{1}{2}a$ en trekt men door A de lijn AW evenwijdig aan XX′, dan zal AW de raaklijn van het

oneindig afgelegene punt Z en dus een asymptoot der kromme zijn.

Schrijft men voorts de waarde van x uit (2) onder den vorm:

$$x = \frac{y^2}{2a} - \frac{a}{4}\left\{\frac{2y}{a} + Log.\left(1 - \frac{2y}{a}\right)\right\},$$

dan wordt, door ontwikkeling van den Logarithmischen term,

$$x = \frac{y^2}{2a} - \frac{a}{4}\left\{\frac{2y}{a} - \frac{2y}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{a}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2y}{a}\right)^3 - enz\right\}$$

$$\text{of } x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2y}{a}\right)^3 + enz.\right\}$$

waaruit men ziet, dat y grootere positieve waarden verkrijgende, x grooter wordt en bestendig positief blijft; er kunnen dus boven de as XX′ geene punten der kromme ter linkerzijde van de as YY′ gevonden worden. Daar voorts uit de waarde (3) van $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ blijkt, dat zoo lang $y < \frac{1}{2}a$ is, $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ positief blijft en dus voor elk punt hetzelfde teeken behoudt als de abscis x, zoo besluiten wij, dat, bij positieve waarden voor y, de kromme lijn, van het punt O af tot aan het oneindig afgelegen punt Z, onafgebroken zal voortgaan en over al de bolle zijde naar de as YY′ gekeerd houden; zoo dat dezelve de gedaante heeft, als in de figuur door OMZ is voorgesteld.

Om den loop der kromme beneden de as XX′ na te gaan, zullen wij in de vergelijkingen (1), (2) en (3) y negatief beschouwen, dan volgt terstond uit (2) dat elke waarde voor y, x bestaanbaar maakt, de kromme lijn zal dus beneden de as XX′ onafgebroken voortgaan. Schrijft men de waarde van x uit (2) onder den vorm:

$$x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{-\frac{2y}{a} - Log.\frac{a-2y}{a}\right\}$$

en stelt men $Log.\frac{a-2y}{a} = p$ of $\frac{a-2y}{a} = e^p$ en dus $y = -\frac{1}{2}a\,(e^p - 1)$, zijnde p klaarblijkelijk positief, dan heeft men $x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{e^p - 1 - p\right\}$

of den exponentialen term e^p in eene reeks ontwikkelende

$$x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{-1 - p + 1 + p + \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + enz.\right\}$$

dat is: $$x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{\frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{2.3} + \text{enz.}\right\}$$

of voor p weder hare waarde $Log. \frac{a-2y}{a}$ in de plaats stellende,

$$x = \frac{y^2}{2a} + \frac{a}{4}\left\{\frac{Log.^2 \frac{a-2y}{a}}{2} + \frac{Log.^3 \frac{a-2y}{a}}{2.3} + \text{enz.}\right\}$$

Hieruit ziet men dat ook bij negatieve waarden voor y, x bestendig positief blijft en er dus ook in dit geval geene punten der kromme ter linkerzijde van de as YY′ gelegen kunnen zijn. Daar voorts, als y negatief grooter wordt, tevens x aangroeit, tot dat bij $y = -\infty$, $x = +\infty$ wordt en blijkens (3) $\frac{\delta^2 x}{\delta y^2}$ bestendig positief blijft, en dus voor elk punt hetzelfde teeken heeft als de abscis x, zoo ziet men dat de kromme lijn van het punt O af, beneden de as XX′ en ter regterzijde van YY′ tot op oneindige afstanden van die beide assen voortgaat, overal hare bolle zijde naar de as YY′ gekeerd houdende, zoodat zij de gedaante heeft als in de figuur door OM′Z′ wordt voorgesteld.

Om te onderzoeken, of voor dit gedeelte der kromme ook eene asymptoot bestaat zullen wij zien, welken hoek de raaklijn van het oneindig afgelegen punt Z′ met de as YY′ maakt en te dien einde in de waarde van $\frac{\delta x}{\delta y}$, welke de tangens van dien hoek voorstelt, $y = -\infty$ stellen.

Nu is uit (1) $$\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{2ay - 2y^2}{a^2 - 2ay} = \frac{\frac{2a}{y} - 2}{\frac{a^2}{y^2} - \frac{2a}{y}}$$

en dus is bij $y = -\infty$, $\frac{\delta x}{\delta y} = \frac{-2}{0} = -\infty$;

de raaklijn van het oneindig afgelegen punt Z′, snijdt dus de as YY′ regthoekig; die raaklijn is bijgevolg evenwijdig aan de as XX′, maar op eenen oneindigen afstand beneden dezelve gelegen; de tak OM′Z′ der kromme heeft dus geene asijmptoot, maar verkrijgt hoelangs zoo meer neiging, om evenwijdig met de as XX′ voort te gaan.

Substitueren wij, in de algemeene vormen

$$y\sqrt{\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}} \quad \text{en} \quad y\frac{\partial y}{\partial x}$$

voor den normaal en subnormaal eener kromme, de waarde van $\frac{\partial y}{\partial x}$ uit (1), dan vinden wij, na eenige herleiding, dat voor eenig punt der behandelde kromme

$$\textit{de normaal} = \frac{a^2-2ay+2y^2}{2(a-y)} \ldots\ldots (4)$$

en

$$\textit{de subnormaal} = \tfrac{1}{2}a \times \frac{a-2y}{a-y} \ldots\ldots (5)$$

is. Hieruit ziet men, dat, zoowel bij positieve waarden voor y kleiner dan $\frac{1}{2}a$, als bij negatieve waarden voor y, dat is, zoowel voor het gedeelte OMZ als voor het gedeelte OM′Z′ der kromme, de normaal en subnormaal altijd positief zullen zijn. Waaruit verder volgt, dat, voor elk punt van het gedeelte OMZ, regtstreeks de som van de ordinaat, normaal en subnormaal gelijk is aan de standvastige lijn a of $2 \times$ OA; maar dat, voor eenig punt van het gedeelte OM′Z′, eigenlijk de som van de normaal en subnormaal verminderd zal moeten worden met de ordinaat, om de standvastige lijn a of $2 \times$ OA te verkrijgen.

Schrijft men de waarde (5) voor de subnormaal onder den vorm $\dfrac{\frac{a^2}{y}-2a}{\frac{2a}{y}-2}$ en stelt men hierin $y = -\infty$, dan vindt men dat de subnormaal, voor het oneindig afgelegene punt van het gedeelte OM′Z′ gelijk is aan a, waaruit blijkt, dat dit gedeelte, in deszelfs oneindig afgelegene punten, overeenkomt met eene parabool, waarvan de parameter $2a$ is.

Is van eenig punt M, van het gedeelte OMZ der kromme, de ordinaat $y =$ MP gegeven, dan is volgens (5), de subnormaal voor dit punt gelijk aan $\text{OA} \times \frac{2\text{OA}-2\text{MP}}{2\text{OA}-\text{MP}}$. Maakt men dus PR vierde evenredig tot de lijnen 2OA—MP, 2OA—2MP en OA, dan zal PR de subnormaal en MR de normaal van het punt M zijn, waardoor dan verder de tangens en subtangens van dit punt onmiddellijk geconstrueerd kunnen worden. En is voor eenig punt M′ van het gedeelte OM′Z′

de ordinaat $-y = M'P$ gegeven, dan is volgens (5), de subnormaal voor dit punt gelijk aan $OA \times \frac{2OA + 2M'P}{2OA + M'P}$, waardoor dan ook voor dit punt, de subnormaal PR' en de normaal M'R' gemakkelijk geconstrueerd kunnen worden.

Stelt men de lengte van eenen boog der kromme door s voor, dan is, zoo als bekend is,

$$\delta s = \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} = \delta y \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\delta x}{\delta y}\right)^2\right\}}$$

substitueert men hierin de waarde van $\frac{\delta x}{\delta y}$ uit (1), dan heeft men

$$\delta s = \frac{a^{\frac{1}{2}} - 2ay + 2y^2}{a^2 - 2ay}\,\delta y = \frac{\delta y}{2} - \frac{y\delta y}{a} + \frac{\frac{1}{2}a\delta y}{a - 2y}$$

of integrerende

$$s = \frac{ay - y^2}{2a} - \frac{a}{4}\,Log.\,\frac{a - 2y}{a} \; . \; . \; . \; . \; (6),$$

waarbij verder, als men bij $y = 0$, of bij het punt O aanvangt, geene standvastige behoeft, omdat bij $y = 0$ ook $s = 0$ wordt.

Neemt men het verschil van de vergelijkingen (2) en (6), dan heeft men

$$s - x = \frac{y(a - y)}{a} \text{ of } s = x + \frac{y(a - y)}{a} \; . \; . \; . \; . \; (7);$$

Stelt men hierin $y = \frac{1}{2}a$, dan vindt men $s - x = \frac{1}{4}a$, waaruit blijkt, dat het verschil tusschen de oneindig voortloopende tak OMZ, en de as OX gelijk is aan $\frac{1}{4}a$ of $\frac{1}{2}$ OA.

Zijn van eenig punt M de coördinaten OP en MP gegeven, dan is volgens (7),

$$Boog\ OM = OP + \frac{MP\,(2\,OA - MP)}{2\,OA};$$

maakt men dus PS vierde evenredig tot de lijnen 2 OA, 2 OA — MP en MP, dan zal de lijn OS = OP + PS de lengte van den boog OM voorstellen.

Zijn voor het punt M' de coördinaten OP en M'P gegeven, dan zal volgens (7),

$$Boog\ OM' = OP - \frac{M'P\,(2\,OA + M'P)}{2\,OA}$$

zijn; maakt men dus PS' vierde evenredig tot de lijnen 2 OA,

2 OA + M'P en M'P, dan zal de lijn OS' = OP — PS'. gelijk zijn aan den boog OM'.

Door de som te nemen van de vergelijkingen (2) en (6), vindt men

$$s + x = -\tfrac{1}{2}\, a\, Log. \left(\frac{\tfrac{1}{2}a - y}{\tfrac{1}{2}a}\right) \ldots\ldots (8);$$

neemt men derhalve de lijn OA = $\frac{1}{2}a$ als eenheid aan, dan ziet men, dat onze kromme lijn de eigenschap heeft, dat voor elk punt de som van den boog en de abscis gelijk is aan de negatieve Logarithmus van het verschil, tusschen de éénheid en de ordinaat.

Voor het gedeelte OMZ, gaat deze eigenschap regtstreeks door, zoodat voor het punt M de som der lijnen OP en OS de negatieve Logarithmus van het verschil der lijnen OA en MP zijn zal.

Maar voor het gedeelte OM'Z' moet men in aanmerking nemen, dat zoowel de ordinaat y als de lengte van de boog s negatief moet beschouwd worden; zoodat voor het punt M' eigenlijk het verschil der lijnen OS' en OP de Logarithmus zijn zal van de som der lijnen OA en M'P.

Indien wij voor eenig punt der kromme den kromtestraal door r, en de coördinaten van het middelpunt des kromtecirkels door v en w voorstellen, dan is in het algemeen:

$$r = \pm \frac{\left\{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}$$

$$v = x + \frac{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}$$

en

$$w = y - \frac{\partial x}{\partial y} \times \frac{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}$$

substitueert men hierin de waarden van $\frac{\partial x}{\partial y}$ en $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ uit (1) en (3), dan vindt men na behoorlijke herleiding:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{(a^2 - 2ay + 2y^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2\,(a-2y)} \\ v &= x + \tfrac{1}{2}a - \frac{y\,(a-y)}{a} \\ \text{en}\qquad w &= \frac{y^2}{a^2} \times \frac{a^2 - 4ay + 2y^2}{a - 2y} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (9);$$

stelt men in deze formulen $y = 0$ en dus ook $x = 0$, dan vindt men $r = \frac{1}{2}a$, $v = \frac{1}{2}a$ en $w = 0$. Neemt men dus op de as OX, OB = OA $= \frac{1}{2}a$, dan is B het middelpunt van den kromtecirkel van het punt O, en dus een punt van de ontwondene.

Neemt men $y =$ MP en dus $x =$ OP, dan heeft men:

$$v = \mathrm{OP} + \mathrm{OA} - \frac{\mathrm{MP}\,(2\,\mathrm{OA} - \mathrm{MP})}{2\,\mathrm{OA}};$$

maakt men dus PK = OA en KL vierde evenredig tot de lijnen 2 OA, 2 OA − MP en MP, en dus gelijk aan PS, dan zal voor het punt M

$$v = \mathrm{OP} + \mathrm{PK} - \mathrm{KL} = \mathrm{OL}$$

zijn; plaatst men dus in L op OX de onbepaalde loodlijn LU, dan zal het punt U, waarin die loodlijn gesneden wordt door het verlengde van de normaal MR van het punt M, het middelpunt zijn van den kromtecirkel van het punt M; U is dus een punt van de ontwondene der kromme.

Neemt men $x =$ OP en $-\,y =$ M′P, dan is volgens (9)

$$v = \mathrm{OP} + \mathrm{OA} + \frac{\mathrm{M'P}\,(2\,\mathrm{OA} + \mathrm{M'P})}{2\,\mathrm{OA}};$$

of KL′ vierde evenredig tot de lijnen 2 OA, 2 OA + M′P en M′P en dus gelijk aan PS′ nemende, zoo is, voor het punt M′

$$v = \mathrm{OP} + \mathrm{PK} + \mathrm{KL'} = \mathrm{OL'};$$

rigt men dus, uit het punt L′ op OX, de onbepaalde loodlijn L′U′ op, dan zal het punt U′, waarin het verlengde van de normaal M′R′, van het punt M′, die loodlijn snijdt, het middelpunt des kromtecirkels van het punt M′, en dus een punt van de ontwondene zijn.

Op deze wijs zal men, zoowel bij negatieve als bij positieve waarden voor y, de middelpunten der kromtecirkels voor de onderscheidene punten der kromme kunnen construeren, en dus zooveel punten van de ontwondene kunnen

vinden als men begeert, en men zal bevinden, dat die ontwondene eene kromme lijn VUBU′V′ zijn zal, een keerpunt in B hebbende, en waarvan het gedeelte BUV, dat het ontwondene van het gedeelte OMZ der kromme lijn is, en dus overal de holle zijde naar de as YY′ gekeerd houdt, beneden de as XX′, en ter regterzijde van de as YY′ tot in het oneindige voortgaat; terwijl het gedeelte BU′V′, dat het ontwondene van het gedeelte OM′Z′ der kromme is, en dus mede overal de holle zijde naar de as YY′ gekeerd houdt, zich boven de as XX′ en ter regterzijde van de as YY′ tot in het oneindige uitstrekt.

Om den inhoud der behandelde kromme lijn te bepalen, hebben wij in het algemeen

$$I = \int y\,\delta x,$$

of hierin de waarde voor δx uit (1) substituerende:

$$I = \int \frac{2ay^2 - 2y^3}{a^2 - 2ay}\,\delta y = \int \frac{y^2\delta y}{a} - \int \frac{y\delta y}{2} - \int \frac{a\delta y}{4} + \int \frac{\frac{1}{4}a^2\,\delta y}{a - 2y}$$

of integrerende

$$I = \frac{y^3}{3a} - \frac{y^2}{4} - \frac{ay}{4} - \frac{a^2}{8}\,Log.\,\frac{a - 2y}{a}$$

waarbij, als men den inhoud van het punt O af begint te tekenen, geene standvastige behoeft, omdat voor $y = 0$ tevens naar behooren $I = 0$ wordt.

De gevondene waarde voor I stelt den inhoud voor, begrepen tusschen de kromme, de as OX en een' ordinaat der kromme; om ook den inhoud te bepalen, begrepen tusschen de kromme, de as YY′ en een abscis der kromme, heeft men slechts de gevondene waarde voor I, af te trekken van

$$xy = y\left\{\frac{y^2 - ay}{2a} - \frac{a}{4}\,Log.\,\frac{a-2y}{a}\right\} = \frac{y^3}{2a} - \frac{y^2}{2} - \frac{ay}{4}\,Log.\,\frac{a-2y}{a},$$

waardoor men vindt, dat dezelve gelijk is aan

$$\frac{y^3}{6a} - \frac{y^2}{4} + \frac{ay}{4} + \frac{a^2 - 2ay}{8}\,Log.\,\frac{a-2y}{a}$$

Stelt men hierin $y = \frac{1}{2}a$, dan vindt men:

Inh. OMZWAO $= \frac{1}{48}a^2 - \frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{1}{12}a^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\right)^2$; deze inhoud is dus gelijk aan $\frac{1}{3}$ deel van het vierkant op de lijn OA beschreven.

Aanmerking. Hoewel de aard der vergelijking, die wij in (2) voor de behandelde kromme lijn opgegeven hebben,

geene zuivere meetkunstige constructie voor dezelve toelaat, kan men echter, door eene lijn $OA = \frac{1}{2}a$ als éénheid aan te nemen, bij gegevene getallenwaarden voor y, met behulp eener tafel der Neperiaansche Logarithmen de overeenkomstige getallenwaarden voor x gemakkelijk vinden, en daardoor zoo veel punten der kromme, zoo naauwkeurig als men begeert, construeren. Men kan hiertoe echter ook nog eenen anderen weg inslaan. Schrijft men, namelijk de vergelijking (2) onder den vorm:

$$x = -\frac{1}{2}a + \frac{(\frac{1}{2}a - y)^2}{2a} - \frac{a}{4}\,Log.\,\frac{\frac{1}{2}a - y}{\frac{1}{2}a},$$

dan ziet men, dat bij eene gegevene waarde voor y de overeenkomstige waarde van x gevonden zal worden, door het verschil, dat er, bij die gevondene waarde voor y als ordinaat, bestaat tusschen de abscissen van twee kromme lijnen, waarvan de respectieve vergelijkingen zijn:

$$p = \frac{(\frac{1}{2}a - y)^2}{2a}\ (a) \quad \text{en} \quad q = \frac{a}{4}\,Log.\,\frac{\frac{1}{2}a - y}{\frac{1}{2}a}\ (b)$$

te verminderen met $\frac{1}{2}a$.

Deze kromme lijnen nu zijn gemakkelijk te construeren want stelt men $\frac{1}{2}a - y = z$, dan gaat de vergelijking (a) over in

$$p = \frac{z^2}{2a}$$

dat de vergelijking is van eene parabool, waarvan de parameter $2a$ is, terwijl de vergelijking (b), als men $\frac{1}{2}a$ voor éénheid aanneemt, verandert in

$$q = \frac{1}{2}\,Log.\,z,$$

waarvan de constructie gemakkelijk af te leiden is, uit de bekende constructie voor de Logarithmische kromme.

Schrijft men de waarde (6) voor de lengte van eenen boog der kromme onder den vorm:

$$S = \frac{1}{2}a - \frac{(\frac{1}{2}a - y)^2}{2a} - \frac{a}{4}\,Log.\,\frac{\frac{1}{2}a - y}{\frac{1}{2}a}$$

dan ziet men, dat de opgegevene constructie tevens geschikt is, om eene regte lijn te vinden, die gelijk is aan de lengte, welke een boog der kromme, bij gegevene waarden voor y, heeft.

CLXXXV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

Wanneer men aan ieder van twee gelijke cirkels eene raaklijn trekt, zoodanig dat deze lijnen elkander snijden, en dat de som van de afstanden van hun snijpunt tot de twee raakpunten standvastig is, begeert men de meetkunstige plaats van dat snijpunt te bepalen?

Opgelost door J. Badon Ghijben, J. Acquoy, C. F. Julius, A. Vos, C. Brunings, D. van Lakkerén Matthes en W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing van J. Badon Ghijben.

§ 1. Laten A en B (Fig. 97.) de bedoelde cirkels voorstellen, waaraan de raaklijnen MP en NP, elkander in P snijdende, getrokken zijn, dan zal, indien MP + NP verondersteld wordt standvastig te zijn, de meetkunstige plaats van het punt P bepaald moeten worden. Nemen wij daartoe het punt O, midden tusschen de middelpunten A en B der cirkels gelegen, voor pool, OX voor oorsprong der hoeken aan; zij dus *hoek* XOP $=\phi$, OP $= z$ en laat verder OA $=$ OB $= a$, AM $=$ BN $= r$ en MP + NP $= 2l$ gesteld worden, zoo hebben wij AP en BP trekkende

$$AP^2 = a^2 + z^2 + 2az\ Cos.\ \phi,$$

$$BP^2 = a^2 + z^2 - 2az\ Cos.\ \phi,$$

$$MP = \sqrt{(AP^2 - AM^2)} = \sqrt{(a^2 + z^2 + 2az Cos.\phi - r^2)}\ .\ (1),$$

$$NP = \sqrt{(BP^2 - BN^2)} = \sqrt{(a^2 + z^2 - 2az Cos.\phi - r^2)}\ .\ (2),$$

en bijgevolg:

$$\sqrt{(a^2+z^2+2az Cos.\phi-r^2)}+\sqrt{(a^2+z^2-2az Cos.\phi-r^2)}=2l.$$

Deze vergelijking tot de tweede magt verheffende, komt er, na deeling door 2 en verplaatsing der termen,

$$\sqrt{\{(a^2+z^2-r^2)^2-4a^2z^2 Cos.^2\phi\}} = 2l^2-(a^2+z^2-r^2)$$

en deze wederom in het vierkant brengende, komt er, na deeling door 4 en weglating der gelijke termen

$$-a^2z^2 Cos.^2\phi = l^4 - l^2(a^2+z^2-r^2),$$

waaruit men vindt

$$z = \pm l\sqrt{\frac{l^2-a^2+r^2}{l^2-a^2 Cos.^2\phi}}\ .\ .\ .\ .\ .\ (3),$$

Indien men uit deze polaire vergelijking, door de bekende substitutien $z^2 = x^2 + y^2$, $z\ Cos.\ \phi = x$, $z\ Sin.\ \phi = y$,

tot de vergelijking tusschen regthoekige coördinaten overgaat, waarbij dan XX', door de middelpunten A en B gaande, de as der abscissen en YY', die XX' in O regthoekig doorsnijdt, de as der ordinaten voorstelt, zoo verkrijgt men

$$(l^2 - a^2)\, x^2 + l^2 y^2 = l^2\, (l^2 - a^2 + r^2) \ldots\ldots (4)$$

waaruit dadelijk volgt, dat de gevraagde meetkunstige plaats eene ellips of hyperbool is, waarvan O het middelpunt is en waarvan de assen langs XX' en YY' liggen.

§ 2. De waarden die x verkrijgt, als men in de vergelijking (3) $\phi = 0$ en $\phi = 90°$ neemt, door m en n voorstellende, komt er

$$m = l\sqrt{\frac{l^2 - a^2 + r^2}{l^2 - a^2}},\ n = \sqrt{(l^2 - a^2 + r^2)},\ \frac{m}{n} = \frac{l}{\sqrt{(l^2 - a^2)}} \ldots (5);$$

zijn nu de standvastige grootheden l, a en r zoodanig gegeven, dat m en n beide bestaanbaar zijn, dan is de kromme lijn eene ellips, waarvan m en n de halve assen zijn; zijnde het uit de verhouding $\frac{m}{n} = \frac{l}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$, welke in dit geval bestaanbaar moet wezen, klaar, dat $m > n$ en alzoo m de halve groote en n de halve kleine as is. Door behulp der vergelijkingen (5), verandert men alsdan de vergelijking (4) gemakkelijk in

$$n^2 x^2 + m^2 y^2 = m^2 n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Zijn l, a en r zoodanig gegeven, dat m bestaanbaar, maar n onbestaanbaar is, dan zullen de uitdrukkingen

$$m = l\sqrt{\frac{a^2 - l^2 - r^2}{a^2 - l^2}},\ n' = \sqrt{(a^2 - l^2 - r^2)},\ \frac{m}{n'} = \frac{l}{\sqrt{(a^2 - l^2)}} \ldots (7)$$

bestaanbaar zijn. Door dezelve verandert men de vergelijking (4), gemakkelijk in

$$n'^2 x^2 - m^2 y^2 = m^2 n'^2 \ldots\ldots (8);$$

in dit geval is de kromme lijn eene hyperbool, waarvan m de halve eerste, n' de halve tweede as is, en die alzoo hare toppen op de as XX' heeft. Het is voorts uit de verhouding

$\frac{m}{n'} = \frac{l}{\sqrt{(a^2 - l^2)}}$ klaar, dat $m >= $ of $< n'$ zal zijn, naar gelang $l >=$ of $< \frac{1}{2}\, a\sqrt{2}$ is.

Zijn l, a en r zoodanig gegeven, dat n bestaanbaar, maar m onbestaanbaar is, dan zullen de uitdrukkingen

$$m'=l\sqrt{\frac{l^2-a^2+r^2}{a^2-l^2}},n=\sqrt{(l^2-a^2+r^2)},\frac{n}{m'}=\frac{\sqrt{(a^2-l^2)}}{l}\ldots (9)$$

bestaanbaar zijn. Door dezelve verandert de vergelijking (4) in $m'^2\,y^2 - n^2\,x^2 = m'^2\,\eta^2$ . . . . . (10); in dit geval is dus de kromme lijn wederom eene hyperbool, die n tot halve eerste as, m' tot halve tweede as en alzoo hare toppen op de as YY′ heeft; zullende voorts $n >=$ of $<m'$ zijn, naar gelang $l <=$ of $> \frac{1}{2}\,a\,\sqrt{2}$ is.

Wij merken nog op, dat m en n nimmer beide te gelijk onbestaanbaar kunnen zijn; want om n onbestaanbaar te maken moet $a^2 > l^2 + r^2$ zijn, alsdan is ook $a^2 > l^2$ en dus worden teller en noemer van het gebroken, dat in de waarde voor m onder het wortelteeken staat, beide negatief en bijgevolg m bestaanbaar.

§ 3. Voor de raaklijnen MP en NP kunnen wij eenvoudiger uitdrukkingen vinden, dan de formulen (1) en (2) in § 1 opgegeven; uit die formulen volgt namelijk terstond

$$MP^2 = a^2 + x^2 + 2\,ax.\,Cos.\,\phi - r^2$$

en

$$NP^2 = a^2 + x^2 - 2\,ax.\,Cos.\,\phi - r^2,$$

waarvan het verschil geeft

$$MP^2 - NP^2 = 4\,ax\,Cos.\,\phi = 4\,ax;$$

nu is

$$MP + NP = 2\,l$$

men vindt alzoo, door deze vergelijking in de vorige te deelen:

$$MP - NP = \frac{2\,ax}{l}$$

en uit deze waarden van MP + NP en MP — NP volgt dadelijk

$$\left.\begin{aligned} MP &= l + \frac{ax}{l} = \frac{a}{l}\Big(\frac{l^2}{a} + x\Big) \\ \text{en}\quad NP &= l - \frac{ax}{l} = \frac{a}{l}\Big(\frac{l^2}{a} - x\Big)\end{aligned}\right\}\ \ldots (11).$$

Men ziet hieruit, dat, zoodra x positief of negatief grooter dan $\frac{l^2}{a}$ genomen wordt, onder de beide raaklijnen MP en NP eene positieve en eene negatieve zal voorkomen, zoodat dan eigenlijk hun *verschil* gelijk aan de standvastige $2l$ zal wezen. Wil men dus dat regtstreeks de *som* der raaklijnen gelijk aan $2l$ zij, dan zal men, voor de gevraagde meetkunstige plaats, alleen die gedeelten der gevondene kromme moe-

ten gebruiken, waarbij x positief of negatief kleiner dan $\frac{l^2}{a}$ is.

§ 4. Het is uit den aard zaak duidelijk, dat geene punten van de gevondene kromme binnen eenen der cirkels A of B kunnen liggen; maar neemt men $x = \pm \frac{l^2}{a}$, dan zullen volgens de formulen (11) de raaklijnen MP of NP, ieder op hunne beurt, gelijk nul zijn, en bij gevolg zal de kromme lijn, in de punten, welke tot deze waarden van x behooren door de cirkels worden aangeraakt.

Zoo men in de vergelijking (4) $x = \pm \frac{l^2}{a}$ stelt, zal men vinden $y = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\left\{a^2 r^2 - (l^2 - a^2)^2\right\}}$ en derhalve zijn

$$\alpha = \pm \frac{l^2}{a} \text{ en } \beta = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\left\{a^2 r^2 - (l^2 - a^2)^2\right\}} \quad ..(12)$$

de coördinaten der punten, waarin de genoemde aanraking plaats heeft.

Was nu $\qquad (l^2 - a^2)^2 > a^2 r^2,$

dan zou β onbestaanbaar zijn; uit deze ongelijkheid zal, naar gelang men onderstelt, dat

$l^2 > a^2 \quad$ of $\quad l^2 < a^2$

is, volgen $l^2 - a^2 > ar \quad$ of $\quad a^2 - l^2 > ar,$

dat is: $\quad l^2 > a^2 + ar \quad$ of $\quad l^2 < a^2 - ar;$

hieruit blijkt dus, dat, zoodra l^2 buiten de grenzen $a^2 + ar$ en $a^2 - ar$ valt, β onbestaanbaar zal worden, en dus ook de kromme lijn de cirkels niet zal kunnen raken.

Indien $l^2 = a^2 + ar$, of $l^2 = a^2 - ar$ was, zou met $\alpha = \pm \frac{l^2}{a}$ overeenstemmen $\beta = 0$, en alsdan zou de kromme lijn de cirkels A en B juist in die punten raken, waar zij de as XX' snijdt.

§ 5. Om de verschillende vormen der kromme lijn en hare plaatsing ten opzigte der cirkels A en B, voor alle mogelijke waarden van l, a en r na te gaan, zullen wij vooreerst de drie gevallen onderscheiden, waarin $a > r$, $a = r$ en $a < r$ is; dat is: de drie gevallen, waarin die cirkels van elkander afgezonderd staan, elkander raken, of elkander

snijden; en in elk dezer drie gevallen zullen wij nagaan, welke verandering de vorm en stand der kromme ondergaan, indien wij l van ∞ tot 0 laten afnemen.

§ 6. Laat vooreerst $a > r$ zijn en dus de cirkels A en B van elkander afgezonderd staan, dan hebben wij, voor de verschillende waarden van l, de volgende vormen en standen onzer kromme lijn.

1°. Voor $l = \infty$ gaat de vergelijking (3) over in $x = l$, hetwelk de vergelijking van eenen cirkel is uit O als middelpunt met eenen oneindigen straal beschreven; voor zeer groote waarden van l is dus de kromme lijn eene ellips, die ten naasten bij een cirkel is, wegens het geringe verschil van hare halve assen m en n; laat men l kleiner worden, dan wordt de verhouding $\frac{m}{n} = \frac{l}{\sqrt{(l^2 - a^2)}}$ grooter, en dus de ellips langwerpiger.

2°. Zoolang $l^2 > a^2 + ar$ blijft, is volgens (5) en (12) m bestaanbaar, n bestaanbaar, maar β onbestaanbaar; de kromme lijn is dan eene ellips, welke geheel om de cirkels heengaat, zoo als in Fig. 98. In dit geval is altijd regtstreeks de *som* der raaklijnen MP en NP gelijk aan $2l$.

3°. Is $l^2 = a^2 + ar$, dan is volgens (5) en (12) $m = a + r$, $n = \sqrt{r(a + r)}$, $\alpha = \pm(a + r)$ en $\beta = 0$; de kromme lijn is dan eene ellips, welke de cirkels met hare toppen raakt, zoo als in Fig. 99. In dit geval is ook altijd de *som* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

4°. Is $l^2 < a^2 + ar$, maar $l^2 > a^2$, dan zijn m, n, α en β alle bestaanbaar; de kromme lijn is dan eene ellips, welke de cirkels raakt, zoo als in Fig. 100. In dit geval is voor de gedeelten RR′ en rr' de *som*, maar voor de gedeelten Rr en R′r' het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

5°. Is $l^2 = a^2$, dan gaat de vergelijking (4) over in

$$y^2 = r^2 \quad \text{of} \quad y = \pm r,$$

en dus de kromme lijn in een stelsel van twee evenwijdige lijnen, welke de cirkels raken, zoo als in Fig. 101. In dit geval is voor de gedeelten RR′ en rr' weder de *som*, maar voor de overige gedeelten dier regte lijnen het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

6°. Is $l^2 < a^2$, maar $l^2 > a^2 - r^2$, dan zijn volgens

(9) en (12), m', n, α en β bestaanbaar; de kromme lijn is dan eene hyperbool, welke hare toppen op de as YY' heeft en de cirkels aanraakt, zoo als in Fig. 102. In dit geval is weder voor de gedeelten RR' en rr' de *som*, maar voor de overige gedeelten der hyperbool het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

7°. Is $l^2 = a^2 - r^2$, dan gaat de vergelijking (4) over in

$$l^2 y^2 - r^2 x^2 = 0, \text{ of } y = \pm \frac{r}{l} x,$$

en dus de kromme lijn in een stelsel van twee, elkander in den oorsprong snijdende, regte lijnen, welke de cirkels aanraken, zoo als in Fig. 103. In dit geval is voor de gedeelten Rr' en $R'r$ de *som*, maar voor de overige gedeelten dier regte lijnen het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

8°. Is $l^2 < a^2 - r^2$, maar $l^2 > a^2 - ar$, (zijnde, omdat $a > r$ is ook $a^2 - r^2 > a^2 - ar$), dan zijn, volgens (7) en (12), m, n', α en β bestaanbaar; de kromme lijn is dan eene hyperbool, welke de toppen op de as XX' heeft en de cirkels aanraakt, zoo als in Fig. 104. In dit geval is voor de gedeelten Rr en $R'r'$ de *som*, maar voor de overige gedeelten der hyperbool het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

9°. Is $l^2 = a^2 - ar$, dan is volgens (7) en (12) $m = a - r$, $n' = \sqrt{r(a-r)}$, $\alpha = \pm(a-r)$ en $\beta = 0$; de kromme lijn is dan eene hyperbool, welke de cirkels aanraakt met hare op de as XX' gelegene toppen, zoo als in Fig. 105. In dit geval is altijd het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

10°. Is $l < a^2 - ar$, dan is, volgens (7) en (12), m bestaanbaar, n' bestaanbaar, maar β onbestaanbaar; de kromme lijn is dan eene hyperbool, welke de cirkels niet meer raakt en de toppen op XX' heeft, zoo als in Fig. 106. In dit geval is ook altijd het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$.

11°. Is $l = 0$, dan gaat de vergelijking (4) over in $x = 0$ en dus de kromme lijn in de enkele as YY'. In dit geval is klaarblijkelijk altijd het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l = 0$.

Men ziet dus, dat $a > r$ zijnde, terwijl l van ∞ tot 0 afneemt, de gevondene meetkunstige plaats aanvankelijk verandert van eenen cirkel, met eenen oneindigen straal, in eene

ellips, die eerst om de cirkels heengaat, langwerpiger wordt en vervolgens de cirkels gaat raken; dat deze ellips, na in een stelsel van twee evenwijdige lijnen te zijn overgegaan, in eene hyperbool, wier toppen op YY′ liggen, verandert; dat deze hyperbool, na in een stelsel van twee elkander snijdende regte lijnen te zijn overgaan, verandert in eene hyperbool wier toppen op XX′ liggen, terwijl nog altijd de aanraking met de cirkels is blijven bestaan; dat verder deze aanraking ook weder gaat ophouden en eindelijk de laatste hyperbool in de as YY′ overgaat.

§ 7. Laat in de tweede plaats $a = r$ zijn, dat wil zeggen, laten de cirkels A en B elkander raken, dan gaat de vergelijking (4) over in

$$(l^2 - a^2)\, x^2 + l^2\, y^2 = l^4;$$

en voor de coördinaten van de punten, waarin de kromme lijn de cirkels raakt, hebben wij dan volgens (12)

$$\alpha = \pm \frac{l^2}{a} \quad \text{en} \quad \beta = \pm \frac{l}{a} \sqrt{(2a^2 - l^2)}.$$

Uit deze vergelijkingen blijkt, dat de kromme lijn eene ellips of eene hyperbool zal wezen, naar gelang $l^2 > a^2$, of $l^2 < a^2$ is; en dat deze hyperbool altijd hare toppen op de as YY′ zal hebben; gelijk mede dat de aanraking der kromme lijn met de cirkels al of niet plaats zal hebben naar gelang $l^2 < 2a^2$, of $l^2 > 2a^2$ is. Als nu hebben wij dus de volgende gevallen:

1°. Voor $l = \infty$, is de kromme lijn een cirkel, met eenen oneindig grooten straal beschreven.

2°. Voor $l^2 > 2a^2$, is de kromme lijn eene ellips, welke om de cirkels heengaat, zonder dezelve te raken.

3°. Voor $l^2 = 2a^2$, is de kromme lijn eene ellips, welke de cirkels met hare toppen aanraakt.

4°. Voor $l^2 < 2a^2$ en $l^2 > a^2$, is de kromme lijn eene ellips, welke elk der cirkels in twee punten raakt.

5°. Voor $l^2 = a^2$, gaat de kromme lijn over in een stelsel van twee evenwijdige lijnen, tot vergelijking hebbende $y = \pm a$, of $y = \pm r$.

6°. Voor $l^2 < a^2$, is de kromme lijn eene hyperbool, welke hare toppen op YY, heeft en elk der cirkels in twee punten raakt.

7°. Voor $l = 0$, gaat de kromme lijn over in de as YY'. Men heeft dus hier aanvankelijk dezelfde gevallen als in § 6; maar hier gaat de hyperbool, welker toppen op YY' liggen, onmiddellijk in de as YY' over, zonder eerst, zoo als in § 6. het geval was, in eene hyperbool veranderd te zijn, welke de toppen op XX' heeft; en ook zonder dat die aanraking van de kromme lijn met de cirkels heeft opgehouden.

§ 8. Laat in de derde plaats $a < r$ zijn, dat wil zeggen, laten de cirkels A en B elkander snijden, dan hebben wij:

1°. Voor $l = \infty$
2°. Voor $l^2 > a^2 + ar$
3°. Voor $l^2 = a^2 + ar$
4°. Voor $l^2 < a^2 + ar$ en $l^2 > a^2$
5°. Voor $l^2 = a^2$

} dezelfde gevallen als in § 6. en § 7.

6°. Zoodra voorts $l^2 < a^2$ is, blijven nu, omdat $r > a$ is, volgens (9) m' en n altijd bestaanbaar; β blijft nu mede altijd bestaanbaar, waarvan men zich overtuigt, door de formule (12) in de gedaante $\beta = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\left\{a^2 (r^2 - a^2) + l^2(2a^2 - l^2)\right\}}$ te schrijven; de kromme lijn is dus nu, even als in de gevallen 6°. der vorige §§, eene hyperbool, wier toppen op de as YY' liggen en die elk der cirkels in twee punten raakt en zal zulks blijven, hoe klein ook l worde; tot dat eindelijk

7°. Voor $l = 0$, die hyperbool in de as YY' overgaat.

Hier ondergaat de kromme lijn dus dezelfde veranderingen als in § 7; alleenlijk zal in het geval van $l = 0$, voor $a = r$, de geheele as YY' (Fig. 107) de begeerde meetkunstige plaats zijn; terwijl voor $a < r$ het gedeelte van de as YY', dat binnen de cirkels ligt (Fig. 108), niet mede tot die meetkunstige plaats behoort. Zulks stemt daarmede overeen, dat voor $l = 0$ en $a = r$, volgens (9), de eerste as der hyperbool $2n = 0$ wordt, terwijl die as, voor $l = 0$ en $a < r$, $2n = 2\sqrt{(r^2 - a^2)}$ is; zijnde dit juist de lengte van het gedeelte van YY' dat in Fig. 108 binnen de cirkels ligt.

Om herhalingen en omslag te vermijden, hebben wij overigens, voor de gevallen van § 7 en § 8, geene afzonderlijke

figuren gegeven, en evenmin aangeduid, of in die gevallen de *som* of het *verschil* der raaklijnen gelijk aan $2l$ is. Men zal, hetgeen hieromtrent in § 6 gezegd is, gemakkelijk op de gevallen van § 7 en § 8 kunnen toepassen.

§ 9. Neemt men eindelijk $a = 0$, dat wil zeggen, laat men de beide cirkels elkander volkomen bedekken, zooda er dan eigenlijk slechts een cirkel is, waaraan de beide raaklijnen getrokken moeten worden, dan verandert de vergelijking (3) in $s = \sqrt{(l^2 - r^2)}$; in dit geval is dus de gevraagde meetkunstige plaats een cirkel, zoo als in Fig. 109, uit O als middelpunt middelpunt met $\sqrt{(l^2 - r^2)}$ als straal beschreven. De raaklijnen MP en NP zijn hier volgens de formulen (11), aan elkander gelijk, zoodat $MP = PN = l$, en $OP = \sqrt{(l^2 - r^2)}$ is.

§ 10. Neemt men nog $r = 0$, dat is, laat men de cirkels in de eenvoudige punten A en B overgaan, dan ziet men dadelijk, dat de gevraagde meetkunstige plaats eene ellips of hyperbool moet wezen, naar gelang de *som* of het *verschil* der raaklijnen standvastig gelijk aan $2l$ is, en waarvan A en B de brandpunten zijn; voor $r = 0$ gaat dan ook de vergelijking (4) over in

$$(l^2 - a^2)\, x^2 + l^2\, y^2 = l^2\, (l^2 - a);$$

zoo lang $l > a$ is, behoort deze vergelijking tot eene ellips, waarvan l en $\sqrt{(l^2 - a^2)}$ de halve assen zijn en waarvan dus a de excentriciteit is; maar is $l < a$, dan behoort dezelve tot eene hyperbool, welke tot halve assen l en $\sqrt{(a^2 - l^2)}$ heeft en bij welke de excentriciteit dus wederom a is.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door A. C. BELINFANTE.

Men begeert twee vierkante getallen te vinden, welke aan de volgende voorwaarden voldoen: 1°. *de som hunner wortels is een pronik en de pronikwortel hiervan is de kleinste term eener rekenkunstige reeks, waarvan de beide andere termen de vierkantswortels zijn der begeerde getallen;* en 2°. *het product dezer beide wortels, met eene eenheid verhoogd zijnde, geeft weder een vierkant, waarvan de wortel het rekenkunstige midden is tusschen de wortels der gevraagde vierkanten?*

Opgelost *door* M. G. Snoer, J. Acquoy, Bas Backer, A. C Belinfante, S. T. Boas, W. G. van Delden, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, J. C. de Leeuw, L. Lieuwes, E. Olivier, Dz., J. R. T. Ortt, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, J. Sjoernis, J. S. Sebijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* M. G. Snoer.

Laten $x + y$ en $x + 2y$ de wortels der gevraagde vierkanten voorstellen, dan moet de in het voorstel genoemde pronikwortel de kleinste term eener rekenkunstige reeks zijn, waarvan $x + y$ en $x + 2y$ de andere termen zijn; deze pronikwortel is bij gevolg x en derhalve de pronik $x^2 + x$.

Volgens de eerste voorwaarde, heeft men dan verder

$$(x + y) + (x + 2y) = x^2 + x$$

of

$$x^2 - x = 3y;$$

en, volgens de tweede voorwaarde,

$$\sqrt{\{(x + y)(x + 2y) + 1\}} = \tfrac{1}{2}\{(x + y) + (x + 2y)\},$$

of $2\sqrt{\{(x + y)(x + 2y) + 1\}} = 2x + 3y.$

De laatste vergelijking in het vierkant brengende, vindt men dadelijk, na verplaatsing der termen,

$$y^2 = 4, \quad \text{of} \quad y = \pm 2;$$

alleen de positieve waarde van y kan hier gelden, omdat het voorstel eischt, dat de pronikwortel de kleinste term der rekenkunstige reeks zij.

Substituerende derhalve $y = 2$, in de bovenstaande vergelijking $x^2 - x = 3y$, zoo vinden wij

$$x^2 - x = 6,$$

waaruit volgt $x = 3$, of $x = -2$,

van welke waarden voor x weder alleen de *positieve* bruikbaar is, omdat voor $x = -2$, daar $y = 2$ is, $x + y = 0$ en dus geen eigenlijk getal zou worden.

De wortels der gevraagde vierkante getallen zijn alzoo:

$$x + y = 5 \quad \text{en} \quad x + 2y = 7,$$

weshalve die getallen zelve 25 en 49 zijn.

CLXXXVII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Het jaartal, naar de gewone tijdrekening, van zekeren bijzonder belangrijken veldslag, wordt op de volgende wijze bepaald: de som van de vier cijfers, waaronder ge-

ne zullen voórkomen, is gelijk aan driemaal het cijfer der eenheden; de som der beide middelste cijfers, waarvan dat der honderdtallen het grootste is, is een vierkant, waarvan de wortel het rekenkunstige midden is tusschen de beide uiterste cijfers; en eindelijk is het product der beide middelste cijfers eene derde magt, welke wortel gelijk is aan het halve verschil der beide uiterste cijfers. Welke is de bedoelde veldslag?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, D. VAN LANKEREN MATTHES, A. C. BELINFANTE, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, J. C. DE LEEUW, L. LIEUWES, E. OLIVIER, Dz., L. R. T. ORTT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, J. SIOENIS, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* A. VOS.

I. OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Daar het bedoelde jaargetal tot de gewone tijdrekening behoort en uit vier cijfers bestaat, moet het cijfer der duizendtallen 1 zijn; zij nu x het cijfer der eenheden, dan is, volgens de eerste bepaling, de som der beide middelste cijfers $2x - 1$; volgens de tweede bepaling is dus

$$\sqrt{(2x - 1)} = \tfrac{1}{2} (x + 1).$$

Deze vergelijking in het vierkant brengende, vindt men

$$2x - 1 = \tfrac{1}{4} (x^2 + 2x + 1)$$

of $\quad 8x - 4 = x^2 + 2x + 1$

of $\quad x - 6x + 5 = 0,$

waaruit volgt $\quad x = 5$, of $x = 1$.

De waarde $x = 1$ verwerpende, omdat daardoor de som der middelste cijfers $2x - 1 = 1$, en dus één dier cijfers, strijdig met het voorstel, nul zou zijn, zoo heeft men voor de som der middelste cijfers $2x - 1 = 9$; terwijl volgens de laatste bepaling het product dier middelste cijfers 8 is.

Stelt men dan het cijfer der honderdtallen door $4\tfrac{1}{2} + y$ en dus dat der tientallen door $4\tfrac{1}{2} - y$ voor, dan heeft de vergelijking

$$(4\tfrac{1}{2} + y)(4\tfrac{1}{2} - y) = 8$$

of $\quad 20\tfrac{1}{4} - y^2 = 8$

of $\quad y^2 = 12\tfrac{1}{4},$

waaruit volgt $\quad y = \pm 3\tfrac{1}{2}.$

De negatieve waarde van y weder verwerpende, omdat daardoor, strijdig met de opgaaf, het cijfer der tientallen

grooter dan dat der hondertallen zou zijn, zoo heeft men voor het cijfer der honderdtallen $4\frac{1}{2} + y = 8$
en voor het cijfer der tientallen, $4\frac{1}{2} - y = 1$.

Het jaartal is alzoo 1815 en de bedoelde veldslag die van WATERLOO.

II. OPLOSSING *van* D. VAN LANKEREN MATTHES.

Daar onder de cijfers van het gevraagde jaargetal geene nullen voorkomen en de middelste cijfers ongelijk zijn, kan het product der middelste cijfers niet kleiner dan $1 \times 2 = 2$ en niet grooter dan $8 \times 9 = 72$ zijn; daar dit product, volgens de laatste voorwaarde, eene derde magt moet zijn, kan het dus slechts 8, 27 of 64 zijn; daar verder het getal 8 op twee verschillende wijzen, 27 slechts op eene wijze en 64 in 't geheel niet in twee ongelijke factoren, elk kleiner dan 9, kan ontbonden worden, kunnen de middelste cijfers geene andere zijn dan

1 en 8, 2 en 4, of 3 en 9.

Maar, volgens de tweede voorwaarde, moet de som der middelste cijfers een vierkant zijn, derhalve kunnen deze cijfers geene andere zijn dan 1 en 8; het cijfer der honderdtallen het grootste van deze beide moetende zijn, is dus 8 en het cijfer der tientallen 1.

Verder is nu, volgens de laatste voorwaarde, het halve verschil der uiterste cijfers $\sqrt[3]{8} = 2$; en, volgens de tweede voorwaarde, het rekenkunstige midden, of de halve som der uiterste cijfers $\sqrt{9} = 3$; die uiterste cijfers zijn bij gevolg 1 en 5.

De som der vier cijfers is nu $1 + 8 + 1 + 5 = 15$, alzoo is volgens de eerste voorwaarde het cijfer der eenheden 5, het cijfer der duizendtallen is dus het andere der beide uiterste cijfers, namelijk 1.

Het gevraagde jaargetal is derhalve 1815.

AANMERKING. Bij deze oplossing is geen gebruik gemaakt van de omstandigheid, dat het jaargetal tot de tegenwoordige tijdrekening behoort en dus het cijfer der duizendtallen 1 is. Had men deze omstandigheid willen gebruiken, zoo zoude men de eerste voorwaarde des voorstels hebben kunnen ontberen.

CLXXXVIII. Voorstel.

Door A. C. Belinfante.

Men begeert eene meetkunstige reeks van drie termen te vinden, waarvan gegeven is: dat de middelste term zich verhoudt tot de som der beide uiterste als 2 tot 5; en dat wanneer men de beide eerste termen elk met eene éénheid verhoogt en de laatste met 15 vermindert, en drie vierkanten komen, welker wortels eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* A. C. Belinfante, J. Acquoy, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, A. Vos, S. T. Boas, W. G. van Delden, C. F. Julius, L. van de Kasteele, J. C. de Leeuw, L. Lieuwes, J. R. T. Ortt, C. van Schaick, J. Sjoernis, M. G. Snoek *en* J. S. Speijer.

Oplossing *van* A. C. Belinfante.

Laat de meetkunstige reeks voorgesteld worden door

$$x, \quad xy \quad \text{en} \quad xy^2,$$

dan heeft men vooreerst

$$xy : x + xy^2 = 2 : 5$$

of $$y : 1 + y^2 = 2 : 5,$$

dus is $$5y = 2 + 2y^2$$

of $$y^2 - \frac{5}{2}y = -1,$$

waaruit volgt $$y = 2, \text{ of } y = \frac{1}{2}.$$

Ten andere moet men hebben

$$2\sqrt{(xy+1)} = \sqrt{(x+1)} + \sqrt{(xy^2-15)};$$

hierin de eerste waarde van y overbrengende, komt er

$$2\sqrt{(2x+1)} = \sqrt{(x+1)} + \sqrt{(4x-15)},$$

waaruit achtervolgens volgt

$$8x + 4 = x + 1 + 4x - 15 + 2\sqrt{(x+1)(4x-15)},$$

$$3x + 18 = 2\sqrt{(x+1)(4x-15)};$$

$$9x^2 + 108x + 324 = 16x^2 - 44x - 60,$$

$$7x^2 - 152x = 384,$$

$$x^2 - \frac{152}{7}x = \frac{384}{7}$$

en $$x = 24, \text{ of } x = -2\frac{2}{7};$$

welke waarden van x, met $y = 2$ in verband gebragt, voor de gevraagde reeks geven:

$$24\ ,\quad 48 \quad \text{en} \quad 96 \ldots\ldots\ (1)$$

of $$-2\frac{2}{7},\quad -4\frac{4}{7} \quad \text{en} \quad -9\frac{1}{7} \ldots\ldots\ (2).$$

De tweede waarde van y overbrengende in de vergelijking

$$2\sqrt{(xy+1)} = \sqrt{(x+1)} + \sqrt{(xy^2-15)},$$

komt er $2\sqrt{(\frac{1}{2}x+1)} = \sqrt{(x+1)} + \sqrt{(\frac{1}{4}x-15)}$, waaruit achtervolgens volgt

$$2x+4 = x+1+\tfrac{1}{4}x-15+2\sqrt{(x+1)(\tfrac{1}{4}x-15)},$$

$$\frac{3}{4}x+18 = 2\sqrt{(x+1)(\tfrac{1}{4}x-15)},$$

$$\frac{9}{16}x^2+27x+324 = x^2-59x-60,$$

$$\frac{7}{16}x^2-86x = 384,$$

$$7x^2-1376x = 6144,$$

$$x^2-\frac{1376}{7}x = \frac{6144}{7}$$

en $$x = \frac{688 \pm 16\sqrt{2017}}{7},$$

welke waarden van x, met $y = \frac{1}{2}$ in verband gebragt, voor de gevraagde reeks geven:

$$\frac{688+16\sqrt{2017}}{7},\ \frac{344+8\sqrt{2017}}{7} \text{ en } \frac{172+4\sqrt{2017}}{7}\ (3),$$

of $$\frac{688-16\sqrt{2017}}{7},\ \frac{344-8\sqrt{2017}}{7} \text{ en } \frac{172-4\sqrt{2017}}{7}\ (4);$$

AANMERKING *van* J. ACQUOY. Van de vier gevondene antwoorden, voldoen eigenlijk slechts (1) en (3) aan het voorstel, want de termen der gevondene reeksen (2) en (4) *negatief* grooter dan 1 zijnde, worden de vierkantswortels, welke eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, onbestaanbaar. Men zie over de oorzaak van dit verschijnsel. J. DE GELDER. *Beg. der Stelkunst.* 1e. Druk. § 517.

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Een pronikgetal en een trigonaalgetal te vinden, waarvan het product gelijk is aan het product hunner wortels?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, S. T. BOAS,

C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Sjoenis, M. G. Snorr, A. Vos, en J. R. T. Ortt.

Oplossing van J. S. Speijer.

Laat het pronikgetal door $x^2 + x$ en het trigonaalgetal door $\frac{1}{2}(y^2 + y)$ voorgesteld worden, dan zijn de wortels x en y en derhalve moet

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + x)\ (y^2 + y) = xy \ldots\ldots \quad (A)$$

zijn; daar, in den eigelijken zin des voorstels, x of y geen van beide gelijk nul kunnen zijn, deelen wij deze vergelijking door $\frac{1}{2}xy$, dan komt er

$$(x + 1)\ (y + 1) = 2$$

of

$$xy + x + y = 1,$$

waaruit volgt

$$x = \frac{1 - y}{1 + y}.$$

Indien men nu voor x en y positieve waarden wil hebben, dan is het klaar dat zij beide gebrokens moeten zijn. Voor $y = \frac{1}{2}$, is $x = \frac{1}{3}$, en dan is het begeerde pronikgetal $\frac{4}{9}$ en het driehoekig getal $\frac{3}{8}$.

Wil men echter negatieve waarden voor x en y toelaten, dan kan men het antwoord in geheele getallen bekomen. Voor $y = -2$, is $x = -3$, waardoor men voor de begeerde pronik 6 en voor het driehoekig getal 1 vindt.

Aanmerking. Dewijl de vergelijking (A) niet verandert, indien men x en y met elkander verwisselt, is het onverschillig welke der gevondene waarden voor x en y men als wortels van elk der gevraagde getallen wil aannemen; door de boven gevondene wortels met elkander te verwisselen, verkrijgt men nog: voor den pronik $\frac{3}{4}$ en voor het driehoekig getal $\frac{2}{9}$; alsmede voor den pronik 2 en voor het driehoekig getal 3.

CXC. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Welke twee ongelijke grootheden hebben de eigenschap, dat, van elke n^{de} magt elke $(n - 1)^{de}$ magt afgetrokken wordende, de resten gelijk zijn? En welke hebben de

eigenschap, dat bij optelling dezer magten de sommen gelijk zijn?

Opgelost door C. F. Julius, J. Acquoy, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, M. G. Snoer, A. Vos en W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing van C. F. Julius.

Stellen wij de gevraagde grootheden door x en px voor, dan moet, wanneer wij de beide voorwaarden des voorstels door eene enkele vergelijking uitdrukken,

$$x^n \mp x^{n-1} = (px)^n \mp (px)^{n-1}$$

zijn; behoorende nu de bovenste teekens dezer vergelijking tot de eerste en de benedenste teekens tot de tweede voorwaarde.

Deze vergelijking, daar x^{n-1} niet gelijk nul zijn kan, door x^{n-1} deelende, komt er

$$x \mp 1 = p^n x \mp p^{n-1},$$

en hieruit vinden wij terstond:

voor het 1ste geval, $x = \frac{p^{n-1} - 1}{p^n - 1}$ en $px = \frac{p^n - p}{p^n - 1}$

en voor het 2de geval, $x = -\frac{p^{n-1} - 1}{p^n - 1}$ en $px = -\frac{p^n - p}{p^n - 1}$.

Alle grootheden dus, welke door deze vormen worden voorgesteld, hebben de in het voorstel opgenoemde eigenschap, welke waarden men ook aan p mogt willen toekennen; alleenlijk mag men niet $p = 1$ nemen, daar alsdan de voorwaarde, dat de gevraagde grootheden ongelijk moeten zijn, onvervuld zoude blijven.

CXCI. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert eene algemeene uitdrukking, voor de minima der veelhoekige getallen, te vinden?

Opgelost door S. T. Boas, J. Acquoy, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, A. Vos en B. Lubbers.

Oplossing van S. T. Boas.

De algemeene formule voor de veelhoekige getallen is

$$y = \frac{(n-2)\,x^2 - (n-4)\,x}{2};$$

voor de differentiaalquotienten van y, ten opzigte van x; vinden wij hieruit

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2(n-2)x-(n-4)}{2}$$

en $$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = n-2;$$

stellen wij nu $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$, dan komt er

$$2(n-2)x = n-4$$

en dus $$x = \frac{n-4}{2(n-2)}$$

Daar, bij de veelhoekige getallen, n altijd grooter dan 2 is, is $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$, onafhankelijk van x, altijd *positief;* de bovenstaande waarde voor x maakt dus y tot een minimum, en voor de waarde van dit minimum vinden wij, door $x = \frac{n-4}{2(n-2)}$ in $y = \frac{(n-2)x^2-(n-4)x}{2}$ te substitueren, na behoorlijke herleiding,

$$y = -\frac{(n-4)^2}{8(n-2)}$$

en deze is nu de verlangde algemeene uitdrukking.

Voor $n = 3$, wordt $y = -\frac{1}{8}$; derhalve is $-\frac{1}{8}$ het kleinste onder alle driehoekige getallen, of ook het grootste onder alle *negatieve* driehoekige getallen.

Voor $n = 4$, wordt $y = 0$; derhalve is 0 het kleinste onder alle vierhoekige getallen; dat wil zeggen: er zijn geene *negatieve* vierhoekige getallen.

Voor alle andere waarden van n, wordt y *negatief;* onder de veelhoekige getallen, zijn het dus alleen de *vier*-hoekige die geene *negatieve* waarden kunnen hebben. Doch bij allen is, voor de *negatieve* waarden, die zij hebben kunnen, de grens $\frac{(n-4)^2}{8(n-2)}$ aanwezig.

CXCII. Voorstel.

Door H. A. Hartogh.

Van twee getallen is de som der vierkanten $7\frac{4}{5}$ *maal de som der getallen, en het vierkant van de som der getallen*

is 216 meer dan het vierkant van hun verschil. Welke zijn die getallen?

OPGELOST *door* H. A. HARTOGH, J. ACQUOY, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. C. DE LEEUW, L. LIEUWES, E. OLIVIER, Dz., J. R. T. ORTT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER, A. VOS *en* J. SJOENIS.

OPLOSSING *van* H. A. HARTOGH.

Laat het grootste der begeerde getallen door x en het kleinste door y worden voorgesteld, dan heeft men, volgens het voorstel, de vergelijkingen

$$x^2+y^2=7\frac{4}{5}(x+y) \ldots\ldots\ldots (1)$$

en

$$(x+y)^2-(x-y)^2=216 \ldots\ldots (2).$$

De vergelijking (2) ontwikkelende, vindt men terstond

$$4xy=216 \ldots\ldots\ldots (2)$$

of

$$2xy=108 \ldots\ldots\ldots (4);$$

de som van de vergelijkingen (1) en (4) geeft

$$(x+y)^2=7\frac{4}{5}(x+y)+108$$

of

$$(x+y)^2-\frac{39}{5}(x+y)=108;$$

en deze vergelijking als eene vierkantsvergelijking, ten opzigte van $x+y$ oplossende, vindt men

$$x+y=15 \quad \text{of} \quad x+y=-\frac{36}{5},$$

dat is: $(x+y)^2=225$ of $(x+y)^2=\frac{1296}{25}$;

trekt men hier nu de vergelijking (3) af, dan komt er

$$(x-y)^2=9 \quad \text{of} \quad (x-y)^2=-\frac{4104}{25}.$$

Daar de laatste waarde van $(x-y)^2$ negatief is, en dus voor $x-y$ slechts onbestaanbare waarden zou geven, gebruiken wij alleen de eerste; waaruit, omdat wij het grootste getal door x voorgesteld hebben en dus $x-y$ positief moet zijn, alleen volgt

$$x-y=3;$$

dewijl nu hiermede $x+y=15$ overeenkomt, hebben wij door de halve som en het halve

verschil dezer waarden van $x + y$ en $x - y$ te nemen

$$x = 9 \quad \text{en} \quad y = 6,$$

hetwelk alzoo de verlangde getallen zijn.

CXCIII. VOORSTEL,

Door H. KLOOS.

Eene breuk $\frac{16[redacted]}{[redacted]28}$ *verandert, door dezelve zoo veel mogelijk te verkleinen, in* $\frac{[redacted]1}{[redacted]9}$; *als nu de overdekte cijfers van de tellers der beide breuken viermaal die der noemers in zich bevatten, en de som van de overdekte cijfers der eerste breuk, het dubbel is van de som der overdekte cijfers van de tweede breuk, wil men hieruit deze breuken vinden?*

OPGELOST *door* H. KLOOS, J. ACQUOY, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. C. DE LEEUW, L. LIEUWES, J. R. T. ORTT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, C. VAN SCHAICK, J. SJOERDS, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER *en* A. VOS.

I. OPLOSSING *van* H. KLOOS.

Laat het overdekte cijfer in den noemer der eerste breuk door x, en dat in den noemer der tweede breuk door y worden voorgesteld, dan zijn, volgens de eerste der gegevene voorwaarden, $4x$ en $4y$ respectievelijk de overdekte cijfers in de tellers dier breuken voorkomende; deze breuken worden alsdan voorgesteld door

$$\frac{160 + 4x}{100x + 28} \quad \text{en} \quad \frac{10 + 4y}{10y + 9}$$

en, daar zij onderling gelijk zijn, heeft men

$$\frac{160 + 4x}{100x + 28} = \frac{10 + 4y}{10y + 9}.$$

Volgens de tweede voorwaarde, heeft men verder

$$4x + x = 2\,(4y + y),$$

waaruit terstond volgt $y = \frac{1}{2}x$.

Deze waarde van y in de eerste vergelijking overbrengende, komt er

$$\frac{160 + 4x}{100x + 28} = \frac{10 + 2x}{5x + 9},$$

dat is: $$\frac{40 + x}{25x + 7} = \frac{10 + 2x}{5x + 9}$$

of $(5x + 9)(x + 40) = (25x + 7)(2x + 10)$,
waaruit door ontwikkeling gevonden wordt

$$45x^2 + 55x = 290$$

of

$$x^2 + \frac{11}{9}x = \frac{58}{9}.$$

Deze vierkants-vergelijking oplossende, verkrijgt men

$$x = 2 \quad \text{of} \quad x = -3\frac{2}{9},$$

waarvan alleen de eerste waarde voor x bruikbaar is, terwijl alsdan $y = \frac{1}{2}x = 1$ wordt. De bedoelde breuken zijn dus:

$$\frac{160 + 4x}{100x + 28} = \frac{168}{228} \quad \text{en} \quad \frac{10 + 4y}{10y + 9} = \frac{14}{19}.$$

II. Oplossing *van* J. Acquoy.

Daar de overdekte cijfers van de tellers der beide breuken 4 maal die der noemers in zich bevatten, en deze cijfers alle geheele getallen kleiner dan 10 moeten zijn, zoo kunnen de overdekte cijfers der tellers niet anders dan 4 of 8, en die der noemers niet anders dan 1 of 2 zijn; de onverkleinde breuk kan dus niet anders zijn dan $\frac{164}{128}$ of $\frac{168}{228}$, en de verkleinde niet anders dan $\frac{14}{19}$ of $\frac{18}{29}$; daar voorts de verkleinde breuk aan de onverkleinde gelijk moet zijn, zoo kunnen de gevraagde breuken niet anders wezen dan $\frac{168}{228}$ en $\frac{14}{19}$, welke tevens aan de laatste bepaling van de opgaaf voldoen.

CXCIV. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Eene zekere derde magt is te gelijker tijd het minimum van twee onderscheidene soorten van veelhoekige getallen; welke soorten van veelhoekige getallen kunnen dit zijn?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Acquoy, S. Dik, Cornsz., C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

De algemeene uitdrukking voor de minima der veelhoekige getallen is, volgens het CXCI. Voorstel, $-\frac{(m-4)^2}{8(m-2)}$.
Stelt men nu $\frac{(m-4)^2}{m-2} = 1$, dan is deze uitdrukking eene

derde magt, terwijl men dan m zal moeten vinden, door de oplossing der vergelijking

$$\frac{(m-4)^2}{(m-2)} = 1.$$

Deze vergelijking van den tweeden graad zijnde, zal men ook twee waarden voor m vinden; men heeft namelijk achtervolgens

$$(m-4)^2 = m-2,$$
$$m^2 - 8m + 16 = m - 2,$$
$$m^2 - 9m + 18 = 0$$

of $$(m-3)(m-6) = 0,$$

waaruit volgt $m = 3$ en $m = 6$.

De gevraagde soorten van veelhoekige getallen kunnen dus *drie-* en *zes*-hoekige getallen zijn; van beide is het minimum $-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

Om tevens aan te toonen, dat geene twee andere soorten van veelhoekige getallen te gelijker tijd eene zelfde derde magt tot minimum kunnen hebben, schrijven wij de bovenstaande uitdrukking, voor de minima der veelhoekige getallen, in de gedaante

$$-\frac{(m-4)^3}{8(m-2)(m-4)},$$

dan blijkt terstond, dat zij geene derde magt kan zijn, ten zij $(m-2)(m-4)$ eene derde magt is. Stellen wij dus

$$(m-2)(m-4) = n^3,$$

dan is $$m^2 - 6m + 8 = n^3,$$
$$m^2 - 6m + 9 = n^3 + 1$$

en $$(m-3)^2 = n^3 + 1,$$

voor n zal dus zulk een geheel getal moeten genomen worden, dat $n^3 + 1$ een vierkant wordt. Er zijn echter (zie Euler, *Algebra*, 2e Deel, § 121) slechts drie waarden van n, welke hier aan voldoen kunnen; namelijk $n = 2$, $n = 0$ en $n = -1$; met deze waarden van n komt overeen $m = 6$, $m = 4$ en $m = 3$; derhalve kunnen, behalve de *drie-* en *zes* hoekige getallen, slechts de *vier*-hoekige eene derde magt tot minimum hebben; dit minimum is dan ook bij de vierhoekige getallen nul en dus eene derde magt, maar geene andere veelhoekige getallen hebben dit zelfde

minimum; bijgevolg kunnen alleen de *drie-* en *zes-*hoekige getallen aan het voorstel beantwoorden.

CXCV. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Van eene opklimmende rekenkunstige reeks van zes termen, zijn de eerste en derde termen twee op elkander volgende centrale trigonaalgetallen, welker verschil zoo veel is als het aantal zijden van twee andere op elkander volgende centrale polygonaalgetallen, die de tweede en zesde termen der genoemde reeks uitmaken. Welke is deze reeks?

OPGELOST *door* M. G. S[illegible], J. ACQUOY, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNSZ., [illegible], JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER [illegible] VOS.

OPLOSSING *van* M. [illegible] SNOEK.

Elk centraal polygonaalgetal, waarvan het aantal zijden p en de wortel q is, wordt voorgesteld door de uitdrukking (*).

$$p\,\frac{q(q-1)}{2}+1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (A).$$

Stelt men in deze uitdrukking $p=3$ en achtervolgens $q=n$, $q=n+1$, dan verkrijgt men twee op elkander volgende centrale trigonaalgetallen, die de eerste en derde termen der begeerde reeks zijn; dus heeft men voor

den *eersten term* . . . $3\,\frac{n(n-1)}{2}+1=\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n+1$

en voor den *derden term* $\frac{3(n+1)n}{2}+1=\frac{3}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$;

het verschil van deze beide getallen is $3n$; dit verschil is het aantal zijden van de beide andere in het voorstel genoemde centrale polygonaalgetallen; stelt men dus, in de uitdrukking (A), $p=3n$ en achtervolgens $q=m$, $q=m+1$, dan verkrijgt men de twee op elkander volgende centrale polygonaalgetallen, welke de tweede en zesde termen der reeks zijn; dus heeft men:

voor den *tweeden term* . . . $3n\frac{m(m-1)}{2}+1=\frac{3}{2}nm(m-1)+1$

en voor den *zesden term* . $3n\frac{(m+1)m}{2}+1=\frac{3}{2}nm(m+1)+1$.

(*) Zie J. DE GELDER, *Wisk. Lessen*, 2de Cursus, bladz. 330 in de noot.

Het verschil der gevraagde rekenkunstige reeks is gelijk aan de helft van het verschil der eerste en derde termen; het verschil der reeks is dus $\frac{3}{2}n$; door dit verschil en deszelfs vijfvoud bij den eersten term op te tellen, verkrijgt men ook:

voor den *tweeden term* $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 + \frac{3}{2}n = \frac{3}{2}n^2 + 1$

en voor den *zesden term* $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 + \frac{15}{2}n = \frac{3}{2}n^2 + 6n + 1$;

bijgevolg heeft men de vergelijkingen

$$\frac{3}{2}nm(m-1) + 1 = \frac{3}{2}n^2 + 1$$

en $$\frac{3}{2}nm(m+1) + 1 = \frac{3}{2}n^2 + 6n + 1,$$

die dadelijk vereenvoudigd kunnen worden tot

$$m^2 - m = n \quad \text{en} \quad m^2 + m = n + 4.$$

Trekt men deze vergelijkingen van elkander af, dan vindt men terstond $2m = 4$ en dus $m = 2$; en deze waarde van m in eene dezer vergelijkingen substituerende, vindt men onmiddellijk $n = 2$.

De eerste term der reeks is dus... $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 1 = 4$

en het verschil derzelve . . . . $\frac{3}{2}n = 3$,

zoodat men voor de gevraagde reeks heeft:

4, 7, 10, 13, 16 en 19.

CXCVI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Een gegeven vierkant door regte lijnen in vijf gelijke deelen te verdeelen, zoodanig: dat een der deelen wederom een vierkant zij; en dat de vier overige deelen derwijze aan elkander gevoegd kunnen worden, dat zij te zamen almede een vierkant opleveren?

Opgelost *door* S. Dik, Cornsz., J. Acquoy, Bas Backer, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoek, J. S. Speijer, A. Vos, J. Sjoenis *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing van S. Dik, Cornsz.

Van een willekeurig vierkant PQRS (Fig. 110), deele men de zijden PQ, QR, RS en SP alle in drie gelijke deelen, in de punten A, *a*, B, *b*, C, *c*, D en *d*, vervolgens trekke men de lijnen A*c*, *a*C, B*d*, *b*D, en vereenige de punten A en B, B en C, C en D, D en A, dan zal ABCD wederom een vierkant zijn, waarvan de zijden in *g*, *h*, *i* en *k* midden door zijn gedeeld. Dit vierkant ABCD is nu verdeeld in vijf deelen *pqrs*, A*p*B, B*q*C, C*r*D en D*s*A, waarvan het eerste een vierkant is, terwijl de vier andere onderling gelijke en gelijkvormige regthoekige driehoeken zijn. Deze vijf deelen zijn alle even groot, want de genoemde driehoeken hebben denzelfden inhoud als het vierkant *pqrs*, omdat hunne kortste regthoekszijden gelijk aan en hunne langste regthoekszijden het dubbel van de zijde van dat vierkant zijn. Voorts is elk dezer driehoeken gelijk en gelijkvormig aan den driehoek DPA; twee van dezelve kunnen dus tot eenen regthoek DPA*s*, en alle vier kunnen zij tot een vierkant DP*ar* te zamen gevoegd worden; zoodat het vierkant ABCD, op de in het voorstel bepaalde wijze, verdeeld is.

Om alzoo een gegeven vierkant ABCD (Fig. 111), op de voorgeschrevene wijze te verdeelen, heeft men de volgende

Constructie.

Deel de zijden van het vierkant in *g*, *h*, *i* en *k* midden door, trek A*i*, B*k*, C*g* en D*h* elkander in *p*, *q*, *r* en *s* snijdende, wisch de gedeelten *pk*, *qg*, *rh* en *si* dier lijnen uit, dan zal aan het begeerde voldaan zijn.

CXCVII. Voorstel.

Door C. van Schaick.

Zes getallen te vinden, waarvan de drie eerste onderling 2 *en ook de drie laatste onderling* 2 *verschillen; en zoo, dat het product der drie eerste staat tot het product der drie laatste, als* 1 *tot* 35, *en de som der drie eerste tot de som der drie laatste als* 1 *tot* 3?

Opgelost door W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. F. Julius, L. Lieuwes, M. G. Snoek, J. S. Speijer, S. T. Boas, W. G. van Delden, D. van Lankeren Matthes, J. C. de Leeuw, E. Olivier, Dz., J. R. T,

Oett, L. van de Kasteele, C. van Schaick, J. Sjoerda en A. Vos.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat de drie eerste getallen zijn $x-2$, x en $x+2$ en de drie laatste .... $y-2$, y en $y+2$, dan is de som der drie eerste getallen $3x$ en die van de drie laatste $3y$; daar deze sommen in reden zijn als 1 tot 3, zoo is $y = 3x$ en nu worden de drie laatste getallen voorgesteld door .... $3x-2$, $3x$ en $3x+2$.

Men heeft dus, door de gegevene verhouding der producten,

$$(x-2)\,x\,(x+2) : (3x-2)\,3x\,(3x+2) = 1 : 35$$

of wel $$35x\,(x^2-4) = 3x\,(9x^2-4);$$

en, daar $x = 0$ niet, in den eigenlijken zin, aan het voorstel beantwoordt, deelen wij door x, waardoor wij verkrijgen

$$35\,(x^2-4) = 3\,(9x^2-4)$$

of, ontwikkelende en de gelijksoortige termen vereenigende,

$$8x^2 = 128,$$
$$x^2 = 16,$$

waaruit volgt $$x = \pm 4$$

en $$y = 3x = \pm 12.$$

De gevraagde getallen worden hierdoor:

2, 4, 6, 10, 12 en 14

of —6, —4, —2, —14, —12 en —10.

CXCVIII. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Van een hellend vlak is de hoogte a *palmen; zoo men hetzelfde hellend vlak* b *palmen hooger legt, dan zal het punt, waarin een ligchaam langs het vlak vallende komt, in denzelfden tijd dat het vrij van de hoogte des vlaks kon vallen, in dezen tweeden stand,* c *palmen verder op het vlak liggen dan in den eersten stand. Men vraagt hieruit de lengte van dit hellend vlak te bepalen?*

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. Acquoy, H. W. Bloem, W. G. van Delden, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* A. Vos.

Oplossing *van* E. Olivier, Dz.

Laat BC (Fig. 112) het hellend vlak in den eersten stand

voorstellen, de hoogte AC hebbende, zij B′C′ het hellend vlak in den tweeden stand de hoogte AC′ hebbende, dan zullen, volgens de bekende wetten der Dynamica, de punten, waarin eenig ligchaam op het hellend vlak komt, in denzelfden tijd, dat het vrij langs de hoogte des vlaks kon nedervallen, zich respectievelijk bevinden in D en D′, voetpunten der loodlijnen uit A op BC en B′C′ nedergelaten.

Nu heeft men, volgens de eigenschappen van den regthoekigen driehoek, in de driehoeken ABC en AB′C′, de evenredigheden

$$CD : AC = AC : BC \quad \text{en} \quad C'D' : AC' = AC' : B'C',$$

dus is $CD = \frac{AC^2}{BC}$ en $C'D' = \frac{AC'^2}{B'C'}$,

als ook $C'D' - CD = \frac{AC'^2}{B'C'} - \frac{AC^2}{BC}$.

Stellen wij dan $BC = B'C' = x$ palmen, zoo gaat, omdat $AC = a$ palmen, $AC' = a + b$ palmen en $C'D' - CD = c$ palmen gegeven is, deze vergelijking over in

$$c = \frac{(a+b)^2}{x} - \frac{a^2}{x},$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$x = \frac{(a+b)^2 - a^2}{c} = \frac{2ab + b^2}{c} = \frac{b}{c}(2a + b).$$

De gevraagde lengte van het hellende vlak is dus $\frac{b}{c}(2a + b)$ palmen, en bijgevolg vierde evenredige tot de gegeven c, b en $2a + b$.

CXCIX. Voorstel.

Door H. W. Bloem.

Van een ander hellend vlak is de hoogte onbekend; maar men weet dat, zoo het hellend vlak a palmen hooger wor, opgeligt, een ligchaam, langs het vlak vallende, in deszelfs eersten stand een p^{de} gedeelte en in deszelfs tweeden stand een q^{de} gedeelte van de lengte van het hellend vlak zal afloopen, in denzelfden tijd, dat het vrij van de hoogte des hellenden vlaks kon vallen. Men vraagt hieruit de lengte en hoogte van het hellend vlak te bepalen?

Opgelost *door* E. Olivier, Dz., J. Acquoy, C. F. Ju-

LIUS, A. VOS, H. W. BLOEM, W. G. VAN DELDEN, W. J. C. RAMMELMAN. ELSEVIER en D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING van E. OLIVIER, Dz.

Laat Fig. 112 wederom het hellend vlak in deszelfs beide standen voorstellen, dan is, volgens de evenredigheden in de voorgaande oplossing voorkomende,

$$AC = \sqrt{BC \times CD} \quad \text{en} \quad AC' = \sqrt{B'C' \times C'D'};$$

de punten D en D', even als in de vorige oplossing, de punten zijnde, waarin het ligchaam langs de hellingen vallende zal gekomen zijn, in denzelfden tijd, dat het vrij langs de hoogten valt, zoo is gegeven

$$CD = \frac{1}{p}\,BC \quad \text{en} \quad C'D' = \frac{1}{q}\,B'C';$$

door substitutie dezer waarden van CD en C'D', vindt men

$$AC = BC\sqrt{\frac{1}{p}} \quad \text{en} \quad AC' = B'C'\sqrt{\frac{1}{q}},$$

dus is $$AC' - AC = B'C'\sqrt{\frac{1}{q}} - BC\sqrt{\frac{1}{p}}.$$

Stellen wij nu $BC = B'C' = x$ palmen, dan hebben wij, daar $AC' - AC = a$ palmen gegeven is,

$$a = x\left(\sqrt{\frac{1}{q}} - \sqrt{\frac{1}{p}}\right)$$

of $$a = x\,\frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt{pq}},$$

waaruit terstond volgt

$$x = \frac{a\sqrt{pq}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}},$$

de gevraagde lengte is dus $\frac{a\sqrt{pq}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}$ palmen.

De hoogten van het hellend vlak, in deszelfs beide standen, worden nu uit de bovenstaande vergelijkingen

$$AC = BC\sqrt{\frac{1}{p}} \quad \text{en} \quad AC' = B'C'\sqrt{\frac{1}{q}}$$

door voor $BC = B'C'$ de gevondene waarde te stellen, dadelijk gevonden; wij verkrijgen voor dezelve

$$AC = \frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}\ \text{palmen} \quad \text{en} \quad AC' = \frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{p} - \sqrt{q}}\ \text{palmen};$$

waarvan het verschil naar behooren a palmen is.

CC. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Den boog ϕ te bepalen, uit de vergelijking

$$\left.\begin{array}{l} Sin.(\alpha+\phi)Cos.(\beta+2\phi)-Cos.(\alpha+\phi)Sin.(\beta+2\phi) \\ +Sin.3(\alpha+\phi)Cos.(\beta+2\phi)-Cos.3(\alpha+\phi)Sin.(\beta+2\phi) \\ +Sin.5(\alpha+\phi)Cos.(\beta+2\phi)-Cos.5(\alpha+\phi)Sin.(\beta+2\phi) \end{array}\right\} = 0 ?$$

OPGELOST door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. ACQUOY, W. G. VAN DELDEN, C. F. JULIUS, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER en A. VOS.

OPLOSSING van W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De opgegevene vergelijking kan geschreven worden in den vorm

$$\left.\begin{array}{l} \{Sin.(\alpha+\phi)+Sin.3(\alpha+\phi)+Sin.5(\alpha+\phi)\}Cos.(\beta+2\phi)= \\ =\{Cos.(\alpha+\phi)+Cos.3(\alpha+\phi)+Cos.5(\alpha+\phi)\}Sin.(\beta+2\phi), \end{array}\right\}(A)$$

of ook onder de gedaante

$$\frac{Sin.(\alpha+\phi)+Sin.3(\alpha+\phi)+Sin.5(\alpha+\phi)}{Cos.(\alpha+\phi)+Cos.3(\alpha+\phi)+Cos.5(\alpha+\phi)}=\frac{Sin.(\beta+2\phi)}{Cos.(\beta+2\phi)};$$

nu is, volgens de AANMERKING op het CLXXI. VOORSTEL des IV Deels,

$$\frac{Sin.\,x+Sin.\,3x+Sin.\,5x}{Cos.\,x+Cos.\,3x+Cos.\,5x}=Tang.\,3x,$$

hierdoor verandert de vergelijking in

$$Tang.3(\alpha+\phi)=\frac{Sin.(\beta+2\phi)}{Cos.(\beta+2\phi)}=Tang.(\beta+2\phi), \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

waaruit terstond volgt, n eenig geheel getal voorstellende

$$3(\alpha+\phi)=n\pi+\beta-2\phi,$$

en

$$\phi=n\pi+\beta-3\alpha.$$

AANMERKING van J. BADON GHIJBEN. Volgens het genoemde VOORSTEL des IV Deels is

$$Sin.\,x+Sin.\,3x+Sin.\,5x=\frac{Sin.^2\,3x}{Sin.\,x}$$

en

$$Cos.\,x+Cos.\,3x+Cos.\,5x=\frac{Sin.\,3x\;Cos.\,3x}{Sin.\,x},$$

de vergelijking (A) is dus eigenlijk

$$\frac{Sin.^2 3(\alpha+\phi)}{Sin.\,(\alpha+\phi)}Cos.(\beta+2\phi)=\frac{Sin.3(\alpha+\phi)\,Cos.3(\alpha+\phi)}{Sin.(\alpha+\phi)}Sin.(\beta+2\phi);$$

aan deze vergelijking wordt voldaan door te stellen

$$\frac{Sin.\,3(\alpha+\phi)}{Sin.\,(\alpha+\phi)}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

of door $Sin.3(\alpha+\phi)Cos.(\beta+2\phi)=Cos.3(\alpha+\phi)Sin.(\beta+2\phi)$ (2),

De laatste vergelijking is dezelfde als de vergelijking (B); maar uit de vergelijking (1) blijkt, dat aan de opgegevene vergelijking ook nog zal voldaan worden, indien *Sin.* $3(\alpha + \phi) = 0$, zonder dat tevens *Sin.* $(\alpha + \phi) = 0$ is; hieraan nu wordt weder voldaan, door $3(\alpha + \phi) = n\pi$ te nemen, onder beding, dat n geen veelvoud van 3 en dus van den vorm $3n \pm 1$ zij; men heeft dus, ter oplossing der voorgestelde vergelijking, ook nog

$$3(\alpha + \phi) = (3n \pm 1)\pi$$

of

$$\phi = (n \pm \tfrac{1}{3})\pi - \alpha,$$

welke waarde voor de onbekende geheel onafhankelijk van β is.

CCI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt in eenen halven cirkel eenen vierhoek te beschrijven, waarvan de achtereenvolgende zijden eene rekenkunstige reeks uitmaken?

Opgelost *door* J. Acquoy, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. F. Julius, J. R. T. Ortt, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Wanneer van eenen vierhoek, in eenen halven cirkel beschreven, de zijden door a, b, c en d worden voorgesteld, heeft men, volgens het CXCVIII Voorstel des IV. Deels, de vergelijking

$$a(a^2 - b^2 - c^2 - d^2) = 2bcd,$$

waarin a die zijde des vierhoeks voorstelt, welke tevens middellijn des cirkels is.

Laat nu r de straal des cirkels en x het gemeen verschil der zijden van den begeerden vierhoek zijn, dan is

$a = 2r$, $b = 2r - x$, $c = 2r - 2x$ en $d = 2r - 3x$, brengt men dit in de voorgaande vergelijking over, dan vindt men, na ontwikkeling en behoorlijke herleiding,

$$x^3 - 6rx^2 + 8r^2x - \frac{8}{3}r^3 = 0,$$

voor de vergelijking tusschen den straal des cirkels en het gemeen verschil der zijden. Is dus eene van deze beide grootheden gegeven, dan zal men, door deze vergelijking, de andere bepalen kunnen.

Nemen wij dan den straal des halven cirkels, waarin de vierhoek moet beschreven worden, als éénheid aan, en stellen wij dus in de gevondene vergelijking $r = 1$, dan verandert dezelve in

$$x^3 - 6x^2 + 8x - \frac{8}{3} = 0;$$

en hierin, om den tweeden term te doen verdwijnen, $x = y + 2$ stellende, komt er

$$y^3 - 4y - \frac{8}{3} = 0,$$

welke vergelijking, volgens de leerwijze van CARDANUS behandeld wordende, in het onherleidbaar geval verkeert en dus drie bestaanbare wortels heeft.

Bedient men zich, ter berekening dezer wortels, van de voor dit geval bekende leerwijze (zie J. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 66.), dan zal men voor die wortels vinden:

$$y = -\frac{4}{\sqrt{3}} Sin. 40^\circ, \quad y' = -\frac{4}{\sqrt{3}} Sin. 20^\circ, \quad y'' = \frac{4}{\sqrt{3}} Sin. 80^\circ;$$

of, omdat $\sqrt{3} = 2\ Sin.\ 60^\circ$ is,

$$y = -2\frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ}, \quad y' = -2\frac{Sin.\ 20^\circ}{Sin.\ 60^\circ}, \quad y'' = 2\frac{Sin.\ 80^\circ}{Sin.\ 60^\circ};$$

en deze waarden met behulp eener Sinustafel berekenende, vindt men

$$y = -1,4844544, \quad y' = -0,7898618, \quad y'' = 2,2743162.$$

Gebruikt men de *eerste* waarde van y, dan volgt, uit de stelling van $x = y + 2$, $x = 0,5155456$, waardoor men voor de zijden des vierhoeks vindt:

$$a = 2r = 2,$$
$$b = 2r - x = 1,4844544,$$
$$c = 2r - 2x = 0,9689088,$$
$$d = 2r - 3x = 0,4533632.$$

Beschrijft men dus (Fig. 113), op AB = 2 als middellijn, eenen halven cirkel en trekt men in denzelven de koorden BC, CD en DA respectievelijk gelijk aan de gevondene waarden b, c en d, dan zal ABCD de begeerde vierhoek zijn.

Trekt men de stralen CM en DM, dan is de gevondene waarde van $y = -2\frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ}$ ook zeer geschikt, om de

hoeken BMC en CMD te berekenen en daardoor den vierhoek te construeren, want uit de figuur volgt

$$BC = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ BMC,$$

maar nu is, volgens het bovengevondene,

$$BC = 2r - x = 2 - (y + 2) = -y = 2\,\frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ},$$

derhalve

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}\ BMC = \frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ}$$

en $Log.\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ BMC = Log.\ Sin.\ 40^\circ - Log.\ Sin.\ 60^\circ$, waardoor men, met behulp der Sinustafels, vindt

$\tfrac{1}{2}\ BMC = 47^\circ\ 55'\ 17'', 4$ en $BMC = 95^\circ\ 50'\ 34'', 8$.

Voorts is uit de figuur

$$CD = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\ CMD,$$

maar ook is

$$CD = 2r - 2x = 2 - (2y + 4) = -2 - 2y = 2\left(-1 + 2\,\frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ}\right)$$

en derhalve $1 + Sin.\ \tfrac{1}{2}\ CMD = 2\,\frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ};$

omdat nu in het algemeen $1 + Sin.\ \tfrac{1}{2}\ a = 2\ Cos.^2\ (45^\circ - \tfrac{1}{4}\ a)$ is, heeft men ook

$$Cos.^2\ (45^\circ - \tfrac{1}{4}\ CMD) = \frac{Sin.\ 40^\circ}{Sin.\ 60^\circ}$$

of $Log.\ Cos.\ (45^\circ - \tfrac{1}{4} CMD) = \tfrac{1}{2}\,(Log.\ Sin.\ 40^\circ - Log.\ Sin.\ 60^\circ)$ waardoor men, met behulp der tafels, vindt

$45^\circ - \tfrac{1}{4}\ CMD = 30^\circ\ 30'\ 41'', 9$ en $CMD = 57^\circ\ 57'\ 12'', 4$.

Trekt men dus, in den op $AB = 2$ als middellijn beschreven halven cirkel, de stralen MC en MD zoo, dat de hoeken BMC en CMD gelijk zijn aan hunne gevondene waarden, dan zal hierdoor, na het trekken der lijnen BC, CD en DA, de vierhoek almede geconstrueerd zijn.

Gebruikt men de *tweede* waarde van y, namelijk $y' = -0,\ 7898618$, dan is $x = y + 2 = 1,\ 2101382$, waardoor men voor de zijden des vierhoeks vindt:

$$a = 2r \quad = 2,$$
$$b = 2r - x = 0,\ 7898618,$$
$$c = 2r - 2x = -0,\ 4202764,$$
$$d = 2r - 3x = -1,\ 6304146.$$

Beschrijft men dus (Fig. 114), op $AB = 2$ als middel-

lijn, eenen halven cirkel, en neemt men in dezen de koorden BC, CD en DA respectievelijk gelijk aan de gevondene waarden b, $-c$ en $-d$, dan verkrijgt men eenen vierhoek ABCD, in welken nu echter de zijden CD en DA, uit hoofde van hunnen negatieven toestand, niet meer zijn hetgeen er *overblijft*, maar hetgeen er *te kort komt*, als men het gemeene verschil van hare voorgaande zijden afneemt. Van dezen vierhoek zal dus niet regtstreeks, zoo als in Fig. 113, $AB - BC = BC - CD = CD - DA$, maar, zoo als in Fig. 114, $AB - BC = BC + CD = DA - CD$ zijn.

Berekent men hier, op dezelfde wijze, als bij de eerste waarde van y, de hoeken BMC en CMD, dan vindt men:

BMC $= 46°\ 31'\ 24''$ en CMD $= 24°\ 15'\ 39'', 2$,

waardoor de vierhoek insgelijks beschreven kan worden.

Gebruikt men eindelijk de *derde* waarde van y, namelijk $y'' = 2,2743162$, dan is $x = y + 2 = 4,2743162$, hierdoor verkrijgt men voor de zijden b, c en d des vierhoeks, negatieve waarden, welke alle grooter zijn dan de middellijn des halven cirkels; zoodat deze derde waarde van y geenen bestaanbaren vierhoek leert kennen.

Aanmerking. Uit de gevondene waarden

$$y = -2\frac{Sin.\,40°}{Sin.\,60°},\ y' = -2\frac{Sin.\,20°}{Sin.\,60°}\ \text{en}\ y'' = 2\frac{Sin.\,80°}{Sin.\,60°}$$

volgt, dat, als men den omtrek des cirkels door eene meetkunstige constructie in 9 gelijke deelen verdeelen en dus eenen hoek van 40°, 20° en 80° beschrijven kon, men alsdan ook deze waarden van y gemakkelijk zou kunnen construeren en daardoor den gevraagden vierhoek zuiver meetkunstig beschrijven.

Beschrijft men dus (Fig. 115), op AB $= 2$ als middellijn, eenen halven cirkel en neemt men daarin vooreerst boog BP $= 60°$; veronderstelt men verder de punten Q, R en S zoodanig geconstrueerd te zijn, dat de boogen BQ $= 40°$, BR $= 20°$ en BS $= 80°$ zijn; trekt men dan, na uit B eene loodlijn BX op AB gesteld te hebben, de lijnen PP', QQ', RR' en SS' evenwijdig met AB, zoo is

BP' $= Sin.60$, BQ' $= Sin.40°$, BR' $= Sin.20°$ en BS' $= Sin.80°$;

trekt men dan al verder de lijn P'A en, evenwijdig met dezelve, de lijnen Q'Y, R'Y', S'Y'', zoo heeft men:

$BP' : BQ' = AB : BY$ of $Sin.\ 60° : Sin.\ 40° = 2 : BY$,
$BP' : BR' = AB : BY'$ of $Sin.\ 60° : Sin.\ 20° = 2 : BY'$,
$BP' : BS' = AB : BY''$ of $Sin.\ 60° : Sin.\ 80° = 2 : BY''$,

waaruit volgt

$$BY = 2\frac{Sin.\ 40°}{Sin.\ 60°},\quad BY' = 2\frac{Sin.\ 20°}{Sin.\ 60°}\ \text{en}\ BY'' = 2\frac{Sin.\ 80°}{Sin.\ 60°},$$

weshalve de lijnen BY, BY' en BY'' respectievelijk de waarden van $-y$, $-y'$ en y'' voorstellen; terwijl dan de overeenkomstige waarden van x, $BZ = AB$ genomen hebbende, zullen zijn:

$x = y + 2 = -BY + AB = AY$,
$x' = y' + 2 = -BY' + AB = AY'$,
$x'' = y'' + 2 = BY'' + AB = BY'' + BZ = ZY''$,

waardoor dan verder de zijden des vierhoeks onmiddellijk kunnen gevonden en dus de vierhoek in den halven cirkel kan geconstrueerd worden. De waarde van $x = AY$ zal den vierhoek van Fig. 113, die van $x' = AY'$ zal den vierhoek van Fig. 114 en die van $x = ZY''$ zal geenen bestaanbaren vierhoek opleveren.

CCII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt eenen vierhoek, die in eenen cirkel beschreven is, te berekenen, als gegeven zijn de loodlijnen, uit de hoekpunten op de diagonalen nedergelaten?

Opgelost *door* A. Vos, J. Acquoy *en* C. F. Julius.

Oplossing *van* A. Vos.

Laat de vierhoek ABCD (Fig. 116) in eenen cirkel beschreven, de diagonalen AC en BD getrokken, en uit de hoekpunten de loodlijnen $AE = a$, $BF = b$, $CG = c$ en $DH = d$ op de diagonalen nedergelaten zijn, dan zijn de regthoekige driehoeken AED en BFC gelijkvormig, omdat de scherpe hoeken ADE en BCF beide door den halven boog AB gemeten worden en dus gelijk zijn; even zoo zijn de regthoekige driehoeken AHD en BGC gelijkvormig, omdat de hoeken HAD en GBC, beide door den halven boog CD gemeten wordende, gelijk zijn.

Uit deze gelijkvormige driehoeken nu, volgen de evenredigheden:

$$AD : BC = AE : BF = a : b$$

en $$AD : BC = DH : CG = d : c,$$

welker verband geeft

$$a : b = d : c$$

of $$ac = bd.$$

Voldoen dus de gegevens niet aan deze vergelijking, dan kunnen dezelve niet behooren tot eenen vierhoek, die in eenen cirkel beschreven kan worden; voldoen echter de gegevens wel aan de vergelijking $ac = bd$, dan is een derzelve afhankelijk van de drie overige, en daar, ter bepaling van eenen vierhoek in een cirkel beschreven, vier onderling onafhankelijke gegevens noodig zijn, zoo is de vierhoek alsdan onbepaald. De vierhoek, waarvan de berekening in het voorstel gevraagd wordt, is derhalve of onbestaanbaar, of onbepaald, naar gelang de gegevens niet of wel aan de vergelijking $ac = bd$ voldoen.

In het geval, dat de vierhoek onbepaald en dus $ac = bd$ is, kan men een' der vierhoeken, die aan de vraag beantwoorden, op de volgende wijze construeren. Trek twee regte lijnen XX' en YY' (Fig. 117), elkander onder eenen willekeurigen hoek snijdende; trek ter wederzijde van de lijn XX' lijnen, die met dezelve evenwijdig loopen, daarvan respectievelijk op de afstanden $AE = a$ en $CG = c$ verwijderd zijn en de lijn YY' in A en C snijden; trek eene lijn evenwijdig met YY', daarvan op eenen afstand $BF = b$ verwijderd en snijdende XX' in B; breng door de punten A, B en C eenen cirkel, snijdende XX', behalve in B, ook nog in D, dan zal ABCD een' der begeerde vierhoeken zijn; want deze vierhoek staat in eenen cirkel, drie der loodlijnen zijn onmiddelijk door de constructie aan de gegevens gelijk gemaakt en, volgens de boven bewezene eigenschap, is de vierde loodlijn $DH = d = \frac{ac}{b}$, zoo als door het verband $ac = bd$ der gegevens wordt gevorderd.

Door de lijnen XX' en YY' elkander, onder andere hoeken, te laten snijden, kan men zoo vele der begeerde vierhoeken construeren als men verkiest; was de hoek, dien

deze lijnen insluiten, dat is de hoek der diagonalen, ook nog gegeven, dan zoude de vierhoek bepaald zijn. Men kan, om dezelve te bepalen, echter even goed eenig ander gegeven bij de drie onafhankelijke gegevens voegen, die in het bekend zijn der vier loodlijnen liggen opgesloten.

CCIII. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Op eene horizontale vlakte, waarop een verticale toren van gegevene hoogte staat, beweegt zich een kleiner verticaal voorwerp, waarvan de hoogte almede bekend is, regelregt naar den toren. Men vraagt, welken afstand dit voorwerp van den toren zal hebben, op het oogenblik, dat hetzelve uit den top des torens op zijn grootst gezien wordt?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. F. Julius, W. G. van Delden, J. R. T. Ortt, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Laat AB $= a$ (Fig. 118) de hoogte des torens, CD $= b$ die van het verticale voorwerp en XX' de horizontale lijn voorstellen, langs welke het voorwerp zich beweegt; en stelle men den afstand van het voorwerp tot den toren, op het oogenblik dat het uit den top des torens op zijn grootst gezien wordt BD $= x$; dan zal x zoodanig moeten bepaald worden, dat de hoek CAD, door de gezigtsstralen AC en AD aan den top des torens gevormd, een maximum zij.

Uit de figuur is *hoek* CAD $=$ *hoek* BAC $-$ *hoek* BAD en dus is

$$\textit{Tang.}\ \mathrm{CAD} = \frac{\textit{Tang.}\ \mathrm{BAC} - \textit{Tang.}\ \mathrm{BAD}}{1 + \textit{Tang.}\ \mathrm{BAC} \times \textit{Tang.}\ \mathrm{BAD}}.$$

Trekt men voorts CE evenwijdig aan BD, dan is uit den regthoekigen driehoek AEC:

$$\textit{Tang.}\ \mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{EC}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}-\mathrm{CD}} = \frac{x}{a-b},$$

terwijl uit den regthoekigen driehoek ABD volgt

$$\textit{Tang.}\ \mathrm{BAD} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AB}} = \frac{x}{a};$$

substitueert men nu deze waarden voor *Tang.* BAC en

Tang. BAD in de bovengevondene uitdrukking voor *Tang.* CAD, dan heeft men:

$$Tang.\ CAD = \frac{\frac{x}{a-b} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x}{a-b} \times \frac{x}{a}} = b \times \frac{x}{a^2 - ab \times x^2}.$$

Daar nu *hoek* CAD klaarblijkelijk een maximum zijn zal als *Tang.* CAD zulks is, zoo heeft men slechts de functie:

$y = \frac{x}{a^2 - ab + x^2}$ tot een maximum te maken.

De differentiaal-quotienten dezer uitdrukking zijn:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - ab - x^2}{(a^2 - ab + x^2)^2}$$

en

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -2x\,\frac{3a^2 - 3ab - x^2}{(a^2 - ab + x^2)^3}.$$

Stelt men nu $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a^2 - ab - x^2}{(a^2 - ab + x^2)^2} = 0$, dan vindt men

$$x^2 = a^2 - ab$$

en

$$x = \pm\sqrt{a(a-b)},$$

deze waarde voor x in $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ overbrengende, heeft men:

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \mp \frac{\sqrt{a(a-b)}}{2a^2(a-b)^2}.$$

De positieve waarde voor x, het tweede differentiaal-quotient negatief makende, duidt een maximum voor *Tang.* CAD en dus ook voor *hoek* CAD aan, en is bijgevolg de gevraagde afstand.

De negatieve waarde van x doet ons eenen anderen stand voor het bewegende voorwerp kennen, op denzelfden afstand, maar aan de tegenovergestelde zijde van den toren AB gelegen. Daar deze negatieve waarde voor x het tweede differentiaal-quotient positief maakt, zal *Tang.* CAD, als het voorwerp in dien stand gekomen is, een minimum zijn; maar dewijl door $x = -\sqrt{a(a-b)}$ te nemen, *Tang.* CAD $= \frac{bx}{a^2 - ab + x^2}$ klaarblijkelijk even groot negatief wordt, als deszelfs positieve waarde voor $x = +\sqrt{a(a-b)}$ is, zoo geeft zulks alleenlijk te kennen, dat de *hoek* CAD alsdan zijne grootste negatieve waarde verkrijgt. Neemt men

dus ter wederzijde van B op de horizontale lijn XX', BD $=$ BD' $= \sqrt{a(a-b)}$, dan zal het voorwerp, zoowel in D als in D', uit den top des torens op het grootst gezien worden; maar de rigtingen, waarin het gezien wordt, zullen aan elkander tegenovergesteld wezen; zoodat de aanschouwer in A, het voorwerp in D op het grootst gezien hebbende, zich zal moeten omkeeren, om het in D' weder op zijn grootst te zien.

Om de punten D en D' door constructie te bepalen, behoeft men slechts AB beneden XX' zoo verre te verlengen, dat het verlengde BM $=$ AE $= a - b$ zij, en voorts, op AM als middellijn, eenen cirkel te beschrijven, dan zullen de punten D en D', waarin de omtrek van dezen cirkel de horizontale lijn XX' snijdt, de begeerde zijn; want, volgens eene eigenschap des cirkels, heeft men BD $=$ BD' $= \sqrt{AB \times BM} = \sqrt{a(a-b)}$.

Aanmerkingen. 1°. Onderstelt men, dat het voorwerp cd $=$ CD $= b$ zich beneden de horizontale lijn XX' bevindt, en dus in eenen tegenovergestelden stand van den toren AB geplaatst is, dan heeft men, om den afstand Bd te leeren kennen, waarop het voorwerp alsdan uit den top des torens op het grootst gezien wordt, in de gevondene waarden voor x slechts b negatief te stellen, als wanneer men vindt $x = \pm \sqrt{a(a+b)}$. Om ook in dit geval de punten d en d' door constructie te bepalen, verlenge men AB, totdat het verlengde BN $=$ AB $+ cd = a + b$ zij. Beschrijft men dan, op AN als middellijn, weder eenen cirkel de lijn XX' in d en d' snijdende, dan zullen deze punten de begeerde zijn; want men heeft Bd $=$ Bd' $= \sqrt{AB \times BN} = \sqrt{a(a+b)}$.

2°. Trekt men door A de lijn YY', evenwijdig met XX', en verlengt men cd tot in F, indien men dan dF $=$ AB $= a$ als de hoogte eens torens, verticaal op de horizontale lijn YY' staande, en $cd = b$ als de hoogte van een op den top diens torens geplaatst voorwerp beschouwt, dan is het duidelijk, dat A het punt in de lijn YY' zijn zal, waaruit men het op den top des torens geplaatste voorwerp op het grootst zien zal. Daar nu AF $=$ Bd $= \sqrt{a(a+b)}$ is, zoo is hierdoor het vraagstuk opgelost: »*Op welken afstand van*

den voet eens torens men het oog moet plaatsen, om een op dien toren geplaatst voorwerp op het grootst te zien." Begeert men het oog op eene gegevene hoogte h boven de horizontale lijn te plaatsen, dan is het duidelijk, dat men, in de uitgebragte formule, slechts de waarde van a met die van h zal behoeven te verminderen, om den afstand van het oog tot den toren te bepalen, en dat men alzoo voor dien afstand hebben zal $\sqrt{(a - h)(a - h + b)}$.

CCIV. Voorstel.

Door J. Badon Ghijben.

De vergelijking $x\delta^2 y + \delta y \delta x = y \delta y \delta x$ *te integreren, waarin* y *eene functie van het onafhankelijk veranderlijke element* x *is?*

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, C. F. Julius, D. van Lankeren Matthes, A. Vos *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij $\delta y = p\delta x$,

dan is, omdat x het onafhankelijk veranderlijk element, dus δx standvastig is,

$$\delta^2 y = \delta p \delta x;$$

brengen wij nu, in de beide eerste termen der gegevene vergelijking, deze waarden over, dan verandert zij in

$$x\delta p\delta x + p\delta x^2 = y\delta y\delta x$$

of in

$$x\delta p + p\delta x = y\delta y,$$

waarvan de integraal klaarblijkelijk is

$$px = \tfrac{1}{2} y^2 + c.$$

Hierin nu weder $p = \dfrac{\delta y}{\delta x}$ overbrengende, komt er

$$\frac{x\delta y}{\delta x} = \tfrac{1}{2} y^2 + c$$

of

$$\frac{\delta x}{x} = \frac{2\delta y}{y^2 + 2c}.$$

De integraal, die wij voor deze vergelijking verkrijgen zullen, kan twee zeer verschillende vormen hebben, naar gelang c eene positieve of negatieve waarde heeft.

Is *ten eerste* c positief, dan kunnen wij stellen $2c = a^2$, waardoor wij hebben

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{2\partial y}{y^2 + a^2} = \frac{2}{a} \cdot \frac{\partial \frac{y}{a}}{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2}$$

of integrerende

$$Log.\ x = \frac{2}{a}\ Boog\ Tang.\ \frac{y}{a} + c';$$

hierin $c' = Log.\ b$ stellende, wordt in dit geval de integraal

$$Log.\ \frac{x}{b} = \frac{2}{a}\ Boog\ Tang.\ \frac{y}{a};$$

men kan hieruit y gemakkelijk afzonderen, door achtervolgens voor deze vergelijking te schrijven

$$Boog\ Tang.\ \frac{y}{a} = \frac{1}{2}\ a\ Log.\ \frac{x}{b} = a\ Log.\ \sqrt{\frac{x}{b}},$$

$$\frac{y}{a} = Tang.\ \left(a\ Log.\ \sqrt{\frac{x}{b}}\right)$$

en $$y = a\ Tang.\ \left(a\ Log.\ \sqrt{\frac{x}{b}}\right).$$

Is ten tweede c negatief, dan kunnen wij stellen $2c = -a^2$, waardoor wij hebben

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{2\partial y}{y^2 - a^2} = \frac{\partial y}{a(y-a)} - \frac{\partial y}{a(y+a)}$$

of integrerende

$$Log.\ x = \frac{1}{a}\ Log.\ (y-a) - \frac{1}{a}\ Log.\ (y+a) + c';$$

hierin $c' = Log.\ b$ stellende, wordt in dit geval de integraal

$$Log.\ \frac{x}{b} = \frac{1}{a}\ Log.\ \frac{y-a}{y+a};$$

ook hieruit kan men y ligtelijk afzonderen, door achtervolgens voor deze vergelijking te schrijven

$$a\ Log.\ \frac{x}{b} = Log.\ \frac{y-a}{y+a},$$

$$Log.\ \frac{x^a}{b^a} = Log.\ \frac{y-a}{y+a},$$

$$\frac{x^a}{b^a} = \frac{y-a}{y+a},$$

$$yx^a + ax^a = yb^a - ab^a,$$

$$y(b^a - x^a) = a(b^a + x^a)$$

en eindelijk $$y = a^{\frac{b^a + x^a}{b^a - x^a}}.$$

Neemt men in de beide gevallen $a = 1$ en $b = 1$, dan vindt men, voor een paar zeer eenvoudige formulen, die aan de opgegevene differentiaal vergelijking voldoen,

$$\textit{Boog Tang. } y = \textit{Log. } \sqrt{x}$$

en $$y = \frac{1 + x}{1 - x}.$$

CCV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

De vergelijking $x\delta^2 y = \delta y \delta x$ te integreren, waarin x en y beide funtiën zijn van het onafhankelijk veranderlijke element $z = \int y \delta x$?

Opgelost door J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, C. F. JULIUS en A. VOS.

I. OPLOSSING van J. BADON GHIJBEN.

Dewijl z het onafhankelijk veranderlijke element is, waarvan x en y funtiën zijn, zoo is de opgegevene vergelijking eigenlijk

$$x\frac{\delta^2 y}{\delta z^2} = \frac{\delta y}{\delta z} \cdot \frac{\delta x}{\delta z},$$

terwijl men, volgens de opgaaf, voor standvastige differentiaal heeft,
$$\delta z = y\delta x.$$

Stellende nu $\delta y = p\delta z$ en dus $\delta^2 y = \delta p \delta z$, dan verandert de opgegevene vergelijking in

$$x\delta p\delta z = p\delta x\delta z,$$

dat is: $$x\delta p - p\delta x = 0$$

of $$\frac{x\delta p - p\delta x}{x^2} = 0,$$

waarvan de integraal onmiddelijk blijkt te zijn

$$\frac{p}{x} = c$$

of $$p = cx.$$

Maar nu is $p = \frac{\delta y}{\delta z}$ en $\delta z = y\delta x$, dus $p = \frac{\delta y}{y\delta x}$, waardoor wij hebben

$$\frac{\delta y}{y\delta x} = cx$$

of $$\frac{\delta y}{y} = cx\delta x;$$

waarvan de integraal terstond blijkt te zijn

$$Log.\ y = \tfrac{1}{2}\ cx^2 + c',$$

welke laatste vergelijking dus de integraal der opgegevene differentiaal-vergelijking is.

Stellen wij, om die vergelijking gelijkslachtig te maken, $\frac{1}{2}\ c = \frac{1}{a^2}$ en $c' = Log.\ b$, dan verandert de gevondene integraal in

$$Log.\ \frac{y}{b} = \frac{x^2}{a^2}.$$

Hieruit y afzonderende, vinden wij

$$y = be^{\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

zoo men $a = 1$ en $b = 1$ neemt, heeft men eenvoudiglijk

$$y = e^{(x^2)} \quad \text{of} \quad x^2 = Log.\ y.$$

II. Oplossing van J. Badon Ghijben.

Men kan de gevraagde integraal ook op de volgende wijze bekomen; deelen wij namelijk de opgegevene vergelijking door δx^2, en vervangen wij vervolgens, overeenkomstig de leerwijze opgegeven bij I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* §. 82, $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ door $\frac{\delta x \delta^2 y - \delta^2 x \delta y}{\delta x^3}$, dan vinden wij voor eene differentiaal-vergelijking, waarbij nog geene differentiaal standvastig en dus nog geene bepaalde grootheid als oorspronkelijke veranderlijke is aangenomen,

$$x \frac{\delta x \delta^2 y - \delta^2 x \delta y}{\delta x^3} = \frac{\delta y \delta x}{\delta x^2}$$

of $$x \delta x \delta^2 y - x \delta^2 x \delta y = \delta x \delta y \delta x \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Willen wij nu deze vergelijking terugbrengen tot het geval, dat x de oorspronkelijke veranderlijke en dus δx standvastig is, dan differentiëeren wij de gegevene vergelijking $\delta x = y \delta x$, in de onderstelling van δx standvastig, zoodat wij hebben

$$\delta x = y \delta x \quad \text{en} \quad \delta^2 x = \delta y \delta x$$

door substitutie van deze waarden, verandert nu de vergelijking (A), na deeling door δx, in

$$xy \delta^2 y - x \delta y^2 = y \delta x \delta y \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

en deze vergelijking is dezelfde als de opgegevene, met dit onderscheid dat nu x, in plaats van $\int y \delta x$, als onafhankelijk veranderlijk element wordt beschouwd.

Stellen wij om dezelve te integreren

$$\delta y = p\delta x \quad \text{en} \quad \delta^2 y = \delta p \delta x,$$

dan kunnen wij voor de vergelijking (B) schrijven

$$xy\delta p\delta x - x\delta y p\delta x = y\delta x p\delta x,$$

dat is:

$$xy\delta p - px\delta y = py\delta x$$

of, door het product xyp deelende,

$$\frac{\delta p}{p} - \frac{\delta y}{y} = \frac{\delta x}{x};$$

hiervan blijkt nu terstond de integraal te zijn

$$Log.\, p - Log.\, y = Log.\, x - Log.\, c$$

of

$$pc = xy;$$

als nu met δx vermenigvuldigende en voor $p\delta x$ wederom δy schrijvende, vinden wij

$$c\delta y = xy\delta x$$

of

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{x\delta x}{c},$$

waarvan de integraal is

$$Log.\, y = \frac{x^2}{2c} + Log.\, c'$$

of

$$Log.\, \frac{y}{c'} = \frac{x^2}{2c};$$

even als in de eerste oplossing, want c' en $2c$ zijn hier, even als boven b en a^2, willekeurige standvastige grootheden, door het integreren ontstaan.

CCVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Hoe veel graden bevat de hoek, waarvan de Secans gelijk is aan de som van de Sinus en Cosinus.

(OPGELOST *door* J. ACQUOY, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER, A. VOS, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, L. VAN DE KASTEELE, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, L. LIEUWES, B. LUBBERS, G. KOSTER *en* BAS BACKER.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Stelt men den gevraagden hoek door ϕ voor, dan moet, volgens het voorstel,

$$Sec.\, \phi = Sin.\, \phi + Cos.\, \phi$$

zijn; vermenigvuldigt men deze vergelijking met

$$Sec.\ \phi = \frac{1}{Cos.\ \phi},$$

dan heeft men

$$Sec.^2\ \phi = \frac{Sin.\ \phi}{Cos.\ \phi} + 1$$

waarvoor men ook schrijven kan

$$1 + Tang.^2\ \phi = Tang.\ \phi + 1$$

of $\qquad Tang.^2\ \phi - Tang.\ \phi = 0,$

dat is: $\qquad Tang.\ \phi\ (Tang.\ \phi - 1) = 0.$

Aan deze vergelijking wordt voldaan, door te nemen

$$Tang.\ \phi = 0 \quad \text{en} \quad Tang.\ \phi = 1;$$

uit $Tang.\ \phi = 0$ volgt: $\phi = 0°$ of $\phi = 180°$, en uit $Tang.\ \phi = 1$ volgt: $\phi = 45°$ of $\phi = 225°$; welke vier waarden van ϕ alle regtstreeks aan het voorstel beantwoorden.

CCVII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Hoeveel graden bevat de hoek, waarvan de Secans gelijk is aan de som de Sinus en Tangens?

Opgelost door J. Acquoy, A. Vos, W. J. C. Rammelman Elsevier, J. S. Speijer, W. G. van Delden, G. Koster en B. Lubbers.

Oplossing van J. Acquoy.

Den gevraagden hoek wederom door ϕ voorstellende, heeft men de vergelijking

$$Sec.\ \phi = Sin.\ \phi + Tang.\ \phi;$$

of, door dezelve tot de tweede magt te verheffen,

$$Sec.^2\ \phi = Sin.^2\ \phi + 2Sin.\ \phi\ Tang.\ \phi + Tang.^2\ \phi,$$

waarvoor men ook schrijven kan:

$$1 + Tang.^2\ \phi = Sin.^2\ \phi + \frac{2Sin.^2\ \phi}{Cos.\ \phi} + Tang.^2\ \phi$$

of $\qquad 1 = Sin.^2\ \phi \left\{1 + \frac{2}{Cos.\ \phi}\right\};$

als nu met $Cos.\ \phi$ vermenigvuldigende en $1 - Cos.^2\ \phi$ in plaats van $Sin.^2\ \phi$ schrijvende, heeft men

$$Cos.\ \phi = (1 - Cos.^2\ \phi)\ (Cos.\ \phi + 2)$$

of, ontwikkelende en naar de magten van $Cos.\ \phi$ rangschikkende,

$$Cos.^3\ \phi + 2Cos.^2\ \phi - 2 = 0;$$

schrijft men eindelijk hierin $\frac{1}{Sec.\,\phi}$ in plaats van $Cos.\,\phi$, dan verkrijgt men, na de noodige herleiding,

$$Sec.^3\,\phi - Sec.\,\phi - \frac{1}{2} = 0.$$

Deze vergelijking levert slechts ééne bestaanbare waarde voor $Sec.\,\phi$ op, voor welke men bij benadering vindt

$$Sec.\,\phi = 1{,}191488;$$

en met behulp der tafels vindt men hierdoor

$$\phi = 32^\circ\ 56'\ 6'',4 \quad \text{of} \quad \phi = 327^\circ\ 3'\ 53'',6.$$

De eerste waarde van ϕ voldoet regtstreeks aan de opgaaf; terwijl de tweede waarde van ϕ eigenlijk voldoet aan de vergelijking

$$Sec.\,\phi = -(Sin.\,\phi + Tang.\,\phi),$$

welke, even als de opgegevene behandeld wordende, klaarblijkelijk tot dezelfde eindvergelijking zal voeren.

CCVIII. VOORSTEL.

Door B. Lubbers.

Hoeveel graden heeft de hoek, waarvan de Cotangens gelijk is aan de som van de Sinus en Tangens?

Opgelost *door* J. Acquoy, C. J. Bolten, J. S. Speijer, A. Vries, W. J. C. Rammelman Elsevier, W. G. van Delden, G. Kuster, B. Lubbers *en* A. F. van de Laar, Junior.

Oplossing van J. Acquoy.

Stelt men nogmaals den gevraagden hoek door ϕ voor; dan moet

$$Cot.\,\phi = Sin.\,\phi + Tang.\,\phi,$$

of

$$\frac{Cos.\,\phi}{Sin.\,\phi} = Sin.\,\phi + \frac{Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi}$$

zijn; vermenigvuldigt men deze vergelijking met $Sin.\,\phi\ Cos.\,\phi$, dan heeft men

$$Cos.^2\,\phi = Sin.^2\,\phi\ Cos.\,\phi + Sin.^2\,\phi,$$

dat is:

$$Cos.^2\,\phi = Sin.^2\,\phi\ \{Cos.\,\phi + 1\}$$

of

$$Cos.^2\,\phi = (1 - Cos.^2\,\phi)\ (Cos.\,\phi + 1).$$

Deze vergelijking ontwikkelende en naar de magten van $Cos.\,\phi$ rangschikkende, verkrijgt men

$$Cos.^3\,\phi + 2Cos.^2\,\phi - Cos.\,\phi - 1 = 0,$$

waaruit drie bestaanbare waarden voor $Cos.\,\phi$ gevonden worden, namelijk:

$1°.\ Cos.\ \phi > 0,8$ en $< 0,81$,
$2°.\ Cos.\ \phi > -0,6$ en $< -0,5$
en $3°.\ Cos.\ \phi > -3$ en < -2.

Den eersten wortel meer naauwkeurig benaderende, verkrijgt men

$$Cos.\ \phi = 0,8019378,$$

waardoor men met behulp der tafels vindt

$$\phi = 36° 41' 4'' \quad \text{of} \quad \phi = 323° 18' 56''.$$

Den tweeden wortel insgelijks naauwkeuriger benaderende, vindt men

$$Cos.\ \phi = -0,5549581,$$

waarvoor de tafels geven

$$\phi = 123° 42' 28'',2 \quad \text{of} \quad \phi = 236° 17' 31'',8.$$

De derde wortel eindelijk, levert klaarblijkelijk voor ϕ geene bestaanbare waarde op.

Er bestaan alzoo vier waarden voor den gevraagden hoek, welke allen, als men behoorlijk acht geeft op de teekens, die de goniometrische lijnen in de onderscheidene quadranten des cirkels verkrijgen, aan het voorstel voldoen.

CCIX. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert eene rekenkunstige reeks van acht termen in geheele getallen te vinden, met de eenheid opklimmende, zoodanig, dat de som van de acht driehoekige getallen, deze termen tot wortels hebbende, een volkomen vierkant zij?

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, J. Acquoy, F. C. Radijs, G. Koster, J. S. Speijer, A. Vos, C. J. Bolten, B. Lubbers, W. J. C. Rammelman Elsevier en M. G. Snoek.

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Indien men voor de gevraagde reeks stelt

$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3,\ x+4,\ x+5,\ x+6$ en $x+7$,

dan zijn de driehoekige getallen, de termen dezer reeks tot wortels hebbende,

$$\tfrac{1}{2}x\,(x+1) = \tfrac{1}{2}(x^2+x),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+1)\,(x+2) = \tfrac{1}{2}(x^2+3x+2),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+2)\,(x+3) = \tfrac{1}{2}(x^2+5x+6),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+3)\,(x+4) = \tfrac{1}{2}(x^2+7x+12),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+4)\,(x+5) = \tfrac{1}{2}(x^2+9x+20),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+5)\,(x+6) = \tfrac{1}{2}(x^2+11x+30),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+6)\,(x+7) = \tfrac{1}{2}(x^2+13x+42),$$
$$\tfrac{1}{2}(x+7)\,(x+8) = \tfrac{1}{2}(x^2+15x+56),$$

waarvan de som is

$$\tfrac{1}{2}(8x^2+64x+168) = 4(x^2+8x+21).$$

Deze som moet een vierkant zijn, waartoe het genoegzaam is x zoodanig te bepalen, dat $x^2+8x+21$ een vierkant zij; stellen wij dus

$$x^2+8x+21 = p^2,$$

dan kunnen wij voor deze vergelijking schrijven

$$(x+4)^2+5 = p^2$$

of $$p^2-(x+4)^2 = 5.$$

Daar nu x een geheel getal moet zijn, moeten ook p en $x+4$ geheele getallen wezen; daar verder p^2 en $(x+4)^2$ vierkanten zijn, en er geene andere vierkanten in geheele getallen bestaan, die onderling 5 verschillen, dan alleen 9 en 4, zoo moet noodwendig

$$p^2 = 9 \quad \text{en} \quad (x+4)^2 = 4$$

zijn. Hieruit volgt terstond

$$x+4 = \pm 2$$

en $$x = -2 \quad \text{of} \quad x = -6.$$

Voor $x = -2$, is de gevraagde reeks

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,$$

en dan zijn de overeenkomstige driehoekige getallen

$$1, 0, 0, 1, 3, 6, 10, 15;$$

voor $x = -6$, is de gevraagde reeks

$$-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1,$$

en dan zijn de overeenkomstige driehoekige getallen

$$15, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 1,$$

de beide gevondene reeksen geven alzoo dezelfde driehoekige getallen, doch in eene omgekeerde volgorde, terwijl hunne som 36 en dus naar behooren een volkomen vierkant is.

CCX. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Een getal van vier cijfers te vinden, dat de volgende eigenschappen heeft: 1º. het product van de cijfers der duizend- en tientallen, is gelijk aan driemaal het cijfer der eenheden; 2º. de som van de cijfers der tientallen en eenheden, is gelijk aan tienmaal het cijfer der honderdtallen; 3º. de vierkantswortel uit het cijfer der eenheden, is gelijk aan dat der duizendtallen en 4º. het vierkant van het cijfer der tientallen, verminderd met dat van het cijfer der eenheden, is gelijk aan twintigmaal het cijfer der honderdtallen?

OPGELOST *door* D. S. WATERMAN, F. C. RADIJS, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, G. KOSTER, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, L. LIEUWES, J. S. SPEIJER, H. W. WEYTINGH, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, L. VAN DE KASTEELE, W. J. C. KAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOER, A. VOS *en* C. VAN SCHAICK.

I. OPLOSSING *van* D. S. WATERMAN.

Stel het cijfer der duizendtallen door x, dat der honderdtallen door y, dat der tientallen door z en dat der eenheden door v voor, dan is volgens het voorstel

$$xz = 3v \ldots\ldots(1),$$
$$z + v = 10y \ldots\ldots(2),$$
$$\sqrt{v} = x \ldots\ldots(3)$$

en

$$z^2 - v^2 = 20y \ldots\ldots(4).$$

Deelt men (2) in (4), zoo komt er

$$z - v = 2 \ldots\ldots(5);$$

substitueert men het vierkant van (3) in (1), zoo vindt men na deeling door x,

$$z = 3x \ldots\ldots(6);$$

brengt men (6), alsmede het vierkant van (3), in (5) over, zoo komt er

$$3x - x^2 = 2$$

of

$$x^2 - 3x = -2,$$

waaruit volgt $x = 1$ of $x = 2$,

Neemt men $x = 1$, dan vindt men: volgens (6) $z = 3$, volgens (3) $v = 1$ en volgens (2) $y = \frac{2}{5}$; zoodat, daar

alle de cijfers geheele getallen moeten zijn, deze waarde van x onbruikbaar is.

Neemt men echter $x = 2$, dan vindt men even zoo $s = 6$, $v = 4$ en $y = 1$, waardoor men voor het begeerde getal 2164 verkrijgt.

II. Oplossing van F. C. Radijs.

De vergelijkingen (1), (2), (3) en (4), der vorige oplossing gebruikende, blijkt uit (2) terstond, dat $y = 1$ moet zijn, want anders zouden s en v niet ieder in het bijzonder kleiner dan 10 kunnen wezen. Volgens (4) moet dan $s^2 - v^2 = 20$ zijn, maar onder de vierkanten der cijfers van 1 tot 9 komen geene andere voor, wier verschil 20 is, dan 36 en 16; alzoo is $s^2 = 36$ en $v^2 = 16$ of $s = 6$ en $v = 4$. De reeds gevondene waarden in (1) of (3) substitueerende, vindt men eindelijk $x = 2$. Het begeerde getal is bij gevolg 2164.

Uit deze oplossing blijkt, dat men de eerste of derde voorwaarde des voorstels kan ontberen, mits men de voorwaarde in het oog houdt, dat de onbekenden geheele getallen kleiner dan 10 moeten zijn.

CCXI. Voorstel,

Door A. Volkersz.

Binnen eenen cirkel, waarvan de omtrek in zes gelijke deelen verdeeld is, is uit elk deelpunt, met de straal des cirkels, een cirkelboog beschreven, waardoor in dien cirkel eene zeshoekige ster is ontstaan. Men stelle zich nu dezen cirkel als een terrein van 12 bunders voor, waarvan de genoemde ster water, en het overige land is, dan is de vraag, hoeveel water en hoeveel land in deze 12 bunders begrepen is?

Opgelost *door* J. S. Speijer, J. Acquoy, Bas Backer, S. T. Boas, C. J. Bolten, W. G. van Delden, L. Lieuwes, D. S. Waterman, G. Koster, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoek *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. S. Speijer.

Laat Fig. 119 den cirkel, met de daarin geconstrueerde ster, voorstellen, dan blijkt, na de lijnen AM, BM en AB getrokken te hebben, uit de figuur terstond, dat de inhoud

der ster gelijk is aan 12 maal den inhoud van het cirkelsegment ABC, waaraan de cirkelsegmenten AMD, AME, BMF, BMG, volgens de constructie, gelijk en gelijkvormig zijn.

Nu is, daar de boog AB 60° bevat, indien men den straal des cirkels r noemt, (volgens LACROIX, *Trigonom.* door I. R. SCHMIDT, § 46).

$$Inh. Segm. ABC = \frac{1}{2} r^2 (Boog. 60° - Sin. 60°) = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right),$$

bijgevolg $Inh. ster = 6r^2\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = r^2(2\pi - 3\sqrt{3})$.

Daar verder de inhoud des geheelen cirkels door $r^2\pi$ wordt uitgedrukt en 12 bunders bedraagt, heeft men, door x het aantal bunders in de ster begrepen voorstellende, de evenredigheid

$$r^2\pi : r^2(2\pi - 3\sqrt{3}) = \overset{\text{Bunders}}{12} : \overset{\text{Bunders}}{x},$$

waaruit volgt $x = \frac{12(2\pi - 3\sqrt{3})}{\pi} = 12\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)$.

Deze waarde door logarithmen berekenende, heeft men:

$$Log. 3 = 0,4771213$$
$$Log. \sqrt{3} = 0,2385606$$
$$Log. 3\sqrt{3} = 0,7156819$$
$$Log. \pi = 0,4971499$$
$$Log. \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 0,2185320$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 1,6539868$$
$$2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} = 0,3460132$$
$$x = 12\left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) = 4,1521584;$$

in de opgegevene 12 bunders, zijn dus 4, 1521584 bunders water en bijgevolg 7, 8478416 bunders land begrepen.

CCXII. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Deel het getal 90 in vier deelen, zoo dat het eerste deel een zeven-, het tweede een acht-, het derde een negen- en het vierde een tienhoekig getal zij, waarvan de wortels onderling gelijk zijn?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, S. T. Boas, C. J. Bolten, F. C. Radijs, J. S. Speijer, A. Vos, W. G. van Delden, H. Kloos, L. van de Kasteele, G. Koster, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, L. Lieuwes, D. S. Waterman, H. W. Weytingh *en* M. G. Snoer.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat de wortel der genoemde veelhoekige getallen door x worden voorgesteld, dan is

het zevenhoekige getal $\frac{5x^2 - 3x}{2}$,

het achthoekige $\frac{6x^2 - 4x}{2}$,

het negenhoekige $\frac{7x^2 - 5x}{2}$

en het tienhoekige $\frac{8x^2 - 6x}{2}$;

de som van deze deelen moet het getal 90 opleveren, men heeft derhalve

$$13x^2 - 9x = 90$$

of

$$x^2 - \frac{9}{13}x = \frac{90}{13},$$

waaruit gevonden wordt

$$x = 3 \quad \text{of} \quad x = -\frac{30}{13}.$$

Zoo men $x = 3$ neemt, zijn de begeerde deelen:

18, 21, 24 en 27;

neemt men echter $x = -\frac{30}{13}$, dan vindt men voor de deelen:

$$\frac{2835}{169}, \frac{3480}{169}, \frac{4125}{169} \text{ en } \frac{4770}{169}.$$

Aanmerking. Men ziet dat de deelen, waarin het getal 90 verdeeld is, eene rekenkunstige reeks vormen, hetgeen eene algemeene eigenschap is, van de opvolgende veelhoekige getallen, die denzelfden wortel hebben.

CCXIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage.

Men vraagt eene reeks van zamengestelde getallen, die ieder uit een geheel getal en een eigenlijk gebroken bestaan, te vinden, waarvan niet alleen de achtereenvolgende

geheelen, maar ook de achtereenvolgende tellers en noemers der breuken, ieder in het bijzonder, opklimmende rekenkunstige reeksen vormen; zoodanig, dat, wanneer men iedere term van de eerstgenoemde reeks tot eene oneigenlijke breuk herleidt, alsdan de teller en noemer, van iedere breuk, de regthoekszijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek voortbrengen?

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, H. G. Witlage, A. Vos, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* A. F. van de Laar, Junior.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Laat een willekeurig zamengesteld getal door

$$N + \frac{m}{n} \; (m < n \text{ zijnde})$$

voorgesteld worden, dan is

$$\frac{Nn + m}{n}$$

de oneigenlijke breuk, waartoe dat zamengestelde getal herleid wordt.

Zullen nu teller en noemer van deze oneigenlijke breuk de regthoekszijden van eenen rationalen regthoekigen driehoek zijn, dan moet $(Nn + m)^2 + n^2$ een volkomen vierkant zijn; stellen wij derhalve

$$(Nn + m)^2 + n^2 = \left(Nn + m + \frac{p}{q}n\right)^2,$$

waarin p en q twee geheele positieve, doch onderling ondeelbare, getallen verbeelden, dan vindt men daaruit gemakkelijk

$$\frac{m}{n} = \frac{q^2 - 2Npq - p^2}{2pq};$$

wegens de onderlinge ondeelbaarheid van p en q kan het gebroken $\frac{q^2 - 2Npq - p^2}{2pq}$ of alleen door 2, of in het geheel niet verkleind worden, naar gelang p en q al of niet beide onevene getallen zijn; stellen wij alzoo

$$m = \frac{q^2 - 2Npq - p^2}{r} \quad \text{en} \quad n = \frac{2pq}{r},$$

waarin r niet anders dan 2 of 1 zijn kan, dan zijn m en n

onderling ondeelbare getallen en dus is $\frac{m}{n}$ een onverkleinbaar gebroken; neemt men verder p en q zoodanig, dat m positief en kleiner dan n zij, dan moeten in den vorm

$$N + \frac{m = \frac{q^2 - 2Npq - p^2}{r}}{n = \frac{2pq}{r}} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

al de gevraagde zamengestelde getallen begrepen zijn.

Wanneer men voor N achtervolgens de termen eener willekeurige rekenkunstige reeks neemt, dan zijn in den vorm $a + bN$ de termen van iedere andere willekeurige rekenkunstige reeks begrepen; de begeerde zamengestelde getallen moeten dus ook in den vorm

$$N + \frac{m = a' + b'N}{n = a + bN} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

begrepen zijn. De vormen (A) en (B) vergelijkende, blijkt dus, dat voor alle waarden van N

$$a + bN = \frac{2pq}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en

$$a' + b'N = \frac{q^2 - 2Npq - p^2}{r} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

moet wezen. Indien wij uit (1) trekken

$$q = \frac{ar + brN}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3);$$

en deze waarde in (2) overbrengen, komt er na herleiding

$$a' + b'N = \frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} + \frac{a(br - 2p^2)}{2p^2}N + \frac{b(br - 4p^2)}{4p^2}N^2$$

en daar deze vergelijking voor alle waarden van N moet doorgaan, hebben wij

$$a' = \frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$b' = \frac{a(br - 2p^2)}{2p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

en

$$0 = \frac{b(br - 4p^2)}{4p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6);$$

uit de vergelijking (6) volgt onmiddellijk

$$b = \frac{4p^2}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7);$$

door substitutie dezer waarde voor b, veranderen (3) en (5) in

$$q = \frac{ar + 4p^2N}{2p} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

en

$$b' = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9);$$

terwijl door substitutie van (4), (7) en (9) in (B), of van (8) in (A), gevonden wordt

$$N + \frac{m = \frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} + aN}{n = a + \frac{4p^2}{r}N} \quad \ldots\ldots (C),$$

welke vorm nu gelijktijdig voldoet aan de twee voorwaarden, die in (A) en (B) ieder afzonderlijk liggen opgesloten.

Neemt men dus in (C) eerst $r = 1$, of $r = 2$, daarna voor p en a, onder zekere beperkingen, die wij terstond zullen aanwijzen, willekeurige getallen; en stelt men vervolgens voor N achtervolgens de termen eener gewone opklimmende rekenkunstige reeks, waarvan de eerste term groot genoeg is om m positief te maken, dan zal de daardoor ontstaande reeks van zamengestelde getallen, aan de vraag beantwoorden.

De genoemde beperkingen zijn de volgende:

1°. In de geheele bewerking des voorstels, en dus ook in den vorm (C), stelt niet alleen p een geheel positief getal voor, maar ook voor a moet een geheel positief getal genomen worden; want nam men voor a een gebroken, dan zou, omdat $\frac{4p^2}{r}N$ een geheel getal is, n geen geheel getal kunnen zijn; en nam men voor a een negatief getal, dan zouden de waarden van m geene opklimmende reeks kunnen uitmaken, omdat, b en N positief zijnde, altijd $a - bN$ de algemeene term eener afdalende rekenkunstige reeks is.

2°. Opdat m een geheel getal zij, moet $\frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r}$ ook een geheel getal wezen; is nu $r = 1$, dan is

$$\frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} = \frac{a^2}{4p^2} - p^2$$

en dus moet a door $2p$ deelbaar zijn.

Is echter $r = 2$, dan is

$$\frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} = \frac{a^2}{2p^2} - \frac{1}{2}p^2;$$

met $r = 2$ stemt overeen, dat p en q beide oneven getallen zijn; $\frac{1}{2}p^2$ is dus van den vorm $s + \frac{1}{2}$; $\frac{a^2}{2p^2}$ moet dus dienzelfden vorm hebben en daartoe wordt vereischt, dat a oneven en door p deelbaar zij.

3°. Door p en q hebben wij onderling ondeelbare getallen voorgesteld; daartoe moet in de vergelijking (8)

$$q = \frac{ar + 4p^2N}{2p} = \frac{ar}{2p} + 2pN,$$

het quotient $\frac{ar}{2p}$ geene factoren p, of geene factoren, die in p deelbaar zijn, bevatten, maar deze voorwaarde is daartoe ook voldoende.

Is $r = 1$ en dus

$$q = \frac{a}{2p} + 2pN,$$

waarmede overeenstemt, dat p en q niet tevens onevene getallen zijn, dan moet $\frac{a}{2p}$ onderling ondeelbaar met p zijn; is nu p even, zoo zal, door in het ooghouding dezer voorwaarde, q naar behooren oneven worden; maar is p oneven dan moet q even zijn, waartoe gevorderd wordt, dat het quotient $\frac{a}{2p}$ even, en bij gevolg a van den vorm $4s$ zij.

Is $r = 2$ en dus

$$q = \frac{a}{p} + 2pN,$$

waarmede overeenstemt, dat p en q beide onevene getallen zijn, dan moet $\frac{a}{p}$ onderling ondeelbaar met p alsook $\frac{a}{p}$ oneven en bijgevolg a oneven zijn.

4°. Opdat eindelijk altijd $m < n$ zij, moet voor alle waarden van N, van $N = 1$ af, tot $N = \infty$ toe, de ongelijkheid

$$\frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} + aN < a + \frac{4p^2}{r}N$$

plaats hebben, $N = 1$ nemende, moet dus

$$\frac{a^2r^2 - 4p^4}{4p^2r} + a < a + \frac{4p^2}{r}$$

zijn, waaruit dadelijk afgeleid wordt, dat men moet nemen

$$a < \frac{2p^2 \sqrt{5}}{r}.$$

Is aan de bovenstaande ongelijkheid voor $N = 1$ voldaan, dan zal aan dezelve, voor alle grootere waarden van N, alleen voldaan kunnen worden, indien men $a =$ of $< \frac{4p^2}{r}$ neemt; maar hierin ligt de voorwaarde $a < \frac{2p^2 \sqrt{5}}{r}$ reeds opgesloten, en derhalve behoeft men alleenlijk

$$a = \text{of} < \frac{4p^2}{r}$$

te nemen; voor $a = \frac{4p^2}{r}$, zullen de reeksen der tellers en noemers hetzelfde gemeen verschil verkrijgen; daar echter uit $a = \frac{4p^2}{r}$ volgt, $\frac{a}{2p} = \frac{2p}{r}$, strijdt deze gelijkheid tegen de vroegere voorwaarden, alleen met uitzondering van het geval, dat p en r beide de eenheid zijn.

Deze voorwaarden te zamen trekkende, blijkt dat men in (C) kan nemen:

I. $r = 1$ en p oneven; alsdan moet $a =$ of $< 4p^2$ genomen worden, en zoodanig, dat $\frac{a}{2p}$ een geheel getal van den vorm $2s$ zij, dat geene factoren met p gemeen heeft, bijv., voor $r = 1$, $p = 9$ en $a = 72$, gaat de vorm (C) over in

$$N + \frac{-65 + 72N}{36(2 + 9N)};$$

voor $r = 1$, $p = 1$ en $a = 4$, wordt (C)

$$N + \frac{3 + 4N}{4(1 + N)};$$

in deze vormen voor N achtervolgens de getallen 1, 2, 3, 4, enz. stellende, verkrijgt men voor de verlangde reeksen:

$$1\frac{7}{396},\ 2\frac{79}{720},\ 3\frac{151}{1044},\ 4\frac{223}{1368},\ \text{enz.}$$

$$1\frac{7}{8},\ 2\frac{11}{12},\ 3\frac{15}{16},\ 4\frac{19}{20},\ \text{enz.}$$

II. $r = 1$ en p even; alsdan moet $a < 4p^2$ genomen worden, zoodat $\frac{a}{2p}$ een geheel getal zij, dat geene factoren met p gemeen heeft en dus ook oneven is, bijv., voor $r = 1$, $p = 2$ en $a = 4$, verandert (C) in

$$N + \frac{-3 + 4N}{4(1 + 4N)};$$

en hierin voor N de getallen 1, 2, 3, 4 *enz.* stellende, komt er voor de verlangde reeks,

$$1\frac{1}{20},\ 2\frac{5}{36},\ 3\frac{9}{52},\ 4\frac{13}{68},\ \textit{enz.};$$

voor $r = 1$, $p = 4$ en $a = 8$, wordt (C)

$$N + \frac{-15 + 8N}{8(1 + 8N)};$$

en hierin voor N de getallen 2, 3, 4, *enz.* stellende, komt er voor de reeks:

$$2\frac{1}{136},\ 3\frac{9}{200},\ 4\frac{17}{264},\ 5\frac{25}{328},\ \textit{enz.}$$

III. $r = 2$; dan moeten voor p en a beide onevene getallen genomen worden, zoodat $a < 2p^2$ en $\frac{a}{p}$ een geheel getal zij, dat geene factoren met p gemeen heeft, bijv., voor $r = 2$, $p = 1$ en $a = 1$, gaat (C) over in

$$N + \frac{N}{1 + 2N};$$

hier in $N = 1, 2, 3, 4$, *enz.* nemende, verkrijgt men de reeks:

$$1\frac{1}{3},\ 2\frac{2}{5},\ 3\frac{3}{7},\ 4\frac{4}{9},\ \textit{enz.}$$

voor $r = 2$, $p = 5$ en $a = 5$, verkrijgt men den algemeenen term

$$N + \frac{-12 + 5N}{5(1 + 10N)};$$

en $N = 3, 4, 5$, *enz.* stellende, de reeks:

$$3\frac{3}{155},\ 4\frac{8}{205},\ 5\frac{13}{255},\ 6\frac{18}{305},\ \textit{enz.}$$

AANMERKINGEN. 1°. Met in achtneming der opgegevene voorwaarden, zal men, voor alle verschillende waarden van r, p en a, ook verschillende reeksen verkrijgen. Neemt men

echter r, p, a, alle drie geheel willekeurig, doch, om opklimmende reeksen te verkrijgen, positief, dan zal altijd nog de vorm (C) aan de vraag beantwoorden, mits men eerst het zamengestelde getal $N + \frac{m}{n}$, waarin dan m en n gebrokens of onderling deelbare getallen kunnen zijn en waarin ook $m > n$ kan wezen, tot den eenvoudigsten vorm herleidt; hierdoor zal men echter alleen reeksen verkrijgen, die ook door andere waarden voor r, p en a konden gevonden worden.

Bijv. $r = 1$, $p = 1$ en $a = \frac{1}{2}$ nemende, vindt men, na herleiding, voor den algemeenen term

$$N + \frac{-15 + 8N}{8(1 + 8N)},$$

die boven reeds op eene andere wijze gevonden was.

Voor $r = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, wordt de algemeene term

$$N + \frac{-3 + 4N}{4(1 + 4N)},$$

die boven mede reeds gevonden was.

2°. Stelt men in den vorm (C) eerst $r = 1$ en $\frac{a}{2p} = s$, vervolgens $r = 2$ en $\frac{a}{p} = s$, dan verkrijgt men de vormen:

$$N + \frac{m = s^2 - p^2 + 2psN}{n = \quad 2ps + 4p^2N} \ldots\ldots\ldots (D)$$

en

$$N + \frac{m = \frac{1}{2}(s^2 - p^2) + psN}{n = \quad ps + 2p^2N} \ldots\ldots\ldots (E),$$

waarin men ziet, dat wel m en n verschillen; maar $\frac{m}{n}$ dezelfde waarde heeft. Al de voorwaarden, die wij vroeger ter beperking der waarden van p en s hebben leeren kennen, worden nu eenvoudiger dus uitgedrukt: dat s en p onderling ondeelbare geheele positieve getallen moeten wezen; dat $s < 2p$ moet zijn en alleen voor $p = 1$, $s = 2p$ kan genomen worden; en dat men in (D) s of p slechts een van beide oneven mag, maar in (E) beide oneven moet nemen.

3°. Veronderstellende dat men voor N de termen wil nemen eener rekenkunstige reeks, welker verschil v is, dan is het verschil van de reeks der tellers, naar gelang men den vorm (D) of (E) neemt, $2psv$ of psv en het verschil van de reeks der noemers $4p^2v$ of $2p^2v$; het verschil van de reeksen der tellers en noemers is dus een veelvoud van het verschil van de reeks der geheelen. Het kleinste verschil, dat de reeks der tellers hebben kan, is 1; men verkrijgt deze reeks, door in (E) $p = s = v = 1$ te nemen. Het kleinste verschil, dat de reeks der noemers hebben kan, is 2; men verkrijgt deze reeks, door in (E) $p = v = 1$ te nemen, als wanneer ook $s = 1$ moet genomen worden; overigens moet het verschil der noemers altijd even zijn en eenen vierkanten factor bevatten. De verschillen van de reeksen der tellers en noemers zijn aan elkander gelijk, zoo men in (D) $s = 2p$ neemt; overigens hebben de noemers grooter verschillen dan de tellers.

4°. Onder deze beperkingen kan men reeksen van zamengestelde getallen, ter beantwoording des voorstels, verkrijgen waarvan de tellers of noemers met een gegeven verschil opklimmen. Wilde men, bijv., dat de noemers met het verschil 36 opklommen, dan zou men, den vorm (D) gebruikende, stellen

$$4p^2v = 36 \quad \text{of} \quad p^2v = 9;$$

hieraan kan alleen voldaan worden door te nemen $p = 3$ en $v = 1$, of $p = 1$ en $v = 9$; $p = 3$ en $v = 1$ nemende, moet $s < 2p$ en, omdat p oneven is, s even zijn, men kan dus $s = 2$ of $s = 4$ nemen; $p = 1$ en $v = 9$ nemende, moet $s =$ of $< 2p$ en wederom even zijn, als dan kan slechts $s = 2$ wezen. De algemeene term (D) wordt nu:

$$\text{voor } p = 3,\ v = 1,\ \text{en } s = 2 \ldots\ldots N + \frac{-5 + 12N}{12(1 + 3N)};$$

$$\text{voor } p = 3,\ v = 1,\ \text{en } s = 4 \ldots\ldots N + \frac{7 + 24N}{12(2 + 3N)};$$

$$\text{voor } p = 1,\ v = 9,\ \text{en } s = 2 \ldots\ldots N + \frac{3 + 4N}{4(1 + 4N)};$$

stelt men voor N in de twee eerste, alwaar $v = 1$ is, getallen, die met de eenheid opklimmen en in de derde,

alwaar $v = 9$ is, getallen, die met 9 opklimmen, dan verkrijgt men zamengestelde getallen, waarvan de noemers met 36 opklimmen.

Ook kon men den vorm (E) gebruiken en stellen

$$2p^2 v = 36 \quad \text{of} \quad p^2 v = 18,$$

waaraan alleen voldaan kan worden, door $p = 3$ en $v = 2$, of door $p = 1$ en $v = 18$. Neemt men $p = 3$, dan moet $s < 2p$, oneven en ondeelbaar met p zijn, zoodat dan $s = 1$ of $s = 5$ kan wezen; neemt men $p = 1$, dan moet weder $s < 2p$ en oneven en dus $s = 1$ zijn. De algemeene term (E) wordt nu:

voor $p = 3$, $v = 2$ en $s = 1$ ..... $N + \dfrac{-4 + 3N}{3(1 + 6N)}$;

voor $p = 3$, $v = 2$ en $s = 5$ ..... $N + \dfrac{8 + 15N}{3(5 + 6N)}$;

voor $p = 1$, $v = 18$ en $s = 1$ ..... $N + \dfrac{N}{1 + 2N}$;

Stelt men voor N, in de twee eerste, getallen die met 2, en in de derde, getallen die met 18 opklimmen, dan zal men almede reeksen van zamengestelde getallen bekomen, wier achtervolgende noemers 36 tot verschil hebben.

Behalve de reeksen in de zes uitgebragte algemeene termen begrepen, kan men er geene aanwijzen, wier noemers met het begeerde verschil 36 aangroeijen.

5°. Het verdient opmerking, dat, zoo men de hypothenusa berekent van den regthoekigen driehoek, die teller en noemer van de tot eene oneigenlijke breuk herleide vormen (D) en (E) tot regthoekszijden hebben, het verschil van die hypothenusa met de grootste regthoekszijde, onafhankelijk van N wordt; voor dat verschil zal men, bij den vorm (D), $2p^2$ en, bij den vorm (E), p^2 vinden, hetgeen bij elk juist de helft is van het verschil, waarmede de noemers of kleinste regthoekszijden aangroeijen, als men N achtervolgens met de eenheid laat opklimmen.

Elke reeks, die aan het opgegeven voorstel voldoet, zal dus de eigenschap hebben, dat, zoo men elk der zamengestelde getallen tot eene oneigenlijke breuk herleidt en den vierkantswortel uit de som der vierkanten van teller en noemer der oneigenlijke breuk trekt, alle die wortels, de oneig-

eenkomstige tellers der oneigenlijke breuken, met een even groot getal zullen overtreffen; welk getal, indien de reeks der geheelen met de eenheid opklimt, juist de helft zal zijn van het verschil, waarmede de noemers opklimmen.

Men kan dus, van alle die regthoekige driehoeken, de waarde der hypothenusen uitschrijven, zonder de magtsverheffing of worteltrekking uit te voeren. Nemen wij, bijv., de gevondene reeks:

$$1\frac{1}{20},\ 2\frac{5}{36},\ 3\frac{9}{52},\ 4\frac{13}{68},\ \textit{enz.}$$

dat is:

$$\frac{21}{20},\ \frac{77}{36},\ \frac{165}{52},\ \frac{285}{68},\ \textit{enz.}$$

dan zijn de kortste regthoekszijden:

20, 36, 52, 68, *enz.*

de langste regthoekszijden zijn:

21, 77, 165, 285, *enz.*

daar nu de reeks der kortsteregtshoekszijden, of der noemers met 16 opklimt, voegen wij de helft van dat verschil, en dus 8, bij de langste regthoekszijden of tellers, dan zullen de komende getallen.

29, 85, 173, 293, *enz.*

de hypothenusen zijn.

6°. Uit het verband van de twee vorige aanmerkingen, zal men gemakkelijk zien, hoe men een of meer reeksen van zamengestelde getallen kan aanwijzen, die alle rationale regthoekige driehoeken bevatten, waar van de zijden onderling ondeelbaar zijn en waarvan de hypothenusa en de langste regthoekszijde een gegeven verschil hebben; uit het voorbeeld, in de vierde aanmerking behandeld, volgt, dat, wanneer dit verschil 18 moet bedragen, de driehoeken begrepen zijn in de beide reeksen, die $N + \frac{-5 + 12N}{12(1 + 3N)}$ en $N + \frac{7 + 24N}{12(2 + 3N)}$ tot algemeene termen hebben; te weten:

$$1\frac{7}{48},\ 2\frac{19}{84},\ 3\frac{31}{120},\ \textit{enz.} \quad \text{en} \quad 1\frac{31}{60},\ 2\frac{55}{96},\ 3\frac{79}{132},\ \textit{enz.}$$

CCXIV. Voorstel.

Door J. Sjoenis.

Men vraagt de kromme lijn, welke coördinaten zijn:

$$x = \frac{z}{a}\sqrt{(2az - z^2)} \quad en \quad y = \frac{az - z^2}{a},$$

door punten te beschrijven; eene zamenhangende beweging te vinden, waardoor dezelve kan worden voortgebragt; en verder haren loop te onderzoeken?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, D. van Lankeren Matthes, A. Vos *en* J. Sjoenis.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Wanneer men de vergelijkingen

$$x = \frac{z}{a}\sqrt{(2az - z^2)} \quad \text{en} \quad y = \frac{az - z^2}{a}$$

beide tot de tweede magt verheft, en de som dezer tweede magten neemt, komt er

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \text{of} \quad z = \sqrt{(x^2 + y^2)}.$$

Brengt men deze waarde van z in de tweede der gegevene vergelijkingen over, dan verkrijgt men

$$y = \frac{a\sqrt{(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2)}{a},$$

hetwelk derhalve de vergelijking van de begeerde kromme lijn is. Gaat men, van deze vergelijking tusschen regtstandige coördinaten, tot de poolvergelijking over, door de bekende substitutiën $x = z\ Cos.\ \phi$ en $y = z\ Sin.\ \phi$, dan vindt men terstond

$$z\ Sin.\ \phi = \frac{az - z^2}{a},$$

of na herleiding

$$z = a\ (1 - Sin.\ \phi).$$

Door den oorsprong der hoeken 90° te verplaatsen, en alzoo te stellen $\phi = 90^\circ - \psi$, verkrijgt deze poolvergelijking de gedaante

$$z = a(1 - Cos.\ \psi) = 2a\ Sin.^2 \tfrac{1}{2}\ \psi,$$

onder welken vorm men doorgaans de vergelijking der *gewone epicycloïde* voorstelt. De begeerde kromme lijn is dus eene gewone epicycloïde, waarvan de voortbrengende cirkels $\frac{1}{2}a$ tot straal hebben; hare constructie en eigenschappen zijn genoegzaam bekend, gelijk mede door welke zamenhangende

beweging zij wordt voortgebragt, zoo dat wij dit met stilzwijgen voorbijgaan.

(Men zie: J. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* bladz. 228; gelijk mede het CLI VOORSTEL van het V DEEL dezer *Verzameling*.)

CCXV. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

In eenen regthoekigen driehoek ABC (Fig. 120) *is, uit den regten hoek* B, *eene loodlijn* BD *op de schuinsche zijde* AC *nedergelaten; zoo nu gegeven is* AC $= a$, *en* AB + BC + BD $= b$, *begeert men de deelen* AD *en* CD *der schuinsche zijde te berekenen?*

OPGELOST *door* J. ACQUOY, G. KOSTER, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, A. VOS, H. A. HARTOGH, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR *en* M. G. SNOEK.

I. OPLOSSING VAN J. ACQUOY.

Stellen wij BD $= x$, en schrijven wij de gegevene vergelijking AB + BC + BD $= b$ in de gedaante

$$AB + BC = b - x,$$

dan vinden wij, door dezelve in het vierkant te brengen,

$$AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC = b^2 - 2bx + x^2;$$

omdat uit de bekende eigenschappen der regthoekige driehoeken volgt

$$AB^2 + BC^2 = a^2 \text{ en } AB \times BC = AC \times BD = ax,$$

verandert de vergelijking in

$$a^2 + 2ax = b^2 - 2bx + x^2$$

of $\quad x^2 - 2(a + b)x = a^2 - b^2,$

waaruit onmiddelijk volgt

$$x = a + b \pm \sqrt{2a(a + b)}.$$

Stellen wij verder AD $= \frac{1}{2}a + x$ en CD $= \frac{1}{2}a - x$, dan is, omdat volgens eene bekende eigenschap AD $\times$ CD $=$ BD^2 is,

$$(\tfrac{1}{2}a + x)(\tfrac{1}{2}a - x) = x^2$$

of $\quad \frac{1}{4}a^2 - x^2 = (a + b \pm \sqrt{2a(a + b)})^2$

en dus $\quad x^2 = \frac{1}{4}a^2 - (a + b \pm \sqrt{2a(a + b)})^2;$

hier, en derhalve ook in de gevondene formule voor x, kan het bovenste teeken niet gebruikt worden, omdat dan x^2 klaarblijkelijk negatief en x onbestaanbaar zou worden, wij hebben dus alleen

$$BD = x = a + b - \sqrt{2a(a+b)}$$

en $$x = \pm \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a + b - \sqrt{2a(a+b)})^2\}},(*)$$

zijnde het duidelijk, dat hier het bovenste teeken behoort bij eenen driehoek ABC, waarin AB > BC is, en het onderste bij eenen driehoek AB'C, waarin AB' < B'C is, welke driehoeken echter volkomen gelijk en gelijkvormig zijn en slechts in stand van elkander verschillen. Bepalen wij ons alleen tot den driehoek ABC dan hebben wij alleen

$$AD = \tfrac{1}{2}a + x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a+b-\sqrt{2a(a+b)})^2\}}$$

en $$CD = \tfrac{1}{2}a - x = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a+b-\sqrt{2a(a+b)})^2\}}$$

waardoor het voorstel is opgelost.

Wil men ook de regthoekszijden in de gegevens uitdrukken, dan stelle men, in de bovenstaande vergelijking

$$AB + BC = b - x \quad \text{en} \quad AB \times BC = ax,$$

voor x de gevondene waarde, waardoor men verkrijgt

$$AB + BC = -a + \sqrt{2a(a+b)}$$

en $$AB \times BC = a^2 + ab - a\sqrt{2a(a+b)};$$

vervolgens passe men hierop toe, de bekende leerwijze, ter bepaling van twee grootheden, welker som en product gegeven zijn, waardoor men vinden zal:

$$AB = \frac{-a+\sqrt{2a(a+b)}+\sqrt{\{-a^2-2ab+2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2}$$

en $$BC = \frac{-a+\sqrt{2a(a+b)}-\sqrt{\{-a^2-2ab+2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2}.$$

(*) De uitdrukking onder dit wortelteeken het verschil van twee vierkanten zijnde, kan ontbonden worden in de twee factoren

$$\frac{3}{2}a + b - \sqrt{2a(a+b)} \quad \text{en} \quad -\tfrac{1}{2}a - b + \sqrt{2a(a+b)};$$

de eerste kan weder in de gelijke factoren

$$(\sqrt{(a+b)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}a})^2$$

en de tweede in de ongelijke factoren

$$\sqrt{(a+b)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}a} + \sqrt{2(a+b)}$$
$$\sqrt{(a+b)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}a} - \sqrt{2(a+b)}$$

ontbonden worden; stelt men nu kortheidshalve

$$\sqrt{(a+b)} = p \quad \text{en} \quad \sqrt{\tfrac{1}{2}a} = q,$$

dan vindt men hierdoor

$$x = \pm (p-q)\sqrt{(p+q+p\sqrt{2})(p+q-p\sqrt{2})}.$$

Om regtstreeks aan de bedoeling van het voorstel te voldoen, moet BD positief en alzoo

$$a + b > \sqrt{2a(a + b)}$$

zijn; hieruit volgt achtervolgens

$$a^2 + 2ab + b^2 > 2a^2 + 2ab,$$

$$b^2 > a^2$$

en

$$b > a$$

zoo dat b grooter dan a zal moeten gegeven zijn.

Voorts vereischt de bestaanbaarheid des voorstels, zoo als uit de voor x gevondene waarde blijkt, dat men hebbe

$$a + b - \sqrt{2a(a + b)} = \text{of} < \tfrac{1}{2}a,$$

hieruit volgt wederom

$$\tfrac{1}{2}a + b = \text{of} < \sqrt{2a(a + b)},$$

$$\tfrac{1}{4}a^2 + ab + b^2 = \text{of} < 2a^2 + 2ab$$

en $\tfrac{1}{4}a^2 - ab + b^2 = \text{of} < 2a^2$;

voor $\frac{1}{4}a^2 - ab + b^2$ zou men willekeurig $(\frac{1}{2}a - b)^2$ of $(b - \frac{1}{2}a)^2$ kunnen schrijven, daar echter volgens het bovengezegde $b > a$, dus ook $b > \frac{1}{2}a$ is, hebben wij hier

$$(b - \tfrac{1}{2}a)^2 = \text{of} < 2a^2,$$

$$b - \tfrac{1}{2}a = \text{of} < a\sqrt{2}$$

en

$$b = \text{of} < \tfrac{1}{2}a + a\sqrt{2},$$

zoodat b niet grooter dan $\frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$ mag gegeven worden.

Zoolang $b < \frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$ is, vindt men twee driehoeken ABC en AB′C die aan het voorstel voldoen, maar is $b = \frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$, dan wordt $x = 0$ en dus $AD = CD = \frac{1}{2}a$, zoo dat men dan slechts eenen driehoek verkrijgt, die gelijkbeenig en tevens het maximum is van al de regthoekige driehoeken, die op AC als hypothenusa kunnen beschreven worden.

Om den driehoek ABC door constructie te vinden, zullen wij eerst de waarde voor BD gevonden construeren; men neme daartoe, op eene onbepaalde regte lijn, $AC = CE = a$ en $CF = b$, dan is $AE = 2a$ en $AF = a + b$; voorts beschrijve men op AF als middellijn eenen halven cirkel en rigte uit E eene loodlijn EG op AF op, dan is, na de lijnen AG en FG getrokken te hebben, in den regthoekigen driehoek AGF,

$$AG^2 = AF \times AE = 2a(a + b)$$

en dus

$$AG = \sqrt{2a(a + b)}.$$

Neemt men nu op AF, AH = AG, dan is

$$FH = AF - AH = AF - AG = a + b - \sqrt{2a(a+b)}$$

en dus is FH gelijk aan de hoogte BD des driehoeks

Beschrijft men dan eindelijk, op AC = a als middellijn, eenen halven cirkel, en trekt men, op eenen afstand BD = FH, de lijn KL evenwijdig met AC, snijdende de omtrek van dien halven cirkel in B en B', dan zal ABC of AB'C de gevraagde driehoek zijn; en AD en CD of AD' en CD', zullen de deelen der schuinsche zijde wezen.

Trekt men, in den halven cirkel ANC, den straal MN loodregt op AC, alsmede de lijnen AN en CN, dan is $AN = CN = \sqrt{(AM^2 + MN^2)} = \sqrt{2\,AM^2} = AM\sqrt{2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ en dus $AN + MN + CN = \frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$, daar nu boven gevonden is, dat b niet grooter dan $\frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$ zijn mag, zoo volgt, dat tot de mogelijkheid der constructie gevorderd wordt, dat de lijn CF = b niet grooter gegeven zij, dan de som der lijnen AN, MN en CN; terwijl zij tevens, omdat $b > a$ zijn moet, grooter dan AC of CE zal moeten gegeven wezen.

Aanmerking. In de *Meetkundige Analysis* van den Heer J. de Gelder, bladz. 41, waar hetzelfde vraagstuk behandeld is, vindt men de regthoekszijden door eene vierde magtsvergelijking bepaald. De hier gegevene oplossing strekt dus ter bevestiging van de aanmerkingen, op bladz. 42 en verv. van hetzelfde werk voorkomende.

Aanmerkingen van J. Badon Ghijben. 1°. De eindvergelijking ter aangehaalde plaats voorkomende, na van de errata gezuiverd te zijn, de gegevens in de hier aangenomene letters te hebben uitgedrukt, en door u eene regthoekszijde des driehoeks te hebben voorgesteld, is

$$u^4 + 2au^3 + a^2u^2 - 2a^2(a+b)u + a^2(b^2 - a^2) = 0;$$

dezelve kan dan ook ontbonden worden in de factoren:

$$u^2 + (a + \sqrt{2a(a+b)})u + a(a+b+\sqrt{2a(a+b)}) = 0$$

$$u^2 + (a - \sqrt{2a(a+b)})u + a(a+b-\sqrt{2a(a+b)}) = 0.$$

Deze nu, als vierkantsvergelijkingen, oplossende, vindt men voor u de vier waarden:

$$x = \frac{-a-\sqrt{2a(a+b)}+\sqrt{\{-a^2-2ab-2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2};$$

$$x' = \frac{-a-\sqrt{2a(a+b)}-\sqrt{\{-a^2-2ab-2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2},$$

$$x'' = \frac{-a+\sqrt{2a(a+b)}+\sqrt{\{-a^2-2ab+2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2},$$

$$x''' = \frac{-a+\sqrt{2a(a+b)}-\sqrt{\{-a^2-2ab+2a\sqrt{2a(a+b)}\}}}{2},$$

waarvan de beide laatste dezelfde uitdrukkingen zijn, als in de bovenstaande oplossing voor de regthoekszijden zijn gevonden.

Daar er nu, wanneer men geen onderscheid tusschen het regts of links geplaatst zijn des driehoeks maken wil, geen reden is, waarom de vierdemagts eindvergelijking eer de eene dan wel de andere regthoekszijde zou bepalen, moeten de beide regthoekszijden te gelijker tijd wortels dier vergelijking zijn; en daar gebleken is, dat de som der regthoekszijden is $-a \pm \sqrt{2a(a+b)}$, indien men, namelijk het dubbele teeken, dat in de formule voor x voorkomt, behoudt, moeten of x en x', of x'' en x''' de beide regthoekszijden van den begeerden driehoek zijn. Wanneer men dus op de plaatsing regts of links al geen acht slaat, zijn er evenwel in het algemeen nog twee antwoorden op het voorstel; het is echter klaar, dat het antwoord, door x en x' aangegeven wordende, onbestaanbaar is, zoo lang ten minste als men a en b positief neemt; uit hoofde van die onbestaanbaarheid, is in de oplossing het dubbele teeken voor $\sqrt{2a(a+b)}$ verworpen en daardoor is alleen het antwoord door x'' en x''' aangegeven, gevonden geworden; zonder de verwerping van dat dubbele teeken, zouden ook de waarden x en x' gevonden zijn, zoodat de gegevene oplossing even algemeen is, als die, welke in de vierdemagts eindvergelijking is opgesloten.

Hoezeer het geenen redelijken zin zou hebben, de gegevens a en b beide als negatief te willen beschouwen, zullen wij doen zien, dat het geenzins zoo ongerijmd is, aan b eene negatieve waarde toe te kennen; vooraf echter zullen wij nagaan, wat er uit volgen zou, indien men b wel positief, doch kleiner dan a verkoos te geven.

2°. Alleen om regtstreeks aan de bedoeling des voorstels te beantwoorden, is $b > a$ genomen; neemt men echter $b < a$, dan blijven alle de in de vorige oplossing gevondene uitdrukkingen bestaanbaar. Neemt men $b < a$, dan zal daaruit alleen voortvloeijen, dat BD en BC negatief worden; hierdoor verkrijgt men geen regtstreeksch antwoord op het voorstel, maar men komt toch tot geene onbestaanbaarheid; het negatief zijn van BD en BC toont alleen aan, dat, zoo $b < a$ gegeven wordt, men dan eigenlijk de vraag oplost, *om den driehoek te bepalen indien, behalve de schuinsche zijde, ook nog gegeven is de overmaat van de grootste regthoekszijde boven de som van de kleinste regthoekszijde en de loodlijn.* Neemt men bijv. in getallen $a = 338$, $b = 62$, zoo zal men vinden $AB = 312$, $BC = -130$, $BD = -120$, $AD = 280$ en $CD = 50$. Was dus gegeven $AC = a = 338$, $AB - BC - BD = b = 62$, dan zou men hebben $AB = 312$, $BC = 130$ en $BD = 120$.

3°. Wilde men $b = 0$ stellen, dan zouden weder BC en BD negatief worden, maar de overige lijnen zouden positief en alles zou bestaanbaar blijven; in dit geval zoude men klaarblijkelijk de vraag opgelost hebben, *om eenen driehoek te bepalen, als de hypothenusa gegeven was, onder beding, dat de grootste regthoekszijde gelijk moest zijn aan de som van de kleinste en de loodlijn.* Men vindt hiervoor $BD = a - a\sqrt{2}$.

4°. Geeft men aan b eene kleine negatieve waarde, dan blijft alles in denzelfden bestaanbaren toestand, ook ten opzigte van het positief of negatief zijn der lijnen; dewijl alsdan echter de negatieve som der lijnen BD en BC grooter is dan de positieve waarde van AB, zoo heeft men in dit geval eigenlijk de vraag opgelost: *om den driehoek te bepalen, als de overmaat van de som der kleinste regthoekszijde en loodlijn boven de grootste regthoekszijde gegeven is.*

5°. Stelt men $b = -\frac{1}{2}a$, dan geven de formulen: $AB = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $BC = -\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $BD = -\frac{1}{2}a$, $AD = \frac{1}{2}a$ en $CD = \frac{1}{2}a$; hierdoor is de vraag opgelost *om den driehoek te bepalen, bij welke de overmaat van de som der eene regthoekszijde en loodlijn boven de andere regthoekszijde, juist de helft van de schuinsche zijde is.*

6°. Zoolang b negatief kleiner dan $\frac{1}{2}a$ is, blijft de som der regthoekszijden

$$AB + BC = -a + \sqrt{2a(a + b)}$$

positief; voor $b = -\frac{1}{2}a$, is $AB + BC = 0$; maar zoo b negatief grooter dan $\frac{1}{2}a$ genomen wordt, is $AB + BC$ negatief, terwijl altijd AB positief en BC negatief blijft; voor $-b > \frac{1}{2}a$, is dus, hoezeer altijd $AB - BC$ positief is, BC wat de grootte betreft en zonder op den negatieven toestand te letten, grooter dan AB. In dit geval wordt dus het oneigenlijke antwoord, eene eigenlijke beantwoording van het voorstel: *om den driehoek te bepalen als, benevens de schuinsche zijde, de overmaat van de som der grootste regthoekszijde en loodlijn boven de kleinste regthoekszijde gegeven is.* Schrijft men de waarde voor x gevonden in de gedaante

$$x = \{\sqrt{(a + b)} - \sqrt{\tfrac{1}{2}a}\}\sqrt{\{-\tfrac{1}{2}a - b + \sqrt{2a(a + b)}\}},$$

dan ziet men dat, wanneer men b negatief van $< \frac{1}{2}a$ tot $> \frac{1}{2}a$ laat aangroeijen, x van positief negatief wordt, want voor $-b < \frac{1}{2}a$ is $\sqrt{(a + b)} > \sqrt{\frac{1}{2}a}$ en voor $-b > \frac{1}{2}a$ is $\sqrt{\frac{1}{2}a} > \sqrt{(a + b)}$; zoodra dus $-b > \frac{1}{2}a$ wordt, heeft men

$$AD = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a + b - \sqrt{2a(a + b)})^2\}}$$

$$\text{en } CD = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a + b - \sqrt{2a(a + b)})^2\}}.$$

7°. De negatieve waarde, die men aan b geven kan, mag nimmer de positieve waarde van a overtreffen, omdat dan $a + b$ negatief en dus $\sqrt{2a(a + b)}$ onbestaanbaar zou worden; maar zoolang men ook $-b < a$ neemt, zal in de gegevene oplossing des voorstels alles bestaanbaar blijven, tot dat, voor $b = -a$,

$$AB = 0,\ BC = -a,\ BD = 0,\ AD = 0 \text{ en } CD = a$$

wordt, zijnde hier AD en CD, door de formulen in 6° gegeven, bepaald.

8°. De grenzen dus, waarbuiten b niet gegeven mag worden, om het voorstel bestaanbaar te doen blijven, zijn $\frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$ en $-a$. In de oplossing is de voorwaarde der bestaanbaarheid uitgedrukt door de ongelijkheid

$$\tfrac{1}{2}a + b < \sqrt{2a(a + b)},$$

hieruit kunnen wij deze grenzen gemakkelijk afleiden.

Stelt men $b < -a$, dan wordt $a + b$ negatief en

$\sqrt{2a(a+b)}$ onbestaanbaar, men moet dus $b >$ of $= -a$ nemen.

Stelt men dat b tusschen $-a$ en $-\frac{1}{2}a$ ligt, dan is $\frac{1}{2}a+b$ negatief en dus van zelf aan de voorwaarde voldaan.

Stelt men dat b tusschen $-\frac{1}{2}a$ en $+\frac{1}{2}a$ ligt, dan is zoo wel $\frac{1}{2}a+b$ als $\frac{1}{2}a-b$ positief, omdat $\frac{1}{2}a+b$ positief is, mag men de bovenstaande ongelijkheid in het vierkant brengen, waardoor men vindt

$$\tfrac{1}{4}a^2+ab+b^2 < 2a^2+2ab$$

en $$\tfrac{1}{4}a^2-ab+b^2 < 2a^2;$$

omdat $\frac{1}{2}a-b$ positief is, is de vierkantswortel hieruit

$$\tfrac{1}{2}a-b < a\sqrt{2}$$

en dus moet $$b > \tfrac{1}{2}a-a\sqrt{2}$$

of $$b > -0,914\ldots\times a$$

zijn; hieraan zal van zelf, en dus ook aan de voorwaarde voor de bestaanbaarheid, voldaan zijn, indien b tusschen de gestelde grenzen $-\frac{1}{2}a$ en $+\frac{1}{2}a$ genomen wordt.

Stelt men eindelijk dat $b > \frac{1}{2}a$ is, dan is reeds in de oplossing gevonden, dat $b =$ of $< \frac{1}{2}a+a\sqrt{2}$ moet zijn; en het blijkt dus, dat aan de voorwaarde der bestaanbaarheid altijd voldaan zal zijn, indien b tusschen de grenzen $-a$ en $\frac{1}{2}a+a\sqrt{2}$ genomen wordt.

9°. Tot dus verre hebben wij alleen het antwoord in aanmerking genomen, dat in de waarden u' en u'' lag opgesloten; wij zullen nu het antwoord gadeslaan, dat door de waarden u en u' gegeven wordt. Zoo als wij reeds aanmerkten, behoort bij deze waarden het in de oplossing verworpene teeken, wij hebben dus nu

$$BD = x = a+b+\sqrt{2a(a+b)},$$

$$AB = u = \frac{-a-\sqrt{2a(a+b)}+\sqrt{(-a^2-2ab-2a\sqrt{2a(a+b)})}}{2},$$

$$BC = u' = \frac{-a-\sqrt{2a(a+b)}-\sqrt{(-a^2-2ab-2a\sqrt{2a(a+b)})}}{2},$$

en $$AB+BC = -a-\sqrt{2a(a+b)}.$$

Hier vordert de bestaanbaarheid vooreerst weder, dat $a+b$ positief of $-b < a$ zij en ten andere, dat men hebbe $$-a^2-2ab-2a\sqrt{2a(a+b)} > 0;$$

om hieraan te voldoen moet blijkbaar b negatief zijn, stellen wij daarom gemakshalve $b = -b'$, dan moet men hebben

$$-a^2 + 2ab' - 2a\sqrt{2a(a-b')} > 0,$$
$$-a + 2b' - 2\sqrt{2a(a-b')} > 0$$
of $$2b' - a > 2\sqrt{2a(a-b')};$$
nam men nu $b' < \frac{1}{2}a$, dan zou $2b' - a$ negatief zijn en alzoo blijkbaar aan deze ongelijkheid niet voldaan kunnen worden; vooreerst moet dus $b' > \frac{1}{2}a$ zijn, alsdan is $2b' - a$ positief en wij hebben verder:
$$4b'^2 - 4ab' + a^2 > 8a^2 - 8ab',$$
$$4b'^2 + 4ab' + a^2 > 8a^2,$$
$$2b' + a > 2a\sqrt{2};$$
$$b' > a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a$$
of $$b' > 0,914\ldots \times a.$$
Om de waarden x en x' bestaanbaar te hebben, moet bijgevolg b' tusschen $a\sqrt{2} - \frac{1}{2}a$ en a, of b tusschen $\frac{1}{2}a - a\sqrt{2}$ en $-a$ genomen worden; volgens het aangemerkte in 6°. is dus hier:
$$AD = \tfrac{1}{2}a - \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a + b + \sqrt{2a(a+b)})^2\}}$$
en $$CD = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2 - (a + b + \sqrt{2a(a+b)})^2\}}.$$
Men zal zich gemakkelijk overtuigen dat, b tusschen de genoemde grenzen genomen wordende, de in deze aanmerking voorkomende waarden van AD, CD en BD altijd positief, maar daarentegen AB en BC altijd negatief zijn.

Voor $b = -a$, heeft men hier even als in 7°
$AB = 0$, $BC = -a$, $BD = 0$, $AD = 0$ en $CD = a$; voor $b = \frac{1}{2}a - a\sqrt{2}$, heeft men hier:
$AB = -a\sqrt{2}$, $BC = -a\sqrt{2}$, $BD = \frac{1}{2}a$, $AD = \frac{1}{2}a$ en $CD = \frac{1}{2}a$, waardoor men op den driehoek ANC terug komt.

Het oneigenlijke antwoord, in de waarden x en x' opgesloten, vereischt dus, dat b negatief tusschen $-a$ en $\frac{1}{2}a - a\sqrt{2}$ gegeven zij, en beteekent dan in eenen eigenlijken zin: *dat men den driehoek bepaald heeft als, behalve de schuinsche zijde, gegeven is de overmaat van de som der regthoekszijden boven de loodlijn.*

10°. Om al deze bijzonderheden door eene figuur op te helderen, stelle men zich eenen cirkel voor (Fig. 121), op $AC = a$ als middellijn beschreven; op diezelfde middellijn als hypothenusa verbeelde men zich eenen regthoekigen driehoek ABC, welks loodlijn in het middelpunt van den cirkel neer komt; dan is $b = AB + BD + BC = \frac{1}{2}a + a\sqrt{2}$.

Laat men nu het toppunt B des driehoeks zich op den omtrek des cirkels bewegen, dan is zoo lang het punt op den boog BC blijft

$$b = AB_1 + B_1D_1 + B_1C < \tfrac{1}{2}a + a\surd 2 \text{ en } > a,$$

en tot dit geval behoort het eigenlijke antwoord, dat wij op het voorstel gevonden hebben.

Valt het bewegende punt in C, dan verdwijnen BD en BC en men heeft

$$b = AC = a.$$

Komt het bewegende punt in het volgende quadrant CB$_3$, bijv. in B$_2$, dan zijn BD en BC negatief geworden; dan heeft men

$$b = AB_2 - B_2D_2 - B_2C < a \text{ en } > -\tfrac{1}{2}a;$$

het punt B$_2$ zal in dit quadrant ergens zoodanig kunnen vallen, dat

$$AB_2 = B_2D_2 + B_2C \quad \text{en dus} \quad b = 0 \text{ is.}$$

Valt het bewegende punt in B$_3$, dan is

$$b = AB_3 - B_3D - B_3C = -\tfrac{1}{2}a.$$

Zoo lang het bewegende punt op het quadrant B$_3$A blijft, heeft men

$$b = AB_4 - B_4D_4 - B_4C < -\tfrac{1}{2}a \text{ en } > -a,$$

totdat, als eindelijk het bewegende punt in A komt, AB en BD weder verdwijnen, terwijl BC negatief blijft en langs AC valt; en dan heeft men

$$b = -AC = -a.$$

Tot hiertoe is de driehoek ABC begrepen gebleven in het antwoord, door de waarden u'' en u''' aangegeven; maar komt het bewegende punt door A op het quadrant AB, dan wordt BD weder positief, maar AB die nog altijd positief was, wordt negatief, terwijl BC negatief blijft; in dit geval hebben wij alzoo

$$b = -AB_5 + B_5D_5 - B_5C > -a \text{ en } < \tfrac{1}{2}a - a\surd 2,$$

totdat eindelijk, als het bewegende punt weder in B komt, van waar het was uitgegaan,

$$b = -AB + BD - BC = \tfrac{1}{2}a - a\surd 2$$

wordt. Zoo lang het bewegende punt zich dus op het quadrant AB bevindt, is de driehoek AB$_5$C begrepen in het antwoord door de waarden u en u' aangegeven.

11°. Eindelijk; wanneer men elke wijziging, die wij aan

het voorstel gegeven hebben, om in elk bijzonder geval het oneigenlijke antwoord eigenlijk te maken, als een nieuw voorstel beschouwt, en hetzelve oplost, dan zal men altijd tot dezelfde eindvergelijkingen moeten komen, als wij uit de aangehaalde vierdemagts vergelijking hebben afgeleid.

II. OPLOSSING van G. KOSTER.

Stel $AB = v + w$ en $BC = v - w$, dan is $BD = b - 2v$; en dan heeft men, door de eigenschappen der regthoekige driehoeken

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \text{ en } AB \times BC = AC \times BD,$$

de twee volgende vergelijkingen

$$2v^2 + 2w^2 = a^2 \text{ en } v^2 - w^2 = a(b - 2v);$$

de helft van de eerste vergelijking bij de tweede optellende, komt er

$$2v^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + a(b - 2v),$$

of

$$v^2 + av = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab,$$

dat is, zoo men aan beide zijden $\frac{1}{4}a^2$ optelt

$$(v + \tfrac{1}{2}a)^2 = \tfrac{1}{2}a(a + b),$$

waaruit, omdat $v + \frac{1}{2}a$ positief moet zijn, om aan den eigenlijken zin des voorstels te beantwoorden, volgt:

$$v + \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a(a + b)}$$

en

$$v = -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}\sqrt{2a(a + b)}.$$

Verder volgt uit de tweede vergelijking

$$w^2 + ab = v^2 + 2av,$$

hier de reeds gevondene vergelijking

$$\tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}ab = v^2 + av$$

aftrekkende, komt er

$$w^2 + \tfrac{1}{2}ab - \tfrac{1}{4}a^2 = av$$

of

$$w^2 = av - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{4}a^2;$$

hierin voor v de bovengevondene waarde stellende, vindt men

$$w^2 = -\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}ab + \tfrac{1}{2}a\sqrt{2a(a + b)}$$

en

$$w = \tfrac{1}{2}\sqrt{\{-a^2 - 2ab + 2a\sqrt{2a(a + b)}\}}.$$

Men heeft dus v en w in bekenden uitgedrukt, derhalve zijn ook de regthoekszijden $v + w$ en $v - w$ bekend.

Eindelijk heeft men ter berekening van AD en CD de evenredigheden:

$$AC : AB = AB : AD$$

of $a : v + w = v + w : AD$;

en $AC : BC = BC : CD$

of $a : v - w = v - w : CD$;

uit welke evenredigheden dadelijk volgt

$$AD = \frac{(v + w)^2}{a} \text{ en } CD = \frac{(v - w)^2}{a},$$

waardoor ook de deelen der schuinsche zijde bekend worden.

III. Oplossing van C. J. Bolten.

Stellende *hoek* BAC $= \phi$, dan is

$$AB = a \; Cos. \; \phi,$$

$$BC = a \; Sin. \; \phi$$

en $BD = AB \; Sin. \; \phi = a \; Sin. \; \phi \; Cos. \; \phi$;

nu is $AB + BC + BD = b$,

derhalve $a(Sin. \; \phi + Cos. \; \phi + Sin. \; \phi \; Cos. \; \phi) = b$

of $Sin. \; \phi + Cos. \; \phi = \frac{b}{a} - Sin. \; \phi \; Cos. \; \phi$;

brengende deze vergelijking tot de tweede magt, dan komt er

$$Sin.^2 \phi + 2 Sin. \phi Cos. \phi + Cos.^2 \phi = \frac{b^2}{a^2} - 2 \frac{b}{a} Sin. \phi Cos. \phi + Sin.^2 \phi Cos.^2 \phi$$

of, $Sin.^2 \; \phi + Cos.^2 \; \phi = 1$ substituerende, na verschikking

$$Sin.^2 \phi \; Cos.^2 \phi - \frac{2(a + b)}{a} Sin. \phi \; Cos. \phi = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

waaruit men terstond vindt

$$Sin. \phi \; Cos. \phi = \frac{a + b \pm \sqrt{2a(a + b)}}{a}$$

of $$Sin. \; 2 \phi = 2 \frac{a + b \pm \sqrt{2a(a + b)}}{a}.$$

Hierin moet alleen het benedenste teeken gebruikt worden, omdat door het bovenste teeken $Sin. \; 2 \phi > 1$ zou worden.

Daar nu $Sin. \phi \; Cos. \phi$ gevonden is, is ook $BD = a \; Sin. \phi \; Cos. \phi$ bekend, gelijk mede de hoek ϕ, waardoor $AD = BD \; Cot. \; \phi$ en $CD = BD \; Tang \; \phi$ mede bekend worden en het voorstel dus opgelost is.

IV. Oplossing van W. G. van Delden.

Stellen wij *hoek* C $-$ *hoek* A $= 2 \phi$, dan is

hoek C $= 45° + \phi$ en *hoek* A $= 45° - \phi$;

nu is $AB = AC \times Sin.\ C = a\ Cos.\ (45° - \phi)$,

$BC = AC \times Sin.\ A = a\ Cos.\ (45° + \phi)$,

en dus $AB + BC = a\ \{Cos.\ (45° - \phi) + Cos.\ (45° + \phi)\}$

of $AB + BC = 2a\ Cos.\ 45°\ Cos.\ \phi = a\sqrt{2}.\ Cos.\ \phi.$

Voorts is

$$BD = \frac{2\ Inh.\ ABC}{AC} = \frac{AB \times BC}{AC},$$

dus $BD = a\ Cos.\ (45° - \phi)\ Cos.\ (45° + \phi) = \frac{1}{2}a\ Cos.\ 2\phi$

of $BD = \frac{1}{2}a\ (2\ Cos.^2\ \phi - 1) = a\ Cos.^2\ \phi - \frac{1}{2}a$;

deze waarden voor AB + BC en BD bij elkander optellende, hebben wij

$$b = a\ Cos.^2\ \phi + a\sqrt{2}.\ Cos.\ \phi - \frac{1}{2}a,$$

dat is $Cos.^2\ \phi + \sqrt{2}.\ Cos.\ \phi = \frac{b}{a} + \frac{1}{2}$,

waaruit volgt

$$Cos.\ \phi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{b}{a}\right)}.$$

Hierdoor wordt ϕ en dus ook *hoek* A en *hoek* C bekend, waaruit dan al het overige op de gewone wijze kan berekend worden.

CCXVI. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

Twee geheele getallen te vinden, zoodat hunne som opgeteld bij de som hunner vierkanten, zevenmaal zoo groot zij, als hun verschil opgeteld bij het verschil hunner vierkanten?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, A. VOS, J. S. SPEIJER, BAS BACKER, H. A. HARTOGH, G. KOSTER, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, S. T. BOAS, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, M. G. SNOEK *en* A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Stelt men voor de gevraagde getallen x en y, dan moet men volgens het voorstel hebben

$$x + y + x^2 + y^2 = 7(x - y + x^2 - y^2),$$

waarvoor men ook schrijven kan

$(x^2 + x) + (y^2 + y) = 7(x^2 + x) - 7(y^2 + y)$..(1)

of $8(y^2 + y) = 6(x^2 + x)$

of $4(y^2 + y) = 3(x^2 + x)$..................(2).

Stelt men in deze laatste vergelijking

$$x = \frac{p-1}{2} \text{ en } y = \frac{q-1}{2},$$

dan verandert dezelve in

$$q^2 - 1 = \frac{3(p^2-1)}{4},$$

waaruit volgt $$q^2 = \frac{3p^2+1}{4}$$

of $$q = \tfrac{1}{2}\sqrt{(3p^2+1)};$$

zoodat men nu nog p zoodanig moet bepalen, dat de uitdrukking $3p^2 + 1$ een volkomen vierkant zij.

Volgt men hiertoe de leerwijze opgegeven bij Euler, *Algebra*, 2e Deel, bladz. 328 en verv. dan vindt men voor de waarden, die p kan hebben, de volgende reeks:

0, 1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, *enz.*

en voor de overeenkomstige waarden van q:

$\frac{1}{2}$, 1, $3\frac{1}{2}$, 13, $48\frac{1}{2}$, 181, $675\frac{1}{2}$, 2521, *enz.*

van welke beide reeksen elke term wordt gevonden, door het viervoud van den voorgaanden term met den tweeden voorgaanden te verminderen.

Daar echter voor x en y geheele getallen gevraagd worden, zoo is het duidelijk, dat alleen de 2de, 4de, 6de, en in het algemeen alleen de evene termen der beide reeksen kunnen gebruikt worden, waardoor men voor de gevraagde getallen vindt:

$x = 0$ en $y = 0$, $x = 7$ en $y = 6$, $x = 104$ en $y = 90$, $x = 1455$ en $y = 1260$, *enz.*

Aanmerking. Uit de vergelijkingen (1) en (2) volgt, dat de gevondene waarden voor x en y de wortels zullen zijn van twee pronikgetallen, wier som zevenmaal grooter is dan hun verschil, of die tot elkander in reden zijn als 4 tot 3.

CCXVII. Voorstel.

Door S. T. Boas.

Vijf kinderen, te zamen 140 *jaren oud, moeten op de volgende wijze eenig geld onder elkander verdeelen: eerst moet het jongste kind zoo veel guldens nemen als het jaren oud is en daarna nog* $\frac{1}{10}$ *gedeelte van hetgeen er overblijft; vervolgens moet op een na het jongste insgelijks*

zoo veel guldens nemen als het jaren oud is, met nog $\frac{1}{10}$ gedeelte van hetgeen er dan overblijft; en zoo verder elk der anderen op zijne beurt, tot aan het oudste kind toe, waardoor de te verdeelen som juist uitgeput wordt. Na deze deeling aldus bewerkstelligd te hebben, bevinden zij, dat ieder even veel heeft. Men vraagt hoe oud elk dier kinderen was, en hoe groot de te verdeelene som? (*)

Opgelost *door* J. Badon Ghijben, J. Acquoy, S. T. Bors, C. J. Bolten, W. G. van Delden, G. Koster, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, L. Lieuwes, F. C. Radijs, W. J. C. Rammelman Elsevier, C. van Schaick, M. G. Snoek, J. S. Speijer, A. Vos *en* H. W. Weytingh.

Oplossing *van* J. Badon Ghijben.

Stellen wij, om de vraag in het algemeen op te lossen, dat er p kinderen zijn, dat de som hunner jaren s is, dat elk, na zoo veel guldens genomen te hebben als hij jaren telt, $\frac{1}{q}$ deel van de rest moet nemen; laat voorts het aandeel, dat elk na de volbragte deeling verkregen heeft, x en bijgevolg de te verdeelen som px guldens zijn; en stellen wij eindelijk dat, van den jongsten af te rekenen, het n^{de} kind N jaren oud zij, dan zal, als de deeling aan de beurt van het n^{de} kind komt, reeds door $(n-1)$ kinderen eene som van $(n-1)\,x$ guldens weggenomen zijn en er dus nog $px-(n-1)\,x$ guldens voorhanden wezen. Hiervan neemt nu het n^{de} kind eerst N guldens, daarna $\frac{1}{q}$ deel van de rest, en dus in het geheel $N+\frac{1}{q}\,(px-(n+1)x-N)$ guldens, maar dit aandeel is, even als dat van de overige kinderen, x guldens, bijgevolg hebben wij de vergelijking

$$N+\frac{1}{q}\,(px-(n-1)\,x-N)=x,$$

waaruit wij dadelijk vinden

$$N=\frac{(q-1)-(p-n)}{q-1}\,x \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

(*) Paissen, *Algebra*, Bladz. 102, N°. 48.

of $$N = x - \frac{p-n}{q-1}x.$$

Nemen wij hierin achtervolgens $n = 1$, $n = 2$, enz., $n = p - 1$, $n = p$, dan vinden wij voor de jaren van:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{het} & 1^{ste} & \text{kind} \ldots\ldots\ldots & x - \frac{p-1}{q-1}x, \\ \text{—} & 2^{de} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & x - \frac{p-2}{q-1}x, \\ \text{—} & 3^{de} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & x - \frac{p-3}{q-1}x, \\ & \text{enz.} & & \text{enz.} \\ \text{—} & (p-2)^{de} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & x - \frac{2}{q-1}x, \\ \text{—} & (p-1)^{de} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & x - \frac{1}{q-1}x, \\ \text{—} & p^{de} & \text{—} \ldots\ldots\ldots & x; \end{array}\right\} (2)$$

deze uitdrukkingen vormen eene rekenkunstige reeks van p termen; de som dezer reeks is de som der jaren, die gelijk s gegeven is, wij hebben alzoo de vergelijking

$$\tfrac{1}{2}p\left\{x + x - \frac{p-1}{q-1}x\right\} = s,$$

waaruit wij terstond vinden

$$x = \frac{2s(q-1)}{p(2q-p-1)} \ldots\ldots\ldots (3)$$

en $$px = \frac{2s(q-1)}{2q-p-1}.$$

De te verdeelene som px guldens is hierdoor bekend en, de gevondene waarde van x in de uitdrukkingen (2) stellende, vindt men de jaren van elk kind.

In het opgegeven voorstel is $p = 5$, $q = 10$, $s = 140$, waaruit door (3) volgt $x = 36$; de te verdeelene som was dus $px = 180$ guldens, en de jaren der kinderen zijn volgens (2): $x - \frac{4}{9}x = 20$, $x - \frac{3}{9}x = 24$, $x - \frac{2}{9}x = 28$, $x - \frac{1}{9}x = 32$ en $x = 36$ jaren.

Aanmerking. Uit de vergelijking (1) blijkt, dat het voorstel voor geene eigenlijke oplossing vatbaar zou zijn, indien $p - n =$ of $> q - 1$ wezen kon, want hierdoor zou N nul of negatief worden. Voor alle waarden die n hebben kan, moet dus

$$p - n < q - 1$$

zijn; maar $p - n$ is het grootst als $n = 1$ is, derhalve moeten de gegevens zoodanig zijn, dat men hebbe

$$p - 1 < q - 1$$

of

$$p < q;$$

en is aan deze voorwaarde voldaan, dan zal ook, blijkbaar door de formule (3), x positief worden.

CCXVIII. VOORSTEL.

Door H. W. BLOEM.

Op eenen hefboom van de eerste soort, welke 20 *palmen lang is, zijn magt en last in evenwigt; zoo men magt en last elk met* 1 *pond vermindert, moet, tot behoud van het evenwigt, het steunpunt* 1 *palm digter bij het lastpunt geplaatst worden; maar, zoo men het aantal ponden van magt en last kwadrateert, moet het steunpunt, tot behoud van het evenwigt, nog* 2 *palmen digter bij het lastpunt zijn, dan in het laatstvorige geval. Men vraagt naar het gewigt van magt en last, zoo mede naar de lengte der hefboomsarmen?*

OPGELOST *door* H. W. BLOEM, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, A. VOS, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, G. KOSTER, S. T. BOAS, W. G. VAN DELDEN, L. VAN DE KASTEELE, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS *en* M. G. SNOER.

OPLOSSING *van* H. W. BLOEM.

Daar de lengte van den hefboom 20 palmen is, kunnen wij voor de lengte der armen stellen $10 + x$ palmen en $10 - x$ palmen. Daar magt en last in evenwigt zijn, staan zij, volgens de theorie van den hefboom, tot elkander in de omgekeerde reden van de lengte der hefbooms-armen; wij kunnen dus stellen, dat de magt $p(10 - x)$ ponden en de last $p(10 + x)$ ponden zij. Daar verder, door de opgegevene veranderingen van magt en last, en de overeenkomstige verplaatsingen van het steunpunt, het evenwigt behouden blijft, blijft ook de genoemde omgekeerde verhouding bestaan, waardoor wij hebben de evenredigheden:

$$p(10 - x) - 1 : p(10 + x) - 1 = 9 - x : 11 + x$$

en $$p^2(10 - x)^2 : p^2(10 + x)^2 = 7 - x : 13 + x.$$

Uit de laatste evenredigheid volgt:

$$(10-x)^2(13+x)=(10+x)^2(7-x),$$
welke vergelijking, na ontwikkeling en rangschikking, verandert in
$$x^3+3x^2-100x+300=0,$$
dat is: $$(x-5)(x^2+8x-60)=0,$$
waaruit men, op de gewone wijze, voor x de drie volgende waarden vindt:
$$x=5,\quad x=-4+2\sqrt{19}\ \text{en}\ x=-4-2\sqrt{19}.$$
Uit de eerste der bovenstaande evenredigheden volgt
$$p(10-x)(11+x)-(11+x)=p(10+x)(9-x)-(9-x)$$
welke vergelijking, na ontwikkeling en rangschikking, verandert in
$$20p=2x+2,$$
waaruit volgt $$p=\tfrac{1}{10}(x+1);$$
met de bovengevondene waarden voor x stemmen dus respectievelijk de volgende waarden voor p overeen:
$$p=\tfrac{3}{5},\quad p=\tfrac{1}{10}(-3+2\sqrt{19})\ \text{en}\ p=\tfrac{1}{10}(-3-2\sqrt{19}).$$
Wij hebben dus drie antwoorden op het voorstel:

1°. Voor $x=5$ en $p=\frac{3}{5}$, zijn de hefbooms-armen $10+x=15$ en $10-x=5$ palmen; de magt en last $p(10-x)=3$ en $p(10+x)=9$ ponden.

2°. Voor $x=-4+2\sqrt{19}$ en $p=\frac{1}{10}(-3+2\sqrt{19})$, zijn de hefbooms-armen $10+x=6+2\sqrt{19}$ en $10-x=14-2\sqrt{19}$ palmen; de magt en last $p(10-x)=\frac{1}{5}(-59+17\sqrt{19})$ en $p(10+x)=\frac{1}{5}(29+3\sqrt{19})$ ponden.

3°. Voor $x=-4-2\sqrt{19}$ en $p=\frac{1}{10}(-3-2\sqrt{19})$, heeft men voor de armen $10+x=6-2\sqrt{19}$ en $10-x=14+2\sqrt{19}$ palmen; en voor magt en last $p(10-x)=-\frac{1}{5}(59+17\sqrt{19})$ en $p(10+x)=\frac{1}{5}(29-3\sqrt{19})$ ponden.

Aanmerking van J. Acquoy. De beide eerste antwoorden voldoen regtstreeks aan de opgaaf; maar dewijl door het laatste de magt en de hefbooms-arm, waarop de magt werkt, beide negatief worden, terwijl de genoemde arm korter is dan de arm, waarop de last werkt, zoo behoort dit antwoord tot eenen hefboom van de derde soort. Indien men de vraag algemeener dus voorstelt: *Op eenen hefboom, waarbij de afstand van het magtpunt tot het last-*

punt 20 palmen is, zijn magt en last in evenwigt; zoo men enz. dan zullen alle drie de antwoorden aan dezelve voldoen, indien men slechts het negatief zijn van hefbooms-arm en magt, in de behoorlijke beteekenis opvat.

CCXIX. VOORSTEL.

Door H. W. BLOEM.

Op eenen hefboom van de eerste soort, zijn magt en last in evenwigt; zoo men beide met 2 ponden vermindert, moet het steunpunt, tot behoud van het evenwigt, 2 palmen digter bij het lastpunt geplaatst worden; verandert men den hefboom in eenen hefboom van de tweede soort, dat is: verwisselt men de plaats van het steun- en lastpunt; dan wordt dezelfde last in evenwigt gehouden met 1 pond minder magt; maar verandert men den hefboom in eenen hefboom van de derde soort, dat is: verwisselt men de plaats van het steun- en magtpunt, dan is dezelfde magt slechts genoegzaam, om met eenen last, die 4 ponden ligter is, evenwigt te maken. Men vraagt naar het gewigt van magt en last, alsmede naar de lengte der hefboomsarmen?

OPGELOST *door* H. W. BLOEM. J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, L. VAN DE KASTEELE, G. KOSTER, A. F. VAN DE LAAR, JUNIOR, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOEK *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* H. W. BLOEM.

Laten de hefbooms-armen, waarop respectievelijk magt en last werken, x en y palmen lang zijn, dan kunnen wij, volgens de theorie van den hefboom, stellen, dat de magt py en de last px ponden is. Volgens dezelfde theorie, geeft de eerste voorwaarde van het voorstel de evenredigheid

$$px - 2 : py - 2 = x + 2 : y - 2,$$

waaruit volgt $(px - 2)\ (y - 2) = (py - 2)\ (x + 2)$,

of na herleiding $p(x + y) = 4 + (x - y) \ldots (1)$.

Verwisselen wij steun- en lastpunt, zoo blijft y de afstand van deze punten, maar de afstand van steun- en magtpunt wordt dan $x + y$; daar nu aan den hierdoor verkregen hefboom van de tweede soort dezelfde last van px ponden, met 1 pond minder magt en dus met $py - 1$ ponden in evenwigt wordt gehouden, hebben wij

$$px : py - 1 = x + y : y,$$

waaruit volgt

$$pxy = (py - 1)(x + y),$$

of na herleiding

$$x + y = py^2 \ldots\ldots\ldots (2).$$

Verwisselen wij in tegendeel steun- en magtpunt, dan blijft x de afstand van deze punten, maar de afstand van steun- en lastpunt wordt dan $x + y$; daar nu, aan den alzoo verkregen hefboom van de derde soort, dezelfde magt van py ponden, met een 4 ponden ligter last, dat is met een last van $px - 4$ ponden, in evenwigt is, hebben wij

$$px - 4 : py = x : x + y,$$

waaruit volgt

$$pxy = (px - 4)(x + y),$$

of na herleiding

$$4(x + y) = px^2 \ldots\ldots\ldots (3).$$

Deelen wij nu de vergelijking (2) in de vergelijking (3), dan komt er

$$4 = \frac{x^2}{y^2};$$

om aan de bedoeling des voorstels te voldoen, moet $\frac{x}{y}$ positief zijn, want hadden x en y verschillende teekens, dan zou de hefboom van de eerste soort niet meer als zoodanig bestaan; voor den vierkantswortel uit de laatste vergelijking, kunnen wij dus alleen nemen

$$\frac{x}{y} = 2,$$

waaruit volgt $\quad x = 2y, \ldots\ldots\ldots (4);$

door deze waarde van x gaan de vergelijkingen (1) en (2) over in

$$3py = 4 + y \ldots\ldots\ldots (5)$$

en $\quad 3y = py^2 \ldots\ldots\ldots (6);$

uit (6) volgt terstond $\quad py = 3 \ldots\ldots\ldots (7),$

deze waarde in (5) stellende, komt er dadelijk

$$y = 5,$$

dus is door (4) $\quad x = 10$

en door (7) $\quad p = \frac{3}{5}.$

Wij hebben alzoo: voor de hefbooms-armen, $x = 10$ en

$y = 5$ palmen; en voor de magt en last $py = 3$ en $px = 6$ ponden.

CCXX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

In eenen driehoek is eene lijn, uit den top naar het midden der bazis, getrokken; uit het midden van die lijn zijn vervolgens loodlijnen op de zijden nedergelaten. Indien nu de laatstgenoemde loodlijnen gegeven zijn, wil men de zijden des driehoeks berekenen?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, S. Speijer, A. Vos *en* A. F. van de Laar, Junior.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABC (Fig. 122) de bedoelde driehoek zijn, waarin de lijn CD uit den top C, naar het midden D van de bazis is getrokken, terwijl uit O, het midden van de lijn CD, loodlijnen OE, OF en OG op de zijden zijn nedergelaten; stellen wij dan $OE = a$, $OF = b$, $OG = c$, $AC = x$, $BC = y$ en $AB = z$ en laten wij uit D loodlijnen DH en DI op AC en BC, gelijk mede uit C eene loodlijn CK op AB vallen, zoo blijkt, uit de daardoor ontstaande gelijkvormige regthoekige driehoeken, terstond dat

$$DH = 2a, \qquad DI = 2b \qquad \text{en} \qquad CK = 2c$$

is. Daar voorts de inhouden der driehoeken ADC en BDC ieder in het bijzonder gelijk zijn aan den halven inhoud des driehoeks ABC, zoo hebben wij

$$AC \times DH = BC \times DI = \tfrac{1}{2}AB \times CK,$$

dat is: $\qquad 2ax = 2by = cz,$

waaruit volgt $\qquad x = \frac{cz}{2a}$ en $y = \frac{cz}{2b},$

of ook $\qquad \frac{x}{z} = \frac{c}{2a}$ en $\frac{y}{z} = \frac{c}{2b}.$

De inhoud van den driehoek ABC kan, behalve door cz, ook nog in deszelfs zijden uitgedrukt worden, waardoor men komt tot de vergelijking

$$cz = \tfrac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)};$$

deze door z^2 deelende en met 4 vermenigvuldigende, komt er

$$\frac{4c}{z} = \sqrt{\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}+1\right)\left(\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)\left(\frac{x}{z}+1-\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+1-\frac{x}{z}\right)};$$

voor $\frac{x}{z}$ en $\frac{y}{z}$ de bovengevondene waarden stellende,

$$\frac{4c}{z} = \sqrt{\left(\frac{c}{2a}+\frac{c}{2b}+1\right)\left(\frac{c}{2a}+\frac{c}{2b}-1\right)\left(\frac{c}{2a}+1-\frac{c}{2b}\right)\left(\frac{c}{2b}+1-\frac{c}{2a}\right)};$$

en met $(2ab)^2 = 4a^2b^2$ vermenigvuldigende

$$\frac{16a^2b^2c}{z} = \sqrt{(bc+ac+2ab)(bc+ac-2ab)(bc+2ab-ac)(ac+2ab-bc)},$$

waaruit volgt

$$z = \frac{16a^2b^2c}{\sqrt{(2ab+ac+bc)(2ab+ac-bc)(2ab+bc-ac)(bc+ac-2ab)}}$$

Stellen wij nu kortheidshalve

$$2ab + ac + bc = 2s,$$

dan is:

$$2ab + ac - bc = 2(s - bc),$$

$$2ab + bc - ac = 2(s - ac)$$

en

$$bc + ac - 2ab = 2(s - 2ab);$$

waardoor wij verkrijgen

$$z = \frac{4a^2b^2c}{\sqrt{s(s-2ab)(s-ac)(s-bc)}},$$

$$x = \frac{cz}{2a} = \frac{2ab^2c^2}{\sqrt{s(s-2ab)(s-ac)(s-bc)}}$$

en $$y = \frac{cz}{2b} = \frac{2a^2bc^2}{\sqrt{s(s-2ab)(s-ac)(s-bc)}}.$$

Aanmerkingen van J. Acquoy. 1°. Het is uit de gevondene formulen duidelijk, dat tot de bestaanbaarheid van het voorstel vereischt wordt,

1°. $2ab + ac > bc$,

2°. $2ab + bc > ac$

en 3°. $bc + ac > 2ab$.

Uit de derde voorwaarde volgt terstond:

$$c > \frac{2ab}{a+b};$$

is nu $a > b$, dan is aan de eerste voorwaarde van zelf voldaan, en dan moet volgens de tweede nog

$$ac - bc < 2ab$$

zijn, en dus ook $$c < \frac{2ab}{a-b};$$

is echter $b > a$, dan is aan de tweede voorwaarde van zelf voldaan, en dan moet volgens de eerste nog

$$bc - ac < 2ab$$

zijn, en dus ook $$c < \frac{2ab}{b-a}.$$

Wanneer men dus het dubbele product der loodlijnen, uit O op de opstaande zijden nedergelaten, door derzelver som en door derzelver verschil deelt, zullen deze quotienten de grenzen aanwijzen, waartusschen de loodlijn, uit O op de bazis nedergelaten, moet gegeven zijn.

2°. Laat men ook nog uit B en A loodlijnen BL en AM op de overstaande zijden des driehoeks vallen, dan blijkt, uit de gelijkvormigheid der driehoeken, die in de figuur voorkomen, dat

$$BL = 2DH = 4a \text{ en } AM = 2DI = 4b$$

is, terwijl reeds vroeger is opgemerkt, dat $CK = 2c$ is; stelt men dus de loodlijnen, uit de hoekpunten des driehoeks op de overstaande zijden vallende $BL = a'$, $AM = b'$, $CK = c'$, dan is

$a' = 4a$, $b' = 4b$ en $c' = 2c$;
hierdoor wordt de oplossing van het tegenwoordige voorstel onmiddelijk terug gebragt, tot het geval (zie het LXXXI Voorstel van het IV Deel dezer *Verzameling.*) waarin de loodlijnen a', b' en c' gegeven zijn; of omgekeerd, kan de tegenwoordige oplossing dienen, om de zijden uit die gegevens a', b' en c' te berekenen.

3°. De bovengenoemde grenzen, voor de waarde van c gevonden, verschaffen, voor het geval dat a', b' en c' mogten gegeven zijn, de volgende grenzen voor c':

$$c' > \frac{a'b'}{a' + b'} \quad \text{en} \quad c' < \frac{a'b'}{a' - b'} \quad \text{of} \quad \frac{a'b'}{b' - a'}.$$

Tusschen de drie loodlijnen, uit de hoekpunten eens driehoeks, op de overstaande zijden vallende, moet dus altijd een zoodanig verband bestaan, dat, wanneer men het product van twee derzelve door derzelver som en door derzelver verschil deelt, de derde loodlijn grooter dan het eerste en kleiner dan het tweede dezer quotienten zij.

CCXXI. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Van eenen regthoekigen bolvormigen driehoek is bekend: de hypothenusa en de som der scheve hoeken; men vraagt de zijden en de hoeken van dien driehoek te berekenen?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, W. G. van Delden, A. Vos, D. van Lankeren Matthes en J. S. Speijer.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Laat ABC (Fig. 123.) een bolvormige driehoek zijn, regthoekig in B, waarvan gegeven is $A + C = 2\alpha$ en $AC = 2\beta$; stellen wij verder $A - C = 2\phi$, zoo is $A = \alpha + \phi$, $C = \alpha - \phi$ en, volgens eene algemeen bekende formule, hebben wij dan

$$Cos.\ 2\beta = Cot.\ (\alpha + \phi)\ Cot.\ (\alpha - \phi)$$

of
$$Cos.\ 2\beta = \frac{Cos.\ (\alpha + \phi)\ Cos.\ (\alpha - \phi)}{Sin.\ (\alpha + \phi)\ Sin.\ (\alpha - \phi)}.$$

Om hieruit op eene geschikte wijze de waarde van ϕ te vinden, vermeerderen en verminderen wij de eenheid, met deze waarde van $Cos.\ 2\beta$, waardoor wij achtervolgens verkrijgen:

$$1 \pm Cos.2\beta = 1 \pm \frac{Cos.(\alpha+\phi)Cos.(\alpha-\phi)}{Sin.(\alpha+\phi)Sin.(\alpha-\phi)},$$

$$1 \pm Cos.2\beta = \frac{Sin.(\alpha+\phi)Sin.(\alpha-\phi) \pm Cos.(\alpha+\phi)Cos.(\alpha-\phi)}{Sin.(\alpha+\phi)Sin.(\alpha-\phi)},$$

$$1 + Cos.2\beta = \frac{Cos.2\phi}{Sin.(\alpha+\phi)Sin.(\alpha-\phi)},$$

$$1 - Cos.2\beta = \frac{-Cos 2\alpha}{Sin.(\alpha+\phi)Sin.(\alpha-\phi)},$$

$$\frac{1 + Cos.\ 2\beta}{1 - Cos.\ 2\beta} = -\frac{Cos.\ 2\phi}{Cos.\ 2\alpha},$$

$$Cot.^2\beta = -\frac{Cos.\ 2\phi}{Cos.\ 2\alpha}$$

en eindelijk $Cos.\ 2\phi = -Cos.\ 2\alpha\ Cot.^2\beta.$

Hierdoor ϕ bekend wordende, hebben wij

$A = \alpha + \phi$ en $C = \alpha - \phi$,

terwijl dan verder de zijden gevonden worden, door de bekende formulen

$Sin.\ AB = Sin.\ 2\beta\ Sin.\ C$ en $Sin.\ BC = Sin.\ 2\beta\ Sin.\ A.$

CCXXII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

In een cirkelsegment eenen regthoek te beschrijven, zoodat de inhoud een maximum zij?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, J. S. SPEIJER, A. VOS, W. G. VAN DELDEN *en* D. VAN LANKEREN MATTHES.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Zij ACBA (Fig. 124) een gegeven segment van den cirkel ACBC′ en PR de grootstmogelijke regthoek, die in hetzelve beschreven kan worden. Indien men dan de middellijn CMC′ regthoekig door de koorden AB en PS trekt, dan zijn hierdoor het segment ACBA en de regthoek PR in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld. Laat nu ter bepaling van het segment ACBA gegeven zijn, de straal des cirkels $MC = r$ en de boog $CA = CB = r\alpha$ en stellen wij, om den regthoek PR te bepalen, de boog $CP = CS = r\phi$, dan is $MD = r\ Cos.\ \alpha$, $MT = r\ Cos.\ \phi$ en $PT = r\ Sin.\ \phi$; hierdoor wordt

$Regth.PR = 2PT \times DT = 2PT(MT - MD) = 2r Sin.\phi (r Cos.\phi - r Cos.\alpha)$

of $Regth.\ PR = 2r^2\ Sin.\ \phi\ (Cos.\ \phi - Cos.\ \alpha) \ldots (1);$

alzoo moet de uitdrukking

$$y = Sin.\,\phi\; Cos.\,\phi - Sin.\,\phi\; Cos.\,\alpha$$

een maximum zijn.

Hiertoe het eerste en tweede differentiaal-quotient der functie y, ten opzigte van ϕ, opmakende vindt men

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = 2Cos.^2\,\phi - Cos.\,\phi\; Cos.\,\alpha - 1 \;.\;.\;.\;(2)$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = Sin.\,\phi\,(Cos.\,\alpha - 4Cos.\,\phi) \;.\;.\;.\;.\;.\;(3).$$

Stelt men nu

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = 2Cos.^2\,\phi - Cos.\,\phi\; Cos.\,\alpha - 1 = 0,$$

dan is $$Cos.^2\,\phi - \tfrac{1}{2}Cos.\,\alpha\; Cos.\,\phi = \tfrac{1}{2},$$

waaruit voor $Cos.\,\phi$ de beide volgende waarden gevonden worden:

$$Cos.\,\phi = \tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha + \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\right\}} \;.\;.\;(4)$$

$$Cos.\,\phi' = \tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha - \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\right\}} \;.\;.\;(4').$$

Beide deze waarden kunnen nimmer, het zij positief of negatief, grooter dan de eenheid worden; want de grootste van beide, namelijk $Cos\,\phi$, zal zoo groot mogelijk zijn, als men $Cos.\,\alpha$ zoo groot mogelijk en dus $Cos.\,\alpha = 1$ neemt, waardoor $Cos.\,\phi = 1$ wordt; en de kleinste van beide, te weten $Cos.\,\phi'$, zal zoo klein mogelijk zijn, als men $Cos.\,\alpha$ zoo klein mogelijk en dus $Cos.\,\alpha = -1$ neemt, waardoor $Cos.\,\phi = -1$ wordt; derhalve zijn $+1$ en -1 de grenzen, waarbuiten de waarden van $Cos.\,\phi$ en $Cos.\,\phi'$ nimmer vallen kunnen, welke waarde men ook aan α mogt willen geven. Daar voorts $Cos.\,\phi$ blijkbaar altijd eene positieve en $Cos.\,\phi'$ altijd eene negatieve waarde verkrijgt, hoedanig α ook gegeven zij, zal men altijd voor $r\phi$ eenen boog CP vinden, die in het eerste kwadrant, en voor $r\phi'$ eenen boog CP' die in het tweede kwadrant gelegen is.

Substitueert men de waarden voor $Cos.\,\phi$ en $Cos.\,\phi'$ in (3), dan wordt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi^2} = -\,Sin.\,\phi\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\right\}}$$

en $$\frac{\partial^2 y}{\partial \phi'^2} = +\,Sin.\,\phi'\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\right\}}$$

daar nu $Sin.\,\phi$ uit den aard der zaak positief is, zoo ziet

men, dat de waarde voor *Cos.* ϕ het tweede differentiaal-quotient negatief maakt en dat dus de regthoek PR, dien men door dezelve verkrijgt, een maximum is; terwijl de waarde voor *Cos.* ϕ'. het tweede differentiaal-quotient positief maakt, zoo dat de regthoek P′R′, welke door deze waarde verkregen wordt, een minimum is.

De inhoud van het maximum PR zal altijd, welke positieve of negatieve waarde *Cos.* α ook verkrijgen mag, positief zijn; deze regthoek zal dus altijd, ter regterzijde van de koorde AB, in het gegeven segment ACBA zelf gelegen zijn.

De inhoud daarentegen van het minimum P′R′ zal altijd negatief en deze regthoek dus ter linkerzijde van AB, in het segment AC′BA, gelegen zijn. Om zich hiervan te overtuigen, substituere men de waarden voor *Cos.* ϕ en *Cos.* ϕ' in de vergelijking (1), dan vindt men:

$$Regth.PR = 2r^2 Sin.\phi \left\{-\tfrac{3}{4}Cos.\alpha + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}Cos.\alpha)^2\right)}\right\}$$

en $$Regth.P'R' = 2r^2 Sin.\phi' \left\{-\tfrac{3}{4}Cos.\alpha - \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{4}Cos.\alpha)^2\right)}\right\};$$

daar nu *Cos.* α niet grooter dan 1 kan zijn, zullen de achtervolgende ongelijkheden $1 < Cos.^2\,\alpha$,

$$\tfrac{1}{2} < \tfrac{1}{2}Cos.^2\,\alpha,$$

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16}Cos.^2\,\alpha < \tfrac{9}{16}Cos.\,\alpha,$$

$$\sqrt{\left\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.^2\,\alpha)^2\right\}} < \tfrac{3}{4}Cos.\,\alpha,$$

niet kunnen plaats hebben, en derhalve zal *Regth.* PR altijd positief en *Regth.* P′R′ altijd negatief zijn.

Om zich een duidelijk denkbeeld van het gevondene maximum en minimum te maken, late men den straal MP, door welks uiteinde P de regthoek PR bepaald wordt, om het middelpunt M omdraaijen. Ligt dan MP op MC, dan is de regthoek PR klaarblijkelijk *nul*; wordt MP van C naar A voortbewogen, dan verandert de regthoek PR telkens van grootte, tot dat als P in A komt, dezelve wederom *nul* wordt; het punt P moet dus ergens tusschen C en A in eenen stand geweest zijn, dat de regthoek PR op het grootst was. Laat men verder MP van A naar C″ voortbewegen, dan komt de regthoek PR ter linkerzijde van AB weder te voorschijn, en is dus ten opzigte van den vorigen stand negatief; in dezen negatieven toestand verandert de regthoek vervolgens onophoudelijk van grootte, tot dat, als P in C′ komt, deszelfs inhoud weder *nul* wordt; het punt P moet

dus ergens tusschen A en C′ in zulk eenen stand P′ geweest zijn, dat de regthoek P′R′ zijne grootste negatieve waarde had en dus ten aanzien van de oorspronkelijke positieve waarde een minimum was. Door deze beschouwing wordt het tevens duidelijk, dat de regthoek P′R′ aangemerkt kan worden, als het maximum van de regthoeken, die in het segment AC′BA, of in het supplement van het gegeven segment ACBA, kunnen worden beschreven.

Om de regthoeken PR en P′R′ te construeren, trekke men de middellijn EF evenwijdig met AB, deele de boog CE midden door in G, zoodat CG = GE = 45° is, late uit G de loodlijn GH op EF vallen, make MI = $\frac{1}{4}$ MD, trekke HI, neme ter wederzijde van I, IT = IT′ = HI, trekke door T en T′ lijnen PS en P′S′ evenwijdig met AB en late uit P, S, P′ en S′ de loodlijnen PQ, SR, P′Q′ en S′R′ op AB vallen, dan zullen PQRS en P′Q′R′S′ de grootste regthoeken zijn, die in de segmenten ACBA en AC′BA kunnen beschreven worden; want door deze constructie is achtervolgens:

$$MH = r Cos.\ 45° = r\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$MI = \tfrac{1}{4}\ MD = \tfrac{1}{4}\ r Cos\ \alpha,$$
$$HI = \sqrt{(MH^2 + MI^2)} = r\sqrt{\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\ \alpha)^2\}}$$
$$MT = MI + IT = MI + HI = r\{\tfrac{1}{4}Cos.\alpha + \sqrt{(\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\alpha)^2)}\},$$
$$MT' = MI - IT' = MI - HI = r\{\tfrac{1}{4}Cos.\alpha - \sqrt{(\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\alpha)^2)}\};$$

door de vergelijkingen (4) en (4′) heeft men dus, naar behooren,

$$MT = r Cos.\ \phi \quad \text{en}\ MT' = r Cos.\ \phi'.$$

Indien door de opgegevene constructie MT′ < MD en dus P′T′ > AD mogt worden, zullen de loodlijnen P′Q′ en R′S′ op het verlengde der koorde AB nederkomen en de regthoek P′R′ zal dan gedeeltelijk buiten den cirkel gelegen zijn. Om te beoordeelen voor welke waarden van α deze omstandigheid zal plaats hebben, stellen wij, dat men had

$$MD > MT',$$

dan zal hieruit achtervolgens kunnen afgeleid worden:

$$MD > IT' - IM,$$
$$MD > HI - \tfrac{1}{4}MD,$$
$$\tfrac{5}{4}MD > HI,$$
$$\tfrac{5}{4}r Cos.\ \alpha > r\sqrt{\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\ \alpha)^2\}},$$
$$\tfrac{25}{16}Cos.^2\alpha > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{16}\ Cos.^2\ \alpha,$$

$$\tfrac{3}{2}Cos.^2\,\alpha > \tfrac{1}{2},$$
$$Cos.^2\,\alpha > \tfrac{1}{3},$$
$$Cos.\,\alpha > \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

en eindelijk $\alpha < Boog\ Cos.\ \sqrt{\tfrac{1}{3}};$

hierdoor vindt men, met behulp der tafels, dat de vermelde omstandigheid plaats zal hebben, als de *boog* CA kleiner gegeven is dan 54° 44′ 8″, 2.

Is de boog CA $= 0°$ of $\alpha = 0$ gegeven, dan wordt

$$Cos.\,\phi = \tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha + \sqrt{\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\}} = 1,$$
$$Sin.\,\phi = \sqrt{(1 - Cos.^2\,\phi)} = 0,$$
$$Regth.\ PR = 2r^2 Sin.\,\phi\,(Cos.\,\phi - Cos.\,\alpha) = 0,$$
$$Cos.\,\phi' = \tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha - \sqrt{\{\tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{4}Cos.\,\alpha)^2\}} = -\tfrac{1}{2};$$
$$Sin.\,\phi' = \sqrt{(1 - Cos.^2\,\phi')} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$Regth.\ P'R' = 2r^2 Sin.\,\phi'(Cos.\,\phi' - Cos.\,\alpha) = -\tfrac{3}{2}r^2\sqrt{3};$$

maar door de onderstelling, dat $\alpha = 0$ is, is het segment ACBA geheel verdwenen, het segment AC′BA is in den geheelen cirkel CP′C′S′, (Fig. 125.), de koorde AB in het punt C, het verlengde van die koorde in de raaklijn XY overgegaan en dus zal de regthoek P′R′, die, omdat hier $Cos.\,\phi' = -\tfrac{1}{2}$ is, verkregen wordt, door MC′ midden door te deelen in T′, het maximum zijn van al de regthoeken, die op de raaklijn XY staan en waarvan de overige hoekpunten in den omtrek des cirkels gelegen zijn. Daar voorts de inhoud van eenen regelmatigen zeshoek, in den cirkel beschreven, gelijk is aan $\tfrac{3}{2}r^2\sqrt{3}$, zoo blijkt, dat de regthoek P′R′ (Fig. 125.) evenveel inhoud heeft als die zeshoek.

Stelt men in (4) $\alpha = 90°$, waardoor het segment ACBA (Fig. 124.) in den halven cirkel ECF overgaat, dan vindt men

$$Cos.\,\phi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \phi = 45°;$$

de grootste regthoek, die in den halven cirkel ECF kan beschreven worden, wordt dus door het punt G bepaald, en is klaarblijkelijk de helft van het vierkant in den geheelen cirkel beschreven.

CCXXIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de som der oneindig voortloopende reeks

$$\tfrac{2}{1}x + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{6}{5}x^5 + \tfrac{8}{7}x^7 + enz.$$

te vinden?

Opgelost *door* W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Stellen wij

$$S = \tfrac{2}{1}x + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{6}{5}x^5 + \tfrac{8}{7}x^7 + \textit{enz.}$$

en differentieren wij deze vergelijking, dan komt er

$$\delta S = 2\delta x(1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \textit{enz.}),$$

vermenigvuldigen wij nu de beide leden der laatste vergelijking met $1 - x^2$, dan komt er

$$(1 - x^2)\,\delta S = 2\delta x(1 + x^2 + x^3 + x^4 + \textit{enz.});$$

en nogmaals met $1 - x^2$ vermenigvuldigende

$$(1 - x^2)^2\,\delta S = 2\delta x,$$

waaruit volgt

$$\delta S = \frac{2\delta x}{(1 - x^2)^2}.$$

Stellen wij, om deze formule te integreren,

$$x = \mathit{Cos.}\,\phi\,,\quad 1 - x^2 = \mathit{Sin}^2.\,\phi \quad \text{en} \quad \delta x = -\,\mathit{Sin.}\,\phi\,\delta\phi,$$

dan gaat dezelve over in

$$\delta S = -\frac{2\delta\phi}{\mathit{Sin.}^3\,\phi},$$

waarvan, volgens J. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* Bladz. 313, de integraal is

$$S = \frac{\mathit{Cos.}\,\phi}{\mathit{Sin.}^2\,\phi} - \mathit{Log.\ Tang.}\ \tfrac{1}{2}\phi.$$

Nu is

$$\mathit{Tang.}\ \tfrac{1}{2}\phi = \sqrt{\frac{1 - \mathit{Cos.}\,\phi}{1 + \mathit{Cos.}\,\phi}} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

en derhalve

$$S = \frac{x}{1 - x^2} - \mathit{Log.}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}},$$

waarbij geene standvastige behoeft gevoegd te worden, omdat naar behoren, voor $x = 0$, ook $S = 0$ wordt.

Deze uitkomst kan alleen dienen voor het geval dat $x < 1$ is, omdat anders het getal, waarvan de Logarithmus genomen moet worden, negatief zou zijn; het is echter blijkbaar, dat, zoo $x =$ of > 1 is, de som der voorgestelde reeks oneindig groot wordt.

AANMERKING *uit de overige oplossingen.* Men kan de voorgestelde reeks terstond verdeelen in de som der beide volgende:

$$x + x^3 + x^5 + x^7 + \text{enz.}$$
$$x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \text{enz.}$$

Nu is de eerste dezer reeksen klaarblijkelijk de ontwikkeling van het gebroken $\frac{x}{1-x^2}$ en de tweede is, volgens LACROIX, *Stelk. door* I. R. SCHMIDT, Bladz. 375, de helft van de ontwikkeling der functie *Nep. Log.* $\frac{1+x}{1-x}$, wij hebben voor de gevraagde som dus terstond:

$$S = \frac{x}{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\,\text{Nep. Log.}\,\frac{1+x}{1-x}$$

of ook:

$$S = \frac{x}{1-x^2} - \text{Nep. Log.}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

CCXXIV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men verlangt eene kromme lijn te vinden, die de eigenschap heeft, dat, wanneer men de abscissen met gelijke verschillen laat aangroeijen, zulks ook plaats heeft met de overeenkomstige hoeken, waaronder de raaklijnen de as der abscissen snijden?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN *en* J. ACQUOY.

OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Zij x de abscis, y de ordinaat van eenig onbepaald punt der verlangde kromme lijn en laat ϕ de hoek zijn, waaronder de as der abscissen door de raaklijn van dat punt wordt gesneden, dan hebben wij dadelijk

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \text{Tang. } \phi.$$

Daar het voorts uit de theorie der rekenkunstige reeksen bekend is, dat elke functie van x, die de eigenschap heeft van met gelijke verschillen op te klimmen indien x met gelijke verschillen opklimt, in den vorm $a + bx$ begrepen is,

kunnen wij volgens de opgaaf $\phi = a + bx$ stellen; hierdoor hebben wij dan

$$\frac{\delta y}{\delta x} = Tang.\ (a + bx),$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$\delta y = \frac{1}{b}\ \delta(a + bx).\ Tang.\ (a + bx);$$

en hiervan is de integraal

$$y + c = -\frac{1}{b}\ Nep.\ Log.\ \{\pm\ Cos.\ (a + bx)\},$$

welke nu de algemeenste vergelijking der begeerde kromme lijn is.

Wij kunnen hierin echter c en a beide gelijk nul nemen, want zonder dat dit op de kromme zelf invloed zal hebben, zullen daardoor alleen de coördinaten-assen eene evenwijdige verplaatsing ondergaan; men overtuigt zich hiervan ligtelijk, door op te merken, dat men ter verplaatsing der genoemde assen zou kunnen stellen

$$y + c = y'$$

en $x + \frac{a}{b} = x'$, dat is: $a + bx = bx'$;

overigens kunnen wij de vergelijking geslachtig maken, door te stellen $\frac{1}{b} = p$, als wanneer p eene lijn beteekent; door dit een en ander, verandert de gevondene vergelijking in

$$y = -p\ Nep.\ Log.\ \left(\pm\ Cos.\ \frac{x}{p}\right) \quad \ldots (1),$$

terwijl men verder zal vinden

$$\frac{\delta y}{\delta x} = Tang.\ \frac{x}{p} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

en

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{p\ Cos.^2\ \frac{x}{p}} \quad \ldots\ldots\ldots (3);$$

wij zullen deze drie vergelijkingen gebruiken, om daaruit de kromme lijn nader te leeren kennen.

Uit het dubbele teeken der vergelijking (1) volgt, dat men, bij de positieve cosinussen het bovenste en bij de negatieve cosinussen het benedenste teeken gebruikende, voor elke waarde van x eene bestaanbare waarde voor y zal vinden;

doch ook niet meer dan ééne, omdat de negatieve getallen geene logarithmen hebben.

Omdat cosinussen altijd eigenlijke gebrokens en hunne logarithmen dienvolgens altijd negatieve getallen zijn, zal volgens (1) y nimmer negatief kunnen worden; de kromme lijn heeft dus geene punten beneden de as der abscissen.

Wanneer men x in $-x$ verandert, blijft de waarde van y volgens (1) dezelfde; hieruit volgt, dat de kromme lijn, ter wederzijden van de as der ordinaten, volmaakt dezelfde gedaante heeft.

Daar, blijkens (1) en (3), y en $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$ voor alle waarden van x verschillende teekens moeten verkrijgen, heeft de kromme lijn overal hare bolle zijde naar de as der abscissen gekeerd.

Zoo men $x = 0$ stelt, wordt ook $y = 0$; de kromme lijn gaat dus door den oorsprong.

Zoo men x van 0 tot $\frac{1}{2}\pi p$ laat aangroeijen, neemt het positieve gebroken $Cos. \frac{x}{p}$ af; de logarithmus van dat gebroken $Nep. Log. \left(+ Cos. \frac{x}{p}\right)$ wordt dus een hoe langer hoe grooter negatief getal en met de aangroeijing van x stemt dus volgens (1) eene aangroeijing van y overeen, totdat voor $x = \frac{1}{2}\pi p$ $y = \infty$ wordt; de kromme lijn heeft dus eene asymptoot, evenwijdig met de ordinaten-as en van dien as op den afstand $\frac{1}{2}\pi p$ verwijderd.

Zoo men x verder van $\frac{1}{2}p\pi$ tot πp laat aangroeijen, wordt $Cos. \frac{x}{p}$ negatief; alsdan groeit het positieve gebroken $- Cos. \frac{x}{p}$ aan, de logarithmus van dat gebroken $Nep. Log. \left(- Cos. \frac{x}{p}\right)$ wordt dus een hoe langer hoe kleiner negatief getal en met de aangroeijing van x stemt dus nu een afneming van y overeen, totdat voor $x = \pi p$ weder $y = 0$ wordt en dus de kromme lijn, op den afstand πp van den oorsprong, weder een gemeenschappelijk punt met de as der abscissen verkrijgt.

Of men in de vergelijking (1) $x = \frac{1}{2}\pi p + a$, dan wel

$x = \frac{1}{2}\pi p - \alpha$ stelt, in beide gevallen verkrijgt y dezelfde waarde; hieruit volgt, dat het gedeelte der kromme lijn, verkregen door x van $\frac{1}{2}\pi p$ tot πp te laten aangroeijen, gelijk en gelijkvormig is met het gedeelte, dat ontstaat als x van 0 tot $\frac{1}{2}\pi p$ aangroeit, maar dat deze beide deelen eenen omgekeerden stand hebben.

Of men voorts in (1) $x = \alpha$, $x = \pi p + \alpha$, $x = 2\pi p + \alpha$, $x = 3\pi p + \alpha$, enz. stelt, men zal altijd dezelfde waarde voor y verkrijgen; de kromme lijn bestaat dus uit een oneindig aantal gelijke en gelijkvormige takken, alle op den afstand πp van elkander verwijderd; zij heeft een oneindig aantal asymptoten, die op genoemden afstand van elkander staan en evenwijdig met de as der ordinaten loopen, en zij heeft een oneindig aantal punten met de as der abscissen gemeen, die almede, van den oorsprong te beginnen, onderling den afstand πp hebben.

Voor $x = 0$, $x = \pi p$, $x = 2\pi p$, enz. wordt niet alleen $y = 0$, maar ook $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$; de as der abscissen raakt dus de kromme lijn in al de punten, die zij er mede gemeen heeft.

Voor $x = \frac{1}{2}\pi p$, $x = \frac{3}{2}\pi p$, $x = \frac{5}{2}\pi p$, enz. wordt niet alleen $y = \infty$, maar ook $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$; dit stemt overeen, met het bestaan der reeds genoemde asymptoten.

Dit alles te samen trekkende blijkt, dat de kromme lijn de gedaante heeft, die wij in Fig. 126 hebben afgebeeld; waar XX' de as der abscissen, YY' die der ordinaten, O den oorsprong, AB, A'B', ab, $a'b'$, de asymptoten en C, C', c, c' de raakpunten met de as der abscissen voorstellen; terwijl in die figuur $OA = AC = CA' = A'C' = Oa = ac = ca' = a'c' = \frac{1}{2}\pi p$ is.

Daar de kromme alzoo uit een aantal deelen bestaat, die alle gelijk en gelijkvormig met het gedeelte OB zijn, zullen wij ons verder alleen tot dat gedeelte bepalen; daartoe in de vergelijking (1) slechts de cosinussen van het eerste kwadrant, en dus ook slechts het bovenste teeken gebruikende.

Na vooraf opgemerkt te hebben, dat in de vergelijking (1), die behoorlijk gelijkslachtig is, slechts eene standvastige lijn

p voorkomt, en dat dus alle de kromme lijnen, in die vergelijking begrepen, onderling gelijkvormig zijn, zullen wij gemakshalve eene lijn als eenheid aannemen. Door m de modulus van het gewone logarithmen stelsel aanduidende, kiezen wij voor die eenheid $\frac{p}{m}$ en stellen dus $\frac{p}{m} = 1$ of $p = m$; indien wij dan in het oog houden, dat in het algemeen m *Nep. Log.* N $=$ *Log.* N is, wordende nu door *Log.* de gewone tafel-logarithmen bedoeld, zoo veranderen, door het aannemen van deze eenheid, de formulen (1), (2) en (3) in:

$$y = -\, Log.\, Cos. \frac{x}{m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1'),$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = Tang. \frac{x}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2'),$$

en
$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{1}{m\, Cos.^2 \frac{x}{m}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'),$$

en wij zullen ons verder van deze bedienen.

Om de kromme lijn door punten te construeren, merken wij op, dat zoo men door n en r twee geheele getallen voorstelt en

$$x = \frac{r}{n} \pi m$$

neemt, de overeenkomstige waarde van y wordt

$$y = -\, Log.\, Cos. \frac{r}{n} \pi;$$

de waarden van y kunnen dus onmiddellijk uit de gewone tafels genomen worden en de waarden van x worden gevonden, door $\frac{r}{n}$ gedeelte van den omtrek des halven cirkels, die m tot straal heeft, te rectificeren. Beschrijven wij dus uit M (Fig. 127), met OM $= m = 0{,}434\ldots\ldots$ als straal, eenen cirkel en verdeelen wij den halven omtrek van dien cirkel, in een zeker aantal, bijv. *tien* gelijke deelen Op, pq, qr, rs, sa, *enz.*, brengen wij verder op OX zoo na mogelijk de lengte der boogen over, zoodat OP' $=$ Op, OQ' $=$ Oq, OR' $=$ Or, OS' $=$ Os, OA $=$ Oa, *enz.* is, dan hebben wij voor x de waarden

$x = \frac{1}{2}\pi p - \alpha$ stelt, in beide gevallen verkrijgt y ...
waarde; hieruit volgt, dat het gedeelte der kro...
verkregen door x van $\frac{1}{2}\pi p$ tot πp te laten aangro...
lijk en gelijkvormig is met het gedeelte, dat ...
x van 0 tot $\frac{1}{2}\pi p$ aangroeit, maar dat deze beide ...
omgekeerden stand hebben.

Of men voorts in (1) $x = \alpha$, $x = \pi p + \alpha$, x ...
$x = 3\pi p + \alpha$, enz. stelt, men zal altijd dezelfde ...
verkrijgen; de kromme lijn bestaat dus uit een ...
gelijke en gelijkvormige takken, alle op den afsta...
der verwijderd; zij heeft een oneindig aantal a...
op genoemden afstand van elkander staan en ...
as der ordinaten loopen, en zij heeft een
punten met de as der abscissen gemeen, ...
den oorsprong te beginnen, onderling den ...

Voor $x = 0$, $x = \pi p$, $x = 2\pi p$, enz.
$y = 0$, maar ook $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$; de as der a...
de kromme lijn in al de punten; die zij
heeft.

Voor $x = \frac{1}{2}\pi p$, $x = \frac{3}{2}\pi p$, $x = \frac{5}{...}$
alleen $y = \infty$, maar ook $\frac{\delta y}{\delta x} = \infty$; dit
het bestaan der reeds genoemde asym...

Dit alles te samen trekkende blijkt
gedaante heeft, die wij in Fig. 12...
XX' de as der abscissen, YY' ...
oorsprong, AB, A'B', ab, $a'b'$ ...
de raakpunten met de as der
in die figuur OA = AC =
ca' = a'c' = $\frac{1}{2}\pi p$ is.

Daar de kromme alzo...
alle gelijk en gelijkvorm...
wij ons verder alleen ...
vergelijking (1) slech...
en dus ook slecht...

Na voor...
die ...

[redacted]

$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\Big)^{\frac{3}{2}} \over \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$,

[redacted] m *Sec.* $\frac{x}{m}$;

...al Mr, tot dat zij de lijn OX in ... lengte van den kromtestraal van ... uit de figuur volgt terstond, dat, ... MN $=$ *Sec.* Or $=$ *Sec.* x zou we-

... m is, is MN $= m$ *Sec.* $\frac{x}{m}$.

...p de raaklijn RT eene loodlijn RU $=$ ... punt van de ontwondene der kromme ...dinaten OV en UV van dat punt be-... men uit R eene lijn RW evenwijdig met ...gt men eenen regthoekigen driehoek ... gelijkvormig is met NMO, omdat, be-... potheneusen, deze driehoeken nog eenen ... hebben; blijkende de gelijkheid der hoe-... IO daaruit, dat NMO $=$ RTX $=$ WRT ... RT als RUW het complement van URW ...lijkelijk

... $-$ R'V $=$ OR' $-$ RW $=$ OR' $-$ ON,

... $+$ RR' $=$ MO $+$ RR';

...de coördinaten van een punt der ontwondene ...n, hebben wij:

$$... = x - m\ Tang. \frac{x}{m},\quad \beta = y + m,$$

...pmerking verdient, dat het verschil $\beta - y$ stand-... aan den modulus m is.

...regene formulen gaan, voor $x = 0$ en $y = 0$,

$$\alpha = 0,\ \beta = m \text{ en } \gamma = m,$$

...or wij dus OM verlengen, tot dat OM' $=$ OM $= m$ ... OM' de kromtestraal van den top O. Het uiteinde M' ... dezen straal is tevens een keerpunt der ontwondene.

Wij zouden nog de quadratuur en de rectificatie dezer

$$OP' = \tfrac{1}{10}\,\pi m,\quad OQ' = \tfrac{2}{10}\,\pi m,\qquad OR' = \tfrac{3}{10}\,\pi m,\qquad OS' = \tfrac{4}{10}\,\pi m,\quad OA = \tfrac{1}{2}\,\pi m,\ \textit{enz.}$$

en hiermede stemmen volgens (1′) overeen:

$$y = -Log.Cos.\tfrac{1}{10}\pi,\ y = -Log.Cos.\tfrac{2}{10}\pi,\ y = -Log.Cos.\tfrac{3}{10}\pi,\ y = -Log.Cos.\tfrac{4}{10}\pi,\ y = \infty\ \textit{enz.}$$

dat is: $y = -Log.Cos.18°,\ y = -Log.Cos.36°,\ y = -Log.Cos.54°,\ y = -Log.Cos.72°,\ y = \infty$ *enz.*

of, deze waarden in de tafels opzoekende,

$$y = 0{,}02179,\qquad y = 0{,}09204,\qquad y = 0{,}23078,\qquad y = 0{,}51002,\qquad y = \infty\ \textit{enz.};$$

maken wij dus respectievelijk PP′, QQ′, RR′, SS′, AB, *enz.* gelijk aan deze voor y verkregene getallen-waarden, dan zullen P, Q, R, S, B, *enz.* punten der kromme lijn zijn.

Uit het verband der formulen (1′) en (2′) blijkt, dat de hoek, door de raaklijn en de as der x gevormd, altijd even groot is als de hoek, waarvan men ter vinding van y de *Log. Cos.* gezocht heeft. Trekt men dus door P, Q, R, S, lijnen, die de as der x respectievelijk onder hoeken van 18°, 36°, 54° en 72° snijden, dan zullen deze lijnen de kromme in de punten P, Q, R en S moeten raken en hierdoor wordt het gemakkelijk, om, door die punten, de kromme uit de hand naauwkenriger te trekken, dan anders het geval zou wezen.

Wil men aan een willekeurig gegeven punt R der kromme eene raaklijn trekken, zoo heeft men dan ook slechts zoo na mogelijk op den cirkel de boog Or gelijk aan de abscis OR′ van dat punt te maken, dan zal OMr de hoek zijn onder welken de raaklijn van het punt R de as OX moet snijden, en hierdoor kan die raaklijn RT terstond geconstrueerd worden.

Substitueert men de waarden (2′) en (3′) in de algemeene formule voor den kromtestraal

$$\gamma = \frac{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

dan komt er na herleiding

$$\gamma = m \; Sec. \frac{x}{m};$$

verlengt men dus den straal Mr, tot dat zij de lijn OX in N ontmoet, dan zal MN de lengte van den kromtestraal van het punt R hebben, want uit de figuur volgt terstond, dat, indien OM = 1 ware, MN = *Sec.* Or = *Sec.* x zou wezen; daar echter OM = m is, is MN = m *Sec.* $\frac{x}{m}$.

Stelt men dus uit R op de raaklijn RT eene loodlijn RU = MN, dan zal U een punt van de ontwondene der kromme zijn; wil men de coordinaten OV en UV van dat punt berekenen, dan trekke men uit R eene lijn RW evenwijdig met YX'; hierdoor verkrijgt men eenen regthoekigen driehoek RUW die gelijk en gelijkvormig is met NMO, omdat, behalve de gelijke hypothenusen, deze driehoeken nog eenen scherpen hoek gelijk hebben; blijkende de gelijkheid der hoeken RUW en NMO daaruit, dat NMO = RTX = WRT is, en zoowel WRT als RUW het complement van URW is. Nu is klaarblijkelijk

OV = OR' − R'V = OR' − RW = OR' − ON,
UV = UW + RR' = MO + RR';

zoo wij dus de coördinaten van een punt der ontwondene α en β noemen, hebben wij:

$$\alpha = x - m \; Tang. \frac{x}{m}, \quad \beta = y + m,$$

waarbij het opmerking verdient, dat het verschil $\beta - y$ standvastig gelijk aan den modulus m is.

De verkregene formulen gaan, voor $x = 0$ en $y = 0$, over in

$$\alpha = 0, \; \beta = m \quad \text{en} \quad \gamma = m,$$

wanneer wij dus OM verlengen, tot dat OM' = OM = m is, is OM' de kromtestraal van den top O. Het uiteinde M' van dezen straal is tevens een keerpunt der ontwondene.

Wij zouden nog de quadratuur en de rectificatie dezer

kromme lijn kunnen behandelen; daar echter de eerste op eene integraal voert, die niet dan door oneindige reeksen gevonden kan worden, terwijl de laatste geenerlei merkwaardige bijzonderheid oplevert, zullen wij ons daarmede niet inlaten en het aangevoerde als genoegzaam beschouwen, om de gevraagde kromme lijn te leeren kennen.

CCXXV. VOORSTEL.

Door J. BADON GHIJBEN.

Men wenscht, in eene gegevene ellips, eenen driehoek te beschrijven, waarvan de inhoud zoo groot mogelijk zij?

OPGELOST *door* J. BADON GHIJBEN, J. ACQUOY, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, A. VOS, W. G. VAN DELDEN *en* L. VAN DE KASTEELE.

I. OPLOSSING *van* J. BADON GHIJBEN.

Laat ABC (Fig. 128.) een willekeurige driehoek zijn, beschreven in eene ellips, die door hare middelpunts vergelijking $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ gegeven is. Laat de bazis AB van dezen driehoek tot vergelijking hebben $y = mx + n$, dan zijn m en n veranderlijke grootheden, die zoodanig bepaald moeten worden, dat AB de bazis van den grootstmogelijken driehoek wordt. Bepaalt men, door de gewone leerwijze, de coördinaten van de snijpunten A en B, dan vindt men voor dezelve:

$$x = \frac{-a^2mn - ab\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2}, \quad y = \frac{b^2n - abm\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2},$$

$$x' = \frac{-a^2mn + ab\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2}, \quad y' = \frac{b^2n + abm\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2},$$

waarin kortheidshalve $+\sqrt{(a^2m^2 + b^2)} = p$ gesteld is; wij hebben dus

$$x' - x = \frac{2ab\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2}, \quad y' - y = \frac{2abm\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2};$$

en hieruit wordt voor de werkelijke lengte der bazis AB gevonden

$$AB = \sqrt{\left\{(x' - x)^2 + (y' - y)^2\right\}} = \frac{2ab\sqrt{(m^2+1)}\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2}.$$

Zal de driehoek ABC de grootstmogelijke zijn, die in de ellips beschreven kan worden, dan moet hij ook de grootstmogelijke zijn, die op de koorde AB in de ellips geplaatst kan

worden. De top C moet dus zoo ver mogelijk van AB verwijderd zijn, en derhalve moet C het punt wezen, waarin de ellips geraakt wordt, door eene lijn, die evenwijdig met AB loopt. De coördinaten der punten C en C', waar de ellips geraakt wordt door lijnen evenwijdig met AB loopende, worden gevonden, indien men, in de coördinaten van A en B, m onveranderd laat, maar n zoodanig neemt, dat de worteluitdrukking nul wordt en dus $n = \pm p$ stelt; wij hebben dus voor de coördinaten van C en C'

$$x' = \mp \frac{a^2 m}{p} \quad \text{en} \quad y' = \pm \frac{b^2}{p}.$$

Wij moeten voor den top des driehoeks, uit de punten C en C' klaarblijkelijk datgene nemen, dat het verst van de lijn AB verwijderd is; daar echter tot dusverre tusschen de lijn AB en de punten C en C' geen ander verband bestaat, dan dat die lijn evenwijdig is met de raaklijnen van die punten, zouden wij kunnen twijfelen, welke der beide waarden van x' en y' wij moesten kiezen; zulks is echter volmaakt onverschillig, omdat met elken driehoek ABC een andere A'B'C' overeenstemt, die met den eersten gelijk en gelijkvormig is en daarmede alleen in stand verschilt. Wij zullen dus, voor de coördinaten van den top des driehoeks, alleen nemen:

$$x' = + \frac{a^2 m}{p} \quad \text{en} \quad y' = - \frac{b^2}{p}.$$

De lengte der loodlijn, uit een punt, welks coördinaten α en β zijn, nedergelaten op eene lijn, die $y = mx + n$ tot vergelijking heeft, is in het algemeen

$$\frac{\beta - \alpha m - n}{\sqrt{(m^2 + 1)}},$$

doch wij kunnen vooruit niet zien of deze uitdrukking, die loodlijn in eenen positieven of in eenen negatieven toestand zal geven. Stellen wij in deze formule voor α en β de bovenstaande coördinaten van den top des driehoeks, dan vinden wij voor de lengte der loodlijn CD, uit dien top op AB vallende

$$CD = \frac{-n - \dfrac{a^2 m^2 + b^2}{p}}{\sqrt{(m^2 + 1)}} = \frac{-n - p}{\sqrt{(m^2 + 1)}};$$

daar nu, blijkens de meermalen voorkomende worteluitdruk-

king $\sqrt{(p^2 - n^2)}$, $n < p$ is, terwijl p altijd den positieven wortel uit $a^2m^2 + b^2$ verbeeldt, is deze waarde voor CD hier in eenen negatieven toestand gevonden; wij hebben hier echter alleen met de werkelijke lengte van CD te doen en deze is dus

$$CD = \frac{n + p}{\sqrt{(m^2 + 1)}}.$$

De inhoud van den driehoek ABC is derhalve

$$Inh.\ ABC = \tfrac{1}{2}AB \times CD = \frac{ab(p + n)\sqrt{(p^2 - n^2)}}{p^2}$$

of ook

$$Inh.\ ABC = ab\left(1 + \frac{n}{p}\right)\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{n}{p}\right)^2\right\}}.$$

Uit deze formule blijkt, dat de inhoud van den driehoek alleen afhangt van de veranderlijke grootheid $\frac{n}{p}$, zonder dat het er iets toe doet, wat n en $p = \sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ ieder in het bijzonder mogen zijn; wij hebben dus slechts $\frac{n}{p}$ zoodanig te bepalen, dat de inhoud des driehoeks een maximum worde. Stellen wij hiertoe $\frac{n}{p} = u$, waardoor

$$Inh.\ ABC = ab(1 + u)\sqrt{(1 - u^2)}$$

wordt, dan zal het genoegzaam zijn de functie

$$z = (1 + u)^2(1 - u^2)$$

tot een maximum te maken. Tot dit einde hebben wij:

$$z = 1 + 2u - 2u^3 - u^4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2 - 6u^2 - 4u^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = -12u - 12u^2,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = -12 - 24u,\ \text{enz.}$$

Stellen wij nu $2 - 6u^2 - 4u^3 = 0$ en schrijven wij deze vergelijking in de gedaante

$$(1 + u)^2(1 - 2u) = 0,$$

dan ziet men terstond, dat $u = -1$ en $u = \frac{1}{2}$ de eenige waarden zijn, die aan dezelve voldoen; $u = -1$ nemende, wordt $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0$, zonder dat $\frac{\partial^3 z}{\partial u^3} = 0$ wordt, bijgevolg is

z, voor deze waarde van u, noch minimum, noch maximum; $u = \frac{1}{2}$ nemende, wordt $\frac{\delta^2 z}{\delta u^2} = -9$, deze waarde van u maakt dus z, en bijgevolg ook den inhoud des driehoeks, tot een maximum.

Uit de gevondene waarde $u = \frac{1}{2}$ volgt, dat men slechts, opdat de driehoek een maximum zij

$$\frac{n}{p} = \frac{n}{\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}} = \frac{1}{2}$$

en dus $$n = \frac{1}{2}\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$$

heeft te nemen, zonder dat het noodig zij, eene bepaalde waarde aan m of n, ieder in het bijzonder, te geven. Is dus de vergelijking van de bazis AB slechts

$$y = mx + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2m^2 + b^2)},$$

dan zal aan de voorwaarde dat ABC een maximum moet wezen voldaan zijn, welke willekeurige waarde men ook aan m mogt willen geven, en de waarde van dit maximum zal men vinden, door in de bovenstaande formule

$$Inh.\ ABC = ab(1 + u)\sqrt{(1 - u^2)}$$

$u = \frac{1}{2}$ te stellen, waardoor men verkrijgt

$$Inh.\ ABC = \frac{3}{4}ab\sqrt{3}.$$

Daar men, door aan m alle mogelijke waarden te geven, een oneindig aantal koorden AB in de ellips trekken kan, die $y = mx + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2m^2 + b^2)}$ tot vergelijking hebben, zullen ook een oneindig aantal driehoeken aan de vraag voldoen, maar derzelver inhoud zal altijd $\frac{3}{4}ab\sqrt{3}$ zijn.

De coördinaten van het punt C zijn, zoo als vroeger is aangetoond

$$x' = \frac{a^2m}{p} \quad \text{en} \quad y' = -\frac{b^2}{p};$$

trekt men alzoo uit C eene middellijn CC′, dan is de vergelijking dezer middellijn, omdat zij ook gaat door het middelpunt O, waarvan $x = 0$ en $y = 0$ de coördinaten zijn,

$$y = -\frac{b^2}{a^2m}x;$$

zoekt men nu het snijpunt E van deze middellijn met de lijn AB, die als bazis van den grootstmogelijken driehoek tot vergelijking heeft

$$y = mx + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2m^2 + b^2)},$$

dan vindt men, voor de coördinaten van dat eindpunt E,

$$x = -\frac{a^2m}{2\sqrt{(a^2m^2+b^2)}} = -\frac{a^2m}{2p} \text{ en } y = \frac{b^2}{2\sqrt{(a^2m^2+b^2)}} = \frac{b^2}{2p}$$

en daar deze coördinaten de helften zijn der coördinaten van het punt C, maar met omgekeerde teekens, zoo is het punt E juist in het midden van OC′ gelegen.

Daar men aan m eene willekeurige waarde geven kan, en dus de koorde AB onder eenen willekeurigen hoek door de as der x kan laten gaan, kan men het punt C willekeurig nemen, en hieruit volgt dan, dat men, om den begeerden grootstmogelijken driehoek in de ellips te beschrijven, aldus kan handelen:

Men neme op den omtrek der ellips een willekeurig punt C, trekke uit hetzelve de middellijn COC′, deele OC′ midden door in E, trekke door E eene koorde AB evenwijdig met de raaklijn van het punt C en vereenige de uiteinden A en B dezer koorde met C, dan zal ABC de begeerde driehoek zijn.

Om *à posteriori* te doen zien, dat de inhoud van den driehoek ABC, door deze constructie verkregen, onafhankelijk is van de plaats waar het punt C willekeurig genomen is, stelle men dat MOM′ de toegevoegde middellijn van COC′ is, dan is, volgens de eigenschappen der ellips,

$$EC \times EC' : OC^2 = EA^2 : OM^2,$$

maar $EC' = \frac{1}{2}OC' = \frac{1}{2}OC$ en $EC = OC + \frac{1}{2}OC' = \frac{3}{2}OC$ zijnde, is $EC \times EC' = \frac{3}{4}OC^2$, dus is:

$$\tfrac{3}{4}OC^2 : OC^2 = EA^2 : OM^2,$$

waaruit volgt $$EA = \tfrac{1}{2}OM\sqrt{3};$$

voorts is

$$Inh.\ ABC = EC \times EA\,Sin.AEC = \tfrac{3}{2}OC \times \tfrac{1}{2}OM\sqrt{3} \times Sin.COM,$$

dat is:

$$Inh.\ ABC = \tfrac{3}{4}\sqrt{3}.\ OC \times OM\ Sin.\ COM.$$

of, omdat volgens de eigenschappen der ellips

$$OC \times OM \times Sin.\ COM = ab \text{ is},$$

$$Inh.\ ABC = \tfrac{3}{4}ab\sqrt{3},$$

even als de boven voor het maximum gevondene waarde.

Op dezelfde wijze, waarop vroeger gebleken is, dat AB evenwijdig moet loopen met de raaklijnen der punten C en C′, blijkt ook, dat AC evenwijdig met de raaklijnen der punten B en B′, alsmede dat BC evenwijdig met de raaklijnen

der punten A en A′ zijn moet. De in de ellips beschrevene driehoeken, die den grootstmogelijken inhoud $\frac{1}{4}ab\sqrt{3}$ hebben, hebben dus alle de eigenschap, *dat de raaklijnen, aan de ellips door hunne hoekpunten getrokken, evenwijdig loopen met de overstaande zijden.* Wij hadden deze eigenschap, die *a priori* wel in te zien was, ook tot grondslag van de oplossing des voorstels kunnen leggen, waarbij dan het gebruik der differentiaal rekening zou kunnen vermeden zijn.

Aanmerkingen. 1°. Indien men de koorden AB′, B′C, CA′, A′B, BC′ en C′A trekt, zal de zeshoek AB′CA′BC′ het maximum zijn van alle zeshoeken, die in de ellips beschreven kunnen worden; want stellen wij, dat vijf hoekpunten van dezen zeshoek onveranderd op hunne plaats blijven, dan zal men het zesde hoekpunt C′ niet het minste kunnen verplaatsen, zonder dat C′ digter bij AB komt, waardoor de inhoud des driehoeks ABC′ en bijgevolg de inhoud van den zeshoek kleiner zou worden; en daar nu ten aanzien van elk hoekpunt hetzelfde geldt, wat wij hier van het hoekpunt C′ gezegd hebben, is het klaar, dat de zeshoek een maximum is. Dezelve is echter, even als den driehoek, in zoo verre onbepaald, dat men een der hoekpunten naar welgevallen kan nemen.

Daar E het midden van OC′ en dus EC′ $=\frac{1}{3}$ EC is, is ook *Inh.* ABC′ $=\frac{1}{3}$ *Inh.* ABC; op dezelfde wijze blijkt *Inh.* A′BC $=\frac{1}{3}$ *Inh.* ABC en *Inh.* AB′C $=\frac{1}{3}$ *Inh.* ABC; en hieruit volgt klaarblijkelijk, dat de inhoud van den zeshoek het dubbel is van den inhoud des driehoeks ABC. De grootstmogelijke inhoud, die een zeshoek, in de ellips beschreven, hebben kan, is derhalve $\frac{1}{2}ab\sqrt{3}$; er kunnen echter een oneindig aantal zeshoeken, die dezen inhoud hebben, in de ellips beschreven worden; maar alle deze zeshoeken hebben de eigenschap, dat de raaklijn door eenig hoekpunt getrokken, evenwijdig loopt met de diagonaal die de aanliggende hoekpunten vereenigt.

2°. Vergelijkt men, met het hier behandelde Voorstel, het LXXVIII Voorstel van het V Deel; dan blijkt, dat, als ABC een gegeven driehoek was, de ellips AB′CA′BC′ de kleinst mogelijke ellips zou wezen, die men om dien driehoek kon beschrijven.

II. OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Zij AFBCG (Fig. 129) de gegevene ellips en beschouwen wij dezelve, naar aanleiding der *Verhandeling* van den Heer LOBATTO, voorkomende in het 1 DEEL, 2 STUK der *Nieuwe Wis- en Natuurkundige Verhandelingen des Genootschaps*, als de doorsnede van een plat vlak, met eenen cylinder, die den cirkel a f b c g tot grondvlak heeft. Zoo dan van de ellips de halve groote as a en de halve kleine as b is, zal de straal van den cirkel b en de cosinus van den hoek, onder welken het vlak van de ellips, dat van den cirkel snijdt, $\frac{b}{a}$ zijn. Is dus ABC een driehoek in de ellips beschreven, dan is deszelfs projectie a b c een driehoek in den cirkel beschreven en dan zal volgens de eigenschap van de projectiën der vlakke figuren

$$\textit{Inh. } abc = \frac{b}{a} \textit{ Inh. } ABC$$

of

$$\textit{Inh. } ABC = \frac{a}{b} \textit{ Inh. } abc$$

zijn, waaruit volgt, dat, als ABC de grootst mogelijke driehoek in de ellips is, deszelfs projectie a b c de grootstmogelijke driehoek in den cirkel en dus een gelijkzijdige driehoek moet wezen. Trekt men nu in den cirkel uit a de middellijn a d en regthoekig door deze de middellijn f g, dan zijn a d en f g de projectien van de toegevoegde middellijnen AD en FG der ellips; (zie de bovengenoemde *Verhandeling* § 4) en dewijl a d de zijde b c regthoekig snijdt in e, zoo is f g evenwijdig met b c, en dus ook FG evenwijdig met BC; daar voorts ME : ED = m e : e d en m e = e d is, zoo is ook ME = ED en hieruit volgt nu deze constructie, om in eene ellips eenen driehoek te beschrijven, waarvan de inhoud zoo groot mogelijk is. Men trekke in de ellips twee elkander toegevoegde middellijnen AD en FG, deele de helft van eene derzelve midden door in E en trekke door E de lijn BC, evenwijdig met de andere middellijn FG, dan zal ABC de begeerde driehoek zijn.

Daar voorts, zoo als genoegzaam bekend is,

$$\textit{Inh. } abc = \tfrac{3}{4}b^2\sqrt{3}$$

is, zoo zal men hebben

$$Inh.\ ABC = \frac{a}{b}\ Inh.\ abc = \tfrac{3}{4}ab\sqrt{3}$$

Begeert men dezen inhoud uit te drukken in de toegevoegde middellijnen en den hoek, die dezelve met elkander maken, dan is, omdat, deze halve middellijnen p en q en dien hoek α noemende, volgens eene bekende eigenschap der ellips, $ab = pq\ Sin.\ \alpha$ is,

$$Inh.\ ABC = \tfrac{3}{4}pq\sqrt{3}.\ Sin.\ \alpha.$$

Aanmerkingen. 1°. Daar de toegevoegde middellijnen AD en FG volstrekt willekeurig genomen zijn, zoo is het duidelijk, dat men dezelve zoodanig zal kunnen trekken, dat de driehoek ABC aan nog eene voorwaarde voldoet.

Wil men bijv. dat eene van deszelfs zijden (BC) evenwijdig zij met eene gegevene lijn PQ, dan behoeft men slechts de middellijn FG evenwijdig met PQ te trekken. In het CXCII Voorstel van het III Deel is ons Vraagstuk onder deze bepaling behandeld, en zoowel dezelfde constructie, als dezelfde uitdrukking voor den inhoud gevonden. Aldaar is echter, door voorbij te zien, dat standvastig $pq\ Sin.\ \alpha = ab$ is, uit deze uitdrukking de verkeerde gevolgtrekking afgeleid, dat de grootst mogelijke driehoek, welke in eene ellips kan beschreven worden, zijnen top in het uiteinde van een' der assen heeft, en met zijne bazis evenwijdig aan de andere as loopt, de helft van eerstgenoemde as midden doordeelende. Hetgeen daar van de assen der ellips gezegd wordt, geldt, blijkens onze oplossing, in het algemeen voor al hare toegevoegde middellijnen.

Begeert men, dat eene der zijden BC van den driehoek gelijk zij aan eene gegevene lijn PQ, dan heeft men, omdat (zie § 6 der meergen. *Verhandeling*) elke koorde der ellips tot haar projectie staat, gelijk de met haar evenwijdig loopende middellijn tot de kleine as, de evenredigheid:

$$PQ : bc = FG : fg$$

of

$$bc \cdot PQ = fg \cdot FG,$$

waaruit volgt, dat men, om aan de gestelde voorwaarde te voldoen, de middellijn FG slechts vierde evenredig tot de bekende lijnen bc, PQ en fg behoeft te nemen. Het is echter duidelijk, dat de lijn PQ niet geheel willekeurig kan gegeven worden; want uit de genoemde evenredigheid volgt:

$$PQ = \frac{bc}{fg} \times FG$$

of, daar fg $= 2b$ en bc $= b\sqrt{3}$ is,

$$PQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times FG;$$

daar nu FG niet kleiner dan $2b$ en niet grooter dan $2a$ kan zijn, zal PQ niet buiten de grenzen $b\sqrt{3}$ en $a\sqrt{3}$ mogen gegeven zijn. Is PQ zoo klein mogelijk en dus PQ $= b\sqrt{3}$ gegeven, dan verkrijgt men voor ABC eenen gelijkbeenigen driehoek, die zijnen top in het uiteinde der groote as heeft; en is PQ zoo groot mogelijk, dat is: PQ $= a\sqrt{3}$ gegeven, dan vindt men voor ABC eenen gelijkbeenigen driehoek, waarvan de top in het uiteinde der kleine as gelegen is.

2°. Als men aan den cirkel afbcg in de punten a, b en c raaklijnen trekt, dan zullen deze eenen gelijkzijdigen driehoek rst vormen, die klaarblijkelijk de projectie is van den driehoek RST, welke verkregen wordt, door raaklijnen aan de ellips in de punten A, B en C te trekken. Daar nu rst de kleinst mogelijke is van alle driehoeken, welke om den cirkel kunnen beschreven worden, zoo zal RST den kleinst mogelijken inhoud hebben van alle driehoeken, die om de ellips beschreven kunnen worden. Daar voorts

$$Inh.\ rst = 4 \times Inh.\ abc = 3b^2\sqrt{3}$$

is, zal men voor den kleinst mogelijken inhoud van eenen om de ellips beschreven driehoek hebben

$$Inh.\ RST = \frac{a}{b}\ Inh.\ rst = 3ab\sqrt{3}.$$

3°. Op dezelfde gronden, als wij boven in eene ellips den grootst mogelijken driehoek leerden beschrijven zal men in het algemeen den grootst mogelijken n hoek in eene ellips kunnen construeren.

Zij daartoe (Fig. 130) AYXZ eene gegevene ellips en de cirkel ayxz hare projectie. Dan beschrijve men in dezen cirkel eenen regelmatigen n-hoek abcd..., trekke uit a eene middellijn ax en regthoekig door deze de middellijn yz. Uit de punten b, c, *enz.* trekke men de lijnen bp, cq, dr, *enz.* evenwijdig aan yz. Indien men dan in de ellips twee elkander toegevoegde middellijnen AX en YZ trekt en eene van deze, bijvoorb. AX, in de punten P, Q, R, *enz.* zoodanig verdeelt, dat

$\{AP, PQ, QR, \text{ens.}\} :: \{ap, pq, qr, \text{ens.}\}$ is, dan zullen door uit de punten P, Q, R, ens. de lijnen PB, QC, RD, ens. evenwijdig met YZ te trekken, de hoekpunten van den begeerden *n*-hoek bepaald zijn. Het is klaar, dat deze constructie alleen dan zuiver meetkunstig zal kunnen geschieden, indien *n* zoodanig gegeven is, dat men eenen regelmatigen veelhoek van *n* zijden in den cirkel kan beschrijven. Laat wederom *a* en *b* de halve assen der ellips AYXZ en dus *b* de straal van den cirkel a y x z zijn, dan is in het algemeen (zie J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* 2e druk. § 1131.)

$$Inh.\ \text{abcd} \ldots = \tfrac{1}{2}\, nb^2\ Sin.\ \frac{360^\circ}{n},$$

en bijgevolg

$$Inh.\ \text{ABCD} \ldots = \tfrac{1}{2}\, nab\ Sin.\ \frac{360^\circ}{n}.$$

Trekt men aan de ellips AYXZ raaklijnen, door de hoekpunten van den grootst mogelijken ingeschreven *n*-hoek, dan zullen deze eenen om de ellips beschreven, *n*-hoek vormen, die den regelmatigen *n*-hoek, om den cirkel a y x z beschreven, tot projectie zal hebben, en die bijgevolg de kleinst mogelijke *n*-hoek zal wezen, die om de ellips beschreven kan worden. Omdat (zie als boven) de inhoud van den regelmatigen *n*-hoek, om den cirkel a y x z beschreven, uitgedrukt wordt door

$$Inh. = nb^2\ Tang.\ \frac{180^\circ}{n},$$

zal de inhoud van den kleinstmogelijken *n*-hoek, om de ellips beschreven, zijn

$$Inh. = nab\ Tang.\ \frac{180^\circ}{n}.$$

AANMERKING *van* W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER. Indien men (Fig. 129), uit het middelpunt m van den cirkel a f b c g, eenen anderen cirkel beschrijft, waarvan de straal de helft is van dien des eersten cirkels, zal deze tweede cirkel de zijden van den driehoek a b c aanraken. Deze tweede cirkel zal de projectie zijn van eene ellips, die op de halve assen der ellips AFBCG geconstrueerd kan worden; deze tweede ellips zal dan ook de zijden van den driehoek ABC aanraken.

Om in de ellips den grootst mogelijken driehoek te beschrijven, kan men dus ook eerst eene ellips construeren, waarvan de assen langs die der gegevene ellips liggen, maar slechts half zoo groot zijn; en vervolgens kan men aan die tweede ellips, drie raaklijnen trekken, die elkander in den omtrek der eerste ellips twee aan twee snijden.

CCXXVI. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

Men vraagt naar vier getallen, die de volgende eigenschappen hebben: 1°. *de som der twee eerste is gelijk aan tweemaal het derde;* 2°. *de som der beide laatste is gelijk aan het tweede;* 3°. *de vierkantswortel uit het eerste is gelijk aan twee maal het laatste;* en 4°. *het vierkant van het tweede min het vierkant van het eerste is gelijk aan twintig maal het laatste?*

OPGELOST *door* C. VAN SCHAICK, J. ACQUOY, J. BASSAN., C. J. BOLTEN, G. KOSTER, D. VAN LANKEREN MATTHES, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, L. VAN DE KASTEELE, H. KLOOS, W. VAN LOON, F. C. RADIJS *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* C. VAN SCHAICK.

Men stelle voor de getallen x, y, z en u, dan geeft het voorstel de vergelijkingen

$$x + y = 2z \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

$$z + u = y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

$$\sqrt{x} = 2u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

en

$$y^2 - x^2 = 20u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Uit (2) volgt $z = y - u$, hierdoor verandert (1) in

$$x + y = 2y - 2u$$

of

$$x = y - 2u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5);$$

deze waarde van x in (3) overbrengende, komt er

$$\sqrt{(y - 2u)} = 2u$$

of

$$y - 2u = 4u^2,$$

dus is

$$y = 4u^2 + 2u \quad \ldots\ldots \quad (6);$$

verder de waarde van x, volgens (5), in (4) stellende, verkrijgt men

$$y^2 - (y - 2u)^2 = 20u$$

of

$$4uy - 4u^2 = 20u;$$

en door $4u$ deelende

$$y - x = 5$$

of $$y = x + 5 \ldots\ldots (7);$$

uit het verband van (6) en (7) heeft men dus de vergelijking

$$4x^2 + 2x = x + 5$$

of $$4x^2 + x = 5,$$

waaruit, op de gewone wijze, gevonden wordt

$$x = 1 \quad \text{en} \quad x = -\tfrac{5}{4}.$$

Met deze beide waarden van x stemmen overeen:

volgens (7) $y = 6$ en $y = 3\tfrac{3}{4}$,

volgens (5) $x = 4$ en $x = 6\tfrac{1}{4}$

en volgens (2) $z = 5$ en $z = 5$.

De gevraagde getallen zijn dus:

of 4, 6, 5 en 1; of $6\tfrac{1}{4}$, $3\tfrac{3}{4}$, 5 en $-1\tfrac{1}{4}$.

AANMERKING van J. ACQUOY. Het eerste antwoord voldoet regtstreeks aan het voorstel; het tweede voldoet insgelijks, mits men den vierkantswortel uit het eerste getal negatief neme.

CCXXVII. VOORSTEL.

Door C. VAN SCHAICK.

De naam van zekeren buitengewonen veldheer wordt met acht letters geschreven, en de getallen, die de plaats dezer letters in het alphabeth aanwijzen, hebben de volgende eigenschappen: 1°. *het* 5de *min* 2de, *het* 5de, *het* 1ste *min* 2de, *het* 1ste, *en het* 3de *min* 2de, *maken eene rekenkunstige reeks uit;* 2°. *het* 1ste, 4de *en* 3de *getal, vormen eene dergelijke reeks:* 3°. *eene zoodanige reeks wordt almede gevormd, door het viervoud van het* 2de, *de helft van het* 5de, *en de helft van het* 3de *getal;* 4°. *het* 6de *getal is een derde gedeelte van het* 7de; *en* 5°. *het* 4de *getal is evengroot als het* 7de *en het* 1ste *even groot als het* 8ste. *Wie is de hier bedoelde persoon?*

OPGELOST *door* G. KOSTER, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, W. G. VAN DELDEN, M. L. GOEDE, H. KLOOS, D. VAN LANKEREN MATTHES, W. VAN LOON, F. C. RADIJS, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER en A. VOS.

OPLOSSING *van* G. KOSTER.[1]

Met in acht neming van de 4de en 5de bepaling, kan men voor de getallen stellen

$$x,\ v,\ w,\ 3y,\ z,\ y,\ 3y \text{ en } x;$$

en dan moeten:

volgens 1°. $z - v,\ z,\ x - v,\ x$ en $w - v$,

volgens 2°. $x,\ 3y$ en w,

volgens 3°. $4v,\ \frac{1}{2}z$ en $\frac{1}{2}w$

rekenkunstige reeksen zijn.

De twee laatste reeksen vorderen, dat men hebbe

$$6y = x + w \text{ of } x = 6y - w \ldots\ldots (1)$$

en

$$z = 4v + \tfrac{1}{2}w \ldots\ldots\ldots (2),$$

hierdoor verandert de eerste reeks in

$$3v + \tfrac{1}{2}w,\ 4v + \tfrac{1}{2}w,\ 6y - w - v,\ 6y - w,\ w - v;$$

uit de eerste en tweede, gelijk ook uit de derde en vierde termen dezer reeks, blijkt, dat v het gemeen verschil der termen moet wezen. De tweede en derde, gelijk ook de vierde en vijfde termen dezer reeks, moeten bij gevolg dat zelfde verschil v hebben, en dit geeft de vergelijkingen

$$(6y - w - v) - (4v + \tfrac{1}{2}w) = v$$

en

$$(w - v) - (6y - w) = v,$$

welke vereenvoudigd worden tot

$$6y - 1\tfrac{1}{2}w = 6v \ldots\ldots\ldots (3)$$

en

$$2w - 6y = 2v \ldots\ldots\ldots (4),$$

terwijl uit de laatste volgt

$$y = \frac{w - v}{3} \ldots\ldots (5).$$

Neemt men nu de som van (3) en (4), dan komt er terstond $\frac{1}{2}w = 8v$

of . . . . $w = 16v$;

door (5) heeft men dan . . . . $y = 5v$;

door (2) . . . . $z = 12v$

en door (1) . . . . $x = 14v$,

zoo dat nu al de onbekenden in v zijn uitgedrukt.

De acht onbekende getallen zijn derhalve

$$14v,\ v,\ 16v,\ 15v,\ 12v,\ 5v,\ 15v,\ 14v;$$

maar hierin kan, omdat het alle geheele getallen kleiner dan 27 moeten wezen, v niet anders dan de eenheid zijn, de acht getallen zijn derhalve:

14, 1, 16, 15, 12, 5, 15, 14,

waarmede overeenkomen de letters

N A P O L E O N,

die den naam van den bedoelden veldheer aanwijzen.

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

Men begeert twee geheele getallen te vinden, waarvan de som en het product te zamen genomen 139 *opleveren.?* (*)

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, J. BAAIJAN, W. G. VAN DELDEN, M. L. GORDE, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, M. G. SNOER, A. VOS, C. J. BOLTEN, H. A. HARTOGH, L. VAN DE KASTEELE, H. KLOOS, G. KOSTER, W. VAN LOON *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

De getallen door x en y voorstellende, heeft men slechts te voldoen aan de enkele vergelijking

$$xy + x + y = 139;$$

in plaats van dezelve kan men schrijven

$$xy + x + y + 1 = 140$$

of ook $$(x + 1)(y + 1) = 140.$$

Daar x en y geheele getallen moeten wezen, blijkt uit deze vergelijking, dat $x + 1$ en $y + 1$ twee factoren moeten zijn, waarin 140 moet kunnen ontbonden worden; ontbindt men dus 140 in twee factoren en trekt men van elken factor de eenheid af, dan zullen de getallen, die er komen, aan de vraag beantwoorden.

Het getal 140 kan nu, alleen op de volgende zes manieren, in twee positieve factoren ontbonden worden:

1×140, 2×70, 4×35, 5×28, 7×20, 10×14,

waaruit, voor de begeerde getallen, de zes volgende antwoorden voortvloeijen

0 en 139; 1 en 69; 3 en 34; 4 en 27; 6 en 19, 9 en 13,

zoodat er, het eerste antwoord niet mede rekenende, in het geheel vijf antwoorden op het voorstel zijn.

Wilde men ook negatieve getallen ter beantwoording der vraag toelaten, dan zou men het getal 140 ontbinden, op de volgende wijze:

-1×-140, -2×-70, -4×-35, -5×-28, -7×-20, -10×-14,

waaruit voor de verlangde getallen zou volgen

-2 en -141; -3 en -71; -5 en -36; -6 en -29; -8 en -21; -11 en -15.

(*) MEIJER HIRSCH, *Verz. van Voorb.*, vert. door G. BAHAHAN, bl. 214. N°. 31.

AANMERKING. In het algemeen gegeven zijnde $xy+x+y=a$, zal men, om x en y in geheele getallen te vinden, slechts $a+1$ in twee factoren moeten ontbinden en elk dezer factoren met de eenheid moeten verminderen. Was $a+1$ een ondeelbaar getal, dan zou men hieruit besluiten, dat behalve 0 en a geene geheele positieve getallen aan de vraag beantwoorden konden.

CCXXIX. VOORSTEL.

Door H. A. HARTOGH.

Voor x eene zoodanige waarde te vinden, dat de uitdrukking $8x^2+26x+20$ *een volkomen vierkant worde?*

OPGELOST *door* F. C. RADIJS, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, H. A. HARTOGH, H. KLOOS, G. KOSTER, D. VAN LANKEREN MATTHES, C. VAN SCHAICK, M. G. SNOEK, J. S. SPEIJER *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* F. C. RADIJS.

De opgegevene uitdrukking in factoren ontbindende, vinden wij voor dezelve

$$2(x+2)(4x+5),$$

stellen wij om dezelve tot een vierkant te maken

$$2(x+2)(4x+5)=p^2(x+2)^2$$

dan vinden wij hieruit achtervolgens

$$8x+10=p^2x+2p^2,$$

$$x=\frac{2p^2-10}{8-p^2}$$

of

$$x=-2+\frac{6}{8-p^2}.$$

Hierin voor p eene willekeurige rationale waarde nemende, zal de overeenkomstige waarde van x aan het voorstel beantwoorden; zoo is bijv. voor $p=2\frac{1}{2}$, $x=1\frac{3}{7}$ en $8x^2+26x+20=\left(\frac{60}{7}\right)^2$.

Begeerde men voor x een geheel getal, dan zou ook $\frac{6}{8-p^2}$ een geheel getal en bijgevolg $8-p^2$ een factor van 6 moeten zijn; men moet dan hebben

$$8-p^2=1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -1,\ -2,\ -3 \text{ of } -6;$$

bijgevolg zal men moeten hebben

$$p^2=7,\ 6,\ 5,\ 2,\ 9,\ 10,\ 11 \text{ of } 14;$$

van alle deze waarden voor p^2 kan alleen 9 in aanmerking komen, omdat anders p niet rationaal zou zijn, nemen wij dus $p^2 = 9$, dan wordt $x = -8$ en $8x^2 + 26x + 20 = 18^2$; het blijkt hieruit, dat geen ander geheel getal dan -8, en dus geen positief geheel getal, voor x zal kunnen gevonden worden.

CCXXX. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Wanneer in eene ellips de grootst mogelijke regthoek beschreven is, verlangt men den inhoud van elk der vier elliptische segmenten te vinden, welke door dien regthoek van de ellips worden afgesneden?

OPGELOST *door* J. ACQUOY, J. S. SPEIJER, J. BASSAN, W. G. VAN DELDEN, S. DIK, CORNSZ., D. VAN LANKEREN MATTHES *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* J. ACQUOY.

Zij ABCD (*Fig.* 131) eene ellips, waarvan de halve assen OA $= a$ en OB $= b$ gegeven zijn, en laat PQRS de grootst mogelijke regthoek zijn, die in dezelve beschreven kan worden. Beschouwen wij nu (naar aanleiding van de Verhandeling des Heeren LOBATTO, voorkomende in de *Wis- en Natuurkundige Verh.* dezes genootschaps, 1 Deel 2 Stuk) de ellips ABCD als de doorsnede van een' cilinder, die den cirkel a b c d tot grondvlak heeft, dan zal, (zie § 10 der genoemde Verhandeling) het vierkant p q r s de projectie zijn van den regthoek PQRS en dus zullen de vier gelijke cirkelsegmenten p a q, q b r, r c s en s d p de projectien zijn der vier elliptische segmenten PAQ, QBR, RCS en SDP, die derhalve ook onderling gelijk zullen zijn.

Nu is (volgens § 9 der meergen. Verh.)

$$\textit{Inh. Ellips ABCD} = ab\pi$$

en (volgens § 10)

$$\textit{Inh. Regth. PQRS} = 2ab,$$

hieruit volgt door aftrekking

$$\textit{Som der 4 segmenten} = ab(\pi - 2)$$

en dus, daar de segmenten evenveel inhoud hebben,

$$\textit{Inh. van elk segment} = \tfrac{1}{4}ab(\pi - 2).$$

Eene andere oplossing van dit vraagstuk kan men vinden in het II DEEL dezer *Verzameling*, VOORSTEL CCXLI.

Aanmerking van J. S. Speijer. Uit de gelijkheid der vier segmenten volgt, dat de diagonalen van den regthoek PQRS den inhoud der ellips in vier gelijke deelen verdeelen; alsmede dat deze diagonalen en de assen den inhoud der ellips verdeelen, in acht gelijke deelen.

CCXXXI. Voorstel.

Door S. Dik, Cornsz.

Den inhoud te vinden van eenen sector der ellips, begrepen tusschen de groote as en eenen willekeurigen voerstraal?

Opgelost *door* J. Acquoy, J. Bassan, S. Dik, Cornsz., D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Zij ABCD (Fig. 132) eene ellips, waarvan de halve assen $OA = a$ en $OB = b$, en dus ook de uitmiddelpuntigheid $OF = e = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, gegeven zijn. Zij voorts FM een willekeurige voerstraal en laat $FM = v$, alsmede *hoek* $AFM = \psi$, gesteld worden, dan is, volgens de bekende polaire vergelijking der ellips, het brandpunt F als pool en de lijn FA als oorsprong der hoeken aannemende,

$$v = \frac{b^2}{a + e \operatorname{Cos.} \psi}.$$

Daar nu in het algemeen de inhoud van eenen polairen sector der kromme lijn, wier poolvergelijking $v = F(\psi)$ is, wordt uitgedrukt door de formule

$$I = \tfrac{1}{2} \int v^2 \partial \psi,$$

zoo hebben wij hier

$$I = \tfrac{1}{2} \int \left(\frac{b^2}{a + e \operatorname{Cos.} \psi} \right)^2 \partial \psi = \tfrac{1}{2} b^4 \int \frac{\partial \psi}{(a + e \operatorname{Cos.} \psi)^2}.$$

Nu is (zie I. R. Schmidt, *Diff.* en *Int. Rek.* § 255.)

$$\int \frac{\partial \psi}{(a + e \operatorname{Cos.} \psi)^2} = \frac{-e \operatorname{Sin.} \psi}{(a^2 - e^2)(a + e \operatorname{Cos.} \psi)} + \frac{a}{a^2 - e^2} \int \frac{\partial \psi}{a + e \operatorname{Cos.} \psi}$$

en (volgens § 254, omdat $e < a$ is)

$$\int \frac{\partial \psi}{a + e \operatorname{Cos.} \psi} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 - e^2)}} \operatorname{Boog} \operatorname{Cos.} \frac{a \operatorname{Cos.} \psi + e}{a + e \operatorname{Cos.} \psi},$$

deze laatste integraal in de voorgaande overbrengende, tevens $a^2 - e^2 = b^2$ substituerende, komt er

$$\int \frac{\partial \psi}{(a + e \operatorname{Cos.} \psi)^2} = \frac{1}{b^2} \left\{ \frac{-e \operatorname{Sin.} \psi}{a + e \operatorname{Cos.} \psi} + \frac{a}{b} \operatorname{Boog} \operatorname{Cos.} \frac{a \operatorname{Cos.} \psi + e}{a + e \operatorname{Cos.} \psi} \right\},$$

waardoor de bovenstaande waarde voor I overgaat in

$$I = \tfrac{1}{2}b^2\left\{\frac{-eSin.\psi}{a+eCos.\psi}+\frac{a}{b}BoogCos.\frac{aCos.\psi+e}{a+eCos.\psi}\right\}+C;$$

om, volgens het voorstel, den inhoud van den sector AFM te verkrijgen, moet deze integraal van $\psi = 0$ tot $\psi = \psi$ genomen worden, waardoor men verkrijgt

$$Inh.Sect.AFM = -\tfrac{1}{2}\frac{b^2eSin.\psi}{a+eCos.\psi}+\tfrac{1}{2}abBoogCos.\frac{aCos.\psi+e}{a+eCos.\psi}.$$

Het is ook niet moeijelijk den gevraagden inhoud van den sector AFM, zonder behulp der integraalrekening, te vinden; want trekkende de ordinaat MP, alsmede de halve middellijn OM en stellende OP $= u$, MP $= y$; *hoek* MOP $= \phi$, dan is (zie de verhandeling van den Heer LOBATTO over de ellips, in het 1 Deel, 2 Stuk der *Wis- en Natuurk. Verh.* des Genootschaps, § 9, formule 20)

$$Inh.\ Sect.\ AOM = \tfrac{1}{2}ab\ Boog\ Tang.\left(\frac{a}{b}\ Tang.\ \phi\right);$$

voorts is

$$Inh.\ Drieh.\ OFM = \tfrac{1}{2}OF \times MP = \tfrac{1}{2}ey;$$

en hieruit volgt door aftrekking terstond:

$$Inh.\ Sect.\ AFM = -\tfrac{1}{2}ey + \tfrac{1}{2}ab\ Boog\ Tang.\left\{\frac{a}{b}\ Tang.\ \phi\right\},$$

of ook, omdat

$$Tang.\ \phi = \frac{MP}{OP} = \frac{y}{u}$$

is,

$$Inh.\ Sect.\ AFM = -\tfrac{1}{2}ey + \tfrac{1}{2}ab\ Boog\ Tang.\ \frac{ay}{bu},$$

door welke formule de gevraagde inhoud uitgedrukt is, in de regthoekige coördinaten van het punt M.

Begeerde men in deze formule de polaire coördinaten v en ψ, in plaats der regthoekige u en y in te voeren, dan heeft men uit den regthoekigen driehoek MPF,

FP $=$ FM *Cos.* MFP en MP $=$ FM *Sin.* MFP

of $u - e = v\ Cos.\ \psi$ en $y = v\ Sin.\ \psi$;

men zal dus slechts $u = e + v\ Cos.\ \psi$ en $y = v\ Sin.\ \psi$ te substitueren hebben; hierdoor vindt men

$$Inh.Sect.AFM = -\tfrac{1}{2}evSin\,\psi + \tfrac{1}{2}abBoogTang\frac{avSin.\psi}{b(e+vCos.\psi)}.$$

Substitueert men hierin weder $v = \frac{b^2}{a + e\ Cos.\ \psi}$, dan komt er na eenige herleiding,

$$Inh.Sect.AFM = -\tfrac{1}{2}\frac{b^2 e Sin.\psi}{a + eCos.\psi} + \tfrac{1}{2}ab\,BoogTang.\frac{bSin\,\psi}{aCos.\psi + e}.$$

Om eindelijk te doen zien, dat deze laatste formule voor den inhoud des sectors, niet van de eerst gevondene verschilt merken wij op, dat in het algemeen

$$Boog\ Tang.\ p = Boog\ Cos.\ \frac{1}{\sqrt{(1 + p^2)}}$$

is; hierin $p = \frac{b\ Sin.\ \psi}{a\ Cos.\ \psi + e}$ nemende, komt er

$$BoogTang.\frac{bSin.\psi}{aCos.\psi + e} = BoogCos.\frac{aCos.\psi + e}{\sqrt{\{(aCos.\psi + e)^2 + b^2 Sin.^2\psi\}}};$$

nu is, indien wij $(a\ Cos.\ \psi + e)^2$ ontwikkelen en $b^2 = a^2 - e^2$ substitueren,

$$(aCos.\psi + e)^2 + b^2 Sin.^2\psi = a^2 Cos.^2\psi + 2aeCos.\psi + e^2 + a^2 Sin.^2\psi - e^2 Sin.^2\psi$$
$$= a^2 + 2aeCos.\psi + e^2 Cos.\psi$$

en, hieruit den vierkantswortel nemende,

$$\sqrt{\{(aCos.\psi + e)^2 + b^2 Sin.^2\psi\}} = a + eCos.\psi;$$

hierdoor verkrijgen wij

$$BoogTang.\frac{bSin.\psi}{aCos.\psi + e} = BoogCos.\frac{aCos.\psi + e}{a + eCos.\psi}$$

en alzoo is de indentiteit der beide formulen aangetoond.

CCXXXII. VOORSTEL.

Door S. DIK, CORNSZ.

Binnen eenen regten hoek XOY (Fig. 133), *een punt* A *gegeven zijnde, verlangt men door dat punt eene lijn te trekken; zoodanig, dat het gedeelte van die lijn, door de beenen* OX *en* OY *des regten hoeks afgesneden wordende, een minimum zij?*

OPGELOST *door* C. J. BOLTEN, J. ACQUOY, J. BASSAN, S. DIK, CORNSZ., L. VAN DE KASTEELE, D. VAN LANKEREN MATTHES, J. S. SPEIJER, A. VOS, M. L. GOEDE *en* W. G. VAN DELDEN.

OPLOSSING *van* C. J. BOLTEN.

Laat het punt A bepaald zijn, door de gegevens *hoek* XOA $= \alpha$ en OA $= a$; laat voorts XY eene door het punt

A getrokkene lijn wezen en stellen wij *hoek* OXY $= \phi$, XY $= s$, dan zal het er slechts op aan komen, ϕ zoodanig te bepalen, dat s een minimum worde.

Uit de driehoeken AOX en AOY heeft men de evenredigheden

$$OA : AX = Sin.\ AXO : Sin.\ AOX$$

en

$$OA : AY = Sin.\ AYO : Sin.\ AOY,$$

waaruit dadelijk volgt

$$AX = \frac{OA\ Sin.\ AOX}{Sin.\ AXO} = \frac{a\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ \phi}$$

en

$$AY = \frac{OA\ Sin.\ AOY}{Sin.\ AYO} = \frac{a\ Cos.\ \alpha}{Cos.\ \phi};$$

omdat $s = XY = AX + AY$ is, hebben wij alzoo

$$s = a \left\{ \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ \phi} + \frac{Cos.\ \alpha}{Cos.\ \phi} \right\}.$$

Deze functie differentierende, komt er

$$\frac{\partial s}{\partial \phi} = a \left\{ \frac{-\ Sin.\ \alpha\ Cos.\ \phi}{Sin.^2\ \phi} + \frac{Cos.\ \alpha\ Sin.\ \phi}{Cos.^2\ \phi} \right\},$$

en dit differentiaal quotient gelijk nul stellende, vinden wij achtervolgens

$$\frac{Cos.\ \alpha\ Sin.\ \phi}{Cos.^2\ \phi} = \frac{Sin.\ \alpha\ Cos.\ \phi}{Sin.^2\ \phi}$$

of

$$\frac{Sin.^3\ \phi}{Cos.^3\ \phi} = \frac{Sin.\ \alpha}{Cos.\ \alpha}.$$

$$Tang.^3\ \phi = Tang.\ \alpha$$

en

$$Tang.\ \phi = \sqrt[3]{Tang.\ \alpha}.$$

Uit den aard der zaak is het klaar, dat de lijn XY $= s$, indien men ϕ van 0° tot 90° laat aangroeijen, eens een minimum zijn zal; voorts kan s geen minimum wezen, ten zij $\frac{\partial s}{\partial \phi} = 0$ of $\frac{\partial s}{\partial \phi} = \infty$ is; aan $\frac{\partial s}{\partial \phi} = \infty$, kan alleen voldaan worden, door $\phi = 0$ of $\phi = 90°$ te nemen; aan $\frac{\partial s}{\partial \phi} = 0$ kan alleen voldaan worden, door $Tang.\ \phi = \sqrt[3]{Tang.\ \alpha}$ te nemen; maar voor $\phi = 0$ en voor $\phi = 90°$ is XY $= s$ klaarblijkelijk geen minimum; derhalve zal het minimum werkelijk voor $Tang.\ \phi = \sqrt[3]{Tang.\ \alpha}$ moeten plaats hebben; en door deze redenering wordt het overtollig, om het bestaan van dit minimum aan $\frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2}$ te toetsen.

Alzoo de vergelijking $Tang.^3\,\phi = Tang.\,\alpha$ van den derden graad is, kan het vraagstuk, in het algemeen, niet door zuiver meetkunstige constructie, dat is: door snijding van regte lijnen en cirkels opgelost worden.

Was echter $Tang.\,\alpha = \frac{AB}{OB}$ een volkomen derdemagts-getal, dan zou de constructie zuiver meetkunstig kunnen geschieden. Bijv. indien het punt A zoodanig gegeven was, dat $AB = \frac{27}{64}\,OB$ was, dan zou men hebben

$$Tang.\,\phi = \sqrt[3]{Tang.\,\alpha} = \sqrt[3]{\frac{AB}{OB}} = \sqrt[3]{\tfrac{27}{64}} = \tfrac{3}{4},$$

dus zou men $BX = \frac{4}{3}\,AB$ nemende en vervolgens door X en A de lijn XY trekkende, het begeerde minimum geconstrueerd hebben; want nu is naar behooren

$$Tang.\,\phi = \frac{AB}{BX} = \tfrac{3}{4}.$$

Was $\alpha = 45°$ en dus $Tang.\,\alpha = 1$, dan zoo ook $Tang.\,\phi = 1$ en bijgevolg $\phi = 45°$ zijn.

Om de waarde van het minimum in de gegevens uit te drukken, hebben wij slechts de waarde, voor ϕ gevonden, in de uitdrukking

$$x = a\left\{\frac{Sin.\,\alpha}{Sin.\,\phi} + \frac{Cos.\,\alpha}{Cos.\,\phi}\right\}$$

over te brengen; omdat $Sin.\,\phi = \frac{Tang.\,\phi}{\sqrt{(1 + Tang.^2\,\phi)}}$ en $Cos.\,\phi = \frac{1}{\sqrt{(1 + Tang.^2\,\phi)}}$ is, schrijven wij daartoe vooraf

$$x = a\left\{\frac{Sin.\,\alpha}{Tang.\,\phi} + Cos.\,\alpha\right\}\sqrt{(1 + Tang.^2\,\phi)}$$

en stellen alsdan $Tang.\,\phi = \sqrt[3]{Tang.\,\alpha} = \frac{\sqrt[3]{Sin.\,\alpha}}{\sqrt[3]{Cos.\,\alpha}}$, waardoor wij achtervolgens vinden

$$x = a\left\{\frac{Sin.\,\alpha\sqrt[3]{Cos.\,\alpha}}{\sqrt[3]{Sin.\,\alpha}} + Cos.\,\alpha\right\}\sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha}}{\sqrt[3]{Cos.^2\,\alpha}}\right)}$$

$$= a\left\{\sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha}\sqrt[3]{Cos.\,\alpha} + Cos.\,\alpha\right\}\frac{1}{\sqrt[3]{Cos.\,\alpha}}\sqrt{\left\{\sqrt[3]{Cos.^2\,\alpha} + \sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha}\right\}}$$

$$= a\left\{\sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha} + \sqrt[3]{Cos.^2\,\alpha}\right\}\sqrt{\left\{\sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha} + \sqrt[3]{Cos.^2\,\alpha}\right\}}$$

$$= a\sqrt{\left\{\sqrt[3]{Sin.^2\,\alpha} + \sqrt[3]{Cos.^2\,\alpha}\right\}^3}$$

of $$x = a\left(Sin.^{\frac{2}{3}}\alpha + Cos.^{\frac{2}{3}}\alpha\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left\{(a\,Sin.\alpha)^{\frac{2}{3}} + (a\,Cos.\alpha)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}};$$

daar nu $a\ Sin.\ \alpha = AB$ en $a\ Cos.\ \alpha = OB = AC$ is, hebben wij voor het minimum ook

$$XY = \left(AB^{\frac{2}{3}} + AC^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

dat is: $$XY^{\frac{2}{3}} = AB^{\frac{2}{3}} + AC^{\frac{2}{3}}$$

of $$\sqrt[3]{XY}^2 = \sqrt[3]{AB}^2 + \sqrt[3]{AC}^2.$$

Eindelijk verdient het opmerking, dat ϕ alleen van α en geenszins van a afhangt, zoodat voor alle punten A, die men op eene zelfde door O gaande lijn OA zou kunnen nemen, de kleinst mogelijke lijnen XY met elkander evenwijdig zijn.

CCXXXIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men verlangt twee rekenkunstige reeksen, elk van drie termen, te vinden; zoodanig, dat al deze termen geheele vierkante getallen zijn; dat de middelste termen dezer reeksen onderling gelijk, doch de uiterste termen verschillend zijn; en dat de beide reeksen gelijke sommen opleveren?

Opgelost door J. S. Speijer, J. Acquoy, D. van Lankeren Matthes, M. G. Snoer, A. Vos, J. Bassan, M. L. Goede, H. Kloos, G. Koster, B. Lubbers en C. van Schaick.

Oplossing van J. S. Speijer.

In de Aanmerking op het CCXVII. Voorstel van het V. Deel dezer *Verzameling*, is aangetoond, dat men, voor de wortels der drie vierkanten, die eene rekenkunstige reeks uitmaken, de volgende vormen heeft:

$$n^2 - p^2 - 2pn,\ n^2 + p^2,\ n^2 - p^2 + 2pn;$$

indien men deze vormen met een zelfden willekeurigen factor vermenigvuldigt, zullen zij de eigenschap behouden, van de wortels voor te stellen van drie vierkanten, die eene

rekenkunstige reeks daarstellen. Nemen wij voor dezen factor $x^2 + y^2$, dan zijn die wortels

$$(x^2+y^2)(n^2-p^2-2pn),(x^2+y^2)(n^2+p^2),(x^2+y^2)(n^2-p^2+2pn)(A).$$

Schrijven wij nu hierin voor x en y, n en p, en omgekeerd, dan zullen de te voorschijn komende vormen

$$(n^2+p^2)(x^2-y^2-2xy),(n^2+p^2)(x^2+y^2),(n^2+p^2)(x^2-y^2+2xy)(B)$$

dezelfde eigenschap als de vormen (A) bezitten; terwijl de middelste term dezelfde is gebleven. Derhalve zijn (A) en (B) algemeene vormen, waardoor de vierkantswortels der gevraagde reeksen voorgesteld worden en waarin men voor n, p, x en y willekeurige getallen kan nemen; kunnende dan, zoo alle die wortels een zelfden gemeenen deeler mogten hebben verkregen, die deeler uit dezelve al of niet worden weggelaten.

Voor $x = 2$. $y = 1$, $n = 4$ en $p = 3$, komt er voor de wortels

−85, 125 en 155; −25, 125 en 175;

dezelve alle door 5 deelende, heeft men ook voor de wortels:

−17, 25 en 31; −5, 25 en 35;

en dus voor de gevraagde reeksen.

289, 625 en 961; 25, 625 en 1225.

Aanmerking. De middelste termen dezelfde zijnde, is het natuurlijk, dat ook de sommen gelijk zijn; deze voorwaarde is dus overtollig.

CCXXXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Men begeert een getal van twee cijfers, zoodanig, dat het getal, deszelfs omgekeerde, de som van het getal en deszelfs omgekeerde, en het verschil van het getal en deszelfs omgekeerde, te zamen 383 *opleveren?*

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, W. G. van Delden, M. L. Goede, H. Kloos, G. Koster, D. van Lankeren Matthes, W. van Loon, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoek, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Laat het cijfer der tientallen door x en dat der eenheden door y voorgesteld worden, dan is:

het getal . . . . $10x + y$
dezelfs omgekeerde . . . . $x + 10y$,
de som van beide . . . . $11x + 11y$
en het verschil . . . . $9x - 9y$

dit alles te zamen is . . . . $31x + 13y$
en bijgevolg hebben wij de vergelijking

$$31y + 13y = 383.$$

Uit dezelve volgt

$$y = \frac{383 - 31x}{13} = 29 - 2x + \frac{6 - 5x}{13};$$

wij stellen dus $\frac{6 - 5x}{13} = a$,

dan komt er

$$x = \frac{6 - 13a}{5} = 1 - 2a + \frac{1 - 3a}{5};$$

wij stellen verder $\frac{1 - 3a}{5} = b$,

dan is $a = \frac{1 - 5b}{3} = -b + \frac{1 - 2b}{3};$

zij voorts $\frac{1 - 2b}{3} = c$

dan is $b = \frac{1 - 3c}{2} = -c + \frac{1 - c}{2};$

stellen wij ten laatste

$$\frac{1 - c}{2} = d,$$

dan is $c = 1 - 2d$;
bijgevolg $b = 3d - 1$,
$a = 2 - 5d$,
$x = 13d - 4$
en $y = -31d + 39$.

Omdat x en y geheele getallen kleiner dan 10 moeten zijn, kan alleen $d = 1$ genomen worden; hierdoor wordt $x = 9$ en $y = 8$, weshalve het begeerde getal 98 is.

CCXXXV. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Men vraagt de waarden van x en y te vinden, uit de vergelijkingen $x^2 + y^2 = a$ en $x^3 + y^3 = b$?

Opgelost door W. J. C. Rammelman Elsevier, J. Acquoy, G. Koster, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, J. Bassan, W. G. van Delden, M. G. Snoek, A. Vos, C. J. Bolten, M. L. Goede en C. van Schaick.

Oplossing van W. J. C. Rammelman Elsevier.

De eerste der opgegevene vergelijkingen kan geschreven worden in de gedaante

$$(x + y)^2 - 2xy = a; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

voor de tweede kan men schrijven

$$(x + y)\,(x^2 - xy + y^2) = b$$

of, daar $x^2 + y^2 = a$ is,

$$(x + y)\,(a - xy) = b; \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

alsnu uit ieder der vergelijkingen (1) en (2) het product xy afzonderende, komt er

$$\left.\begin{array}{ll} & xy = \tfrac{1}{2}((x + y)^2 - a) \\ \text{en} & xy = a - \dfrac{b}{x + y}, \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

derhalve is

$$\tfrac{1}{2}((x + y)^2 - a) = a - \frac{b}{x + y}$$

of, na herleiding

$$(x + y)^3 - 3a(x + y) + 2b = 0 \; . \; . \; . \; (4).$$

Op deze derde magtsvergelijking, waarin de tweede term ontbreekt, kan men, ter bepaling van $x + y$, de formule van Cardanus of de bekende leerwijze, die voor het onherleidbaar geval op het gebruik der goniometrische tafels rust, toepassen, naar gelang $a^3 < b^2$ of $a^3 > b^2$ is.

In het eerste geval heeft men voor $x + y$ slechts de eene bestaanbare waarde:

$$x+y=\sqrt[3]{\{-b+\sqrt{(b^2-a^3)}\}}-\sqrt[3]{\{b+\sqrt{(b^2-a^3)}\}};$$

in het tweede geval heeft men voor $x + y$ de drie bestaanbare waarden:

$$x+y=(2\sqrt{a})\,Cos.\left\{\tfrac{1}{3}Boog\,Cos. -\frac{b}{a\sqrt{a}}\right\},$$

$$x+y=(2\sqrt{a})\,Cos.\left\{\tfrac{1}{3}\left(2\pi+Boog\,Cos. -\frac{b}{a\sqrt{a}}\right)\right\}$$

$$x+y=(2\sqrt{a})\,Cos.\left\{\tfrac{1}{3}\left(4\pi+Boog\,Cos. -\frac{b}{a\sqrt{a}}\right)\right\}.$$

Hierdoor $x + y$ bekend zijnde, wordt door eene der ver-

gelijkingen (3) ook xy gevonden; en men kan dus x en y bepalen, door de gewone leerwijze, tot het vinden van twee getallen, waarvan de som en het product gegeven zijn.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Den boog ϕ te vinden, uit de vergelijking:

$$Sin.(2a+3\phi)=\left\{\begin{array}{l} Cos.(a-2\phi)Cos.\phi Sin.(a+2\phi) \\ +Cos.(a+3\phi)Cos.(4a+5\phi)Sin.(3a+7\phi) \\ +Cos.(a-2\phi)Sin.\phi Cos.(a+2\phi) \\ -Cos.(a+3\phi)Sin.(4a+5\phi)Cos.(3a+7\phi) \end{array}\right\},$$

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, D. VAN LANKEREN MATTHES, P. J. L. QUANT, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, A. VOS, C. J. BOLTEN, J. BASSAN, W. G. VAN DELDEN *en* F. C. RADIJS.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

De gegevene vergelijking kan ook aldus geschreven worden:

$$Sin.(2a+3\phi) =$$
$$Cos.(a-2\phi)\{Sin.\phi Cos.(a+2\phi)+Cos.\phi Sin.(a+2\phi)\}-$$
$$Cos.(a+3\phi)\{Sin.(4a+5\phi)Cos.(3a+7\phi)-Cos.(4a+5\phi)Sin.(3a+7\phi)\};$$

nu is in het algemeen

$$Sin.x Cos.y \pm Cos.x Sin.y = Sin.(x \pm y)$$

en derhalve is ook

$$Sin.\phi Cos.(a+2\phi)+Cos.\phi Sin.(a+2\phi)=Sin.(a+3\phi),$$
$$Sin.(4a+5\phi)Cos.(3a+7\phi)-Cos.(4a+5\phi)Sin.(3a+7\phi)=Sin.(a-2\phi);$$

hierdoor gaat nu de gegevene vergelijking over in

$$Sin.(2a+3\phi)=Sin.(a+3\phi)Cos.(a-2\phi)-Cos.(a+3\phi)Sin.(a-2\phi);$$

maar, volgens de genoemde algemeene formule, is het tweede lid der laatste vergelijking gelijk aan $Sin.\ 5\phi$, zoodat wij hebben

$$Sin.\ (2a+3\phi) = Sin.\ 5\phi.$$

Hieruit volgt nu weder, indien n een willekeurig geheel getal verbeeldt,

$$2a + 3\phi = 2n\pi + 5\phi$$

of

$$2a + 3\phi = (2n + 1)\pi - 5\phi,$$

uit welke vergelijkingen gevonden wordt:

$$\phi = a - n\pi$$

en

$$\phi = \frac{2n+1}{8}\pi - \tfrac{1}{4}a.$$

Indien men de waarden, die een of meermalen eenen geheelen omtrek verschillen, niet onderscheiden wil, geeft de eerste formule slechts *twee*, de laatste *acht* waarden voor ϕ.

In de eerste formule $n = 0$, $n = -1$, in de laatste formule $n = 0$, $n = 1$, enz. tot $n = 7$ stellende, verkrijgt men de tien waarden:

$\phi = a$, $\phi = a + \pi$, $\phi = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{4}a$;
$\phi = \frac{7}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{9}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{11}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{13}{8}\pi - \frac{1}{4}a$, $\phi = \frac{15}{8}\pi - \frac{1}{4}a$.

CCXXXVII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE.

Hoe groot zal de middelste term zijn van eene rekenkunstige reeks, waarvan het verschil 3 *is; wanneer van deze reeks: de* 1ste *term, met overspringing van eenige volgende termen eene* 2de, *weder met gelijke overspringing eene* 3de, *en nog met gelijke overspringing eene* 4de *term, te zamen* 94 *opleveren; terwijl er* 154 *komt, wanneer bij de genoemde* 2de, 3de *en* 4de *termen wederom met gelijke overspringing eene* 5de *term, die tevens de laatste der reeks is, wordt opgeteld?*

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, J. ACQUOY, H. G. WITLAGE, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, L. VAN DE KASTEELE, H. KLOOS, G. KOSTER, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, M. G. SNOER *en* C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* J. S. SPEIJER.

Omdat telkens hetzelfde getal termen der reeks moet overgesprongen worden, moeten de vijf in het voorstel genoemde termen wederom eene rekenkunstige reeks uitmaken; waarvan de eerste, middelste en laatste termen, tevens de eerste, middelste en laatste termen der oorspronkelijke reeks zijn. Stellen wij dus voor die vijf termen

$$x - 2y,\quad x - y,\quad x,\quad x + y \text{ en } x + 2y,$$

dan hebben wij

$$(x - 2y) + (x - y) + x + (x + y) = 94$$

en $$(x - y) + x + (x + y) + (x + 2y) = 154$$

of $$4x - 2y = 94$$

en $$4x + 2y = 154.$$

De som dezer vergelijkingen door 8 deelende, vindt men terstond

$$x = 31$$

hetgeen de gevraagde middelste term is; en tot welks bepaling klaarblijkelijk het verschil 3 der oorspronkelijke reeks niet behoefde gegeven te zijn.

Deelt men het verschil der bovenstaande vergelijkingen door 4, dan vindt men $y = 15$; de vijf termen in de opgaaf genoemd zijn dus

1, 16, 31, 46 en 61;

en nu kan men, daar het verschil 3 der oorspronkelijke reeks gegeven is, gemakkelijk ook die reeks uitschrijven. Zij is namelijk

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, *enz.* tot 61

CCXXXVIII. Voorstel.

Door A. F. van de Laar, Junior.

Hoe groot is de gereede waarde van eene jaarwedde, die n malen zal genoten worden, met opklimming in eene rekenkunstige orde, zoodat men aan het einde van het eerste jaar r gulden, aan het einde van het tweede jaar $2r$ gulden, enz. zal genieten; aannemende, dat de koers van den interest m ten honderd 's jaars is? (*)

Opgelost door A. Vos, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, W. G. van Delden, H. Kloos, A. F. van de Laar, Junior, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs en J. S. Speijer.

Oplossing van A. Vos.

Zoo als genoegzaam bekend is, wordt de gereede waarde van een kapitaal k, dat over n jaren betaalbaar is, als men interest van interest tegen m ten honderd rekent, voorgesteld door de formule

$$\left(\frac{100}{100+m}\right)^n \times k.$$

Stelt men nu de gereede waarde der jaarwedde, in het voorstel omschreven, door x voor, dan heeft men, door toepassing dezer formule, als men ter bekorting $\frac{100}{100+m} = p$ stelt, de vergelijking

$$x = pr + p^2 \times 2r + p^3 \times 3r + enz. \ldots + p^{n-1} \times (n-1)r + p^n \times nr$$

of $x = pr\{1 + 2p + 3p^2 + enz. + (n-1)p^{n-2} + np^{n-1}\}$.

(*) Meijer Hirsch, *Verz. van Voorb. enz.* bl. 243. N°. 50.

vermenigvuldigt men deze vergelijking met

$$(1-p)^2 = 1 - 2p + p^2,$$

dan bekomt men

$$x(1-p)^2 = pr\{1-(n+1)p^n + np^{n+1}\},$$

waaruit terstond volgt

$$x = \frac{pr\{1-(n+1)p^n + np^{n+1}\}}{(1-p)^2}.$$

Hierin voor p weder $\frac{100}{100+m}$ schrijvende, zal men na behoorlijke herleiding verkrijgen

$$x = \frac{100}{m^2}\left\{100+m-(100+m+mn)\left(\frac{100}{100+m}\right)^n\right\}r.$$

CCXXXIX. Voorstel.

Door A. F. van de Laar, Junior.

Een schuldenaar is verpligt de sommen a, a', a'', a''', enz. guldens, respectievelijk over n, n', n'', n''', enz. jaren te betalen. Wanneer hij nu zijne geheele schuld, met de som van $a + a' + a'' + a''' +$ enz. guldens in eens betalen wil, over hoeveel jaren zal zulks dan plaats moeten hebben; aannemende, dat de koers van den interest m ten honderd 's jaars is? (*)

Opgelost door H. Kloos, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, A. F. van de Laar, Junior en A. Vos.

Oplossing van H. Kloos.

Wanneer wij, even als in het voorgaande voorstel, de gereede waarde berekenen van de sommen a, a', a'', a''', enz., te betalen over n, n', n'', n''', enz., jaren, en daarbij weder om ter bekorting $\frac{100}{100+m} = p$ stellen, vinden wij voor de som van die gereede waarden

$$p^n a + p^{n'} a' + p^{n''} a'' + p^{n'''} a''' + \text{enz.}$$

Stellen wij verder, dat x het gevraagde aantal jaren zij, dan zal de gereede waarde der som $a + a' + a'' + a''' +$ enz., over x jaren te betalen, zijn

$$p^x\,(a + a' + a'' + a''' + \text{enz}).$$

(*) Meier Hirsch, *Verz. van Voorb.* bl. 265. N°. 40.

Daar nu de gereede waarde der schulden en de gereede waarde der betaling even groot moeten zijn, hebben wij de vergelijking

$$p^x(a+a'+a''+a'''+\text{enz.})=p^n a+p^{n'}a'+p^{n''}a''+p^{n'''}a'''+\text{enz.}$$

Hieruit volgt

$$x\,Log.p+Log.(a+a'+a''+\text{enz.})=Log.(p^n a+p^{n'}a'+p^{n''}a''+\text{enz.})$$

en derhalve is

$$x=\frac{Log.(p^n a+p^{n'}a'+p^{n''}a''+\text{enz.})-Log.(a+a'+a''+\text{enz.})}{Log.\ p},$$

in welke formule men des verkiezende weder $p=\frac{100}{100+m}$ kan substitueren.

CCXL. VOORSTEL.

Door H. KLOOS.

Vindt eene rekenkunstige reeks van acht termen, waarvan de som 588 *is, zoodanig, dat de derde term een vijfhoekig en de zevende term een negenhoekig getal van gelijke wortels zijn?*

OPGELOST *door* D. VAN LANKEREN MATTHES, J. ACQUOY, C. J. BOLTEN, M. L. GOEDE, M. G. SNOER, J. S. SPEIJER, A. VOS, J. BASSAN, W. G. VAN DELDEN, L. VAN DE KASTEELE, H. KLOOS, G. KOSTER, W. VAN LOON, F. C. RADIJS en C. VAN SCHAICK.

OPLOSSING *van* D. VAN LANKEREN MATTHES.

Stellen wij de gevraagde reeks voor door

$x-7y,\ x-5y,\ x-3y,\ x-y,\ x+y,\ x+3y,\ x+5y$ en $x+7y$,

dan is derzelver som, volgens de opgave,

$$8x=588$$

en dus is $$2x=147$$

en $$x=73\tfrac{1}{2}.$$

Stellen wij verder z voor den wortel der in het voorstel genoemde vijf- en negen-hoekige getallen, dan moet men hebben

$$x-3y=\frac{3z^2-z}{2}\quad\text{en}\quad x+5y=\frac{7z^2-5z}{2}$$

of $2x-6y=3z^2-z$ en $2x+10y=7z^2-5z$, van welke vergelijkingen het verschil, na deeling door 16, geeft

$$y = \tfrac{1}{4}(x^2 - x).$$

In deze twee vergelijkingen echter voor $2x$ de bovengevondene waarde stellende, komt er

$$147 - 6y = 3x^2 - x \quad \text{en} \quad 147 + 10y = 7x^2 - 5x;$$

als nu de eerste met 5 en de tweede met 3 vermenigvuldigende, en daarna die vergelijkingen bij elkander optellende, vindt men

$$1176 = 36x^2 - 20x$$

of, na deeling door 36,

$$x^2 - \tfrac{5}{9}x = \tfrac{98}{3},$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$x = 6, \quad \text{of} \quad x = -5\tfrac{4}{9}.$$

Door de gevondene vergelijking $y = \frac{1}{4}(x^2 - x)$, vindt men alzoo

$$y = 7\tfrac{1}{2}, \quad \text{of} \quad y = 8\tfrac{125}{162}$$

en deze waarden van y verbindende met die van $x = 73\frac{1}{2}$ vroeger gevonden, zoo verkrijgt men, ter beantwoording des voorstels, de twee reeksen:

21, 36, 51, 66, 81, 96, 111 en 126;

$12\frac{8}{81}$, $29\frac{52}{81}$; $47\frac{15}{81}$, $64\frac{59}{81}$, $82\frac{22}{81}$, $99\frac{66}{81}$, $117\frac{29}{81}$ en $134\frac{73}{81}$.

CCXLI. Voorstel.

Door H. Kloos.

Deelt het getal 1834 *zoodanig in vijf deelen, dat de vier eerste deelen eene rekenkunstige reeks vormen, waarvan de eerste term een trigonaal- en de laatste term een hexagonaal-getal van dezelfde wortels zijn; en dat men het getal* 1834 *wederom verkrijgt, indien men bij viermalen de som van het eerste en vijfde deel een getal optelt, dat* 3 *minder is dan een vierkant getal, welks wortel* 3 *minder is dan de genoemde gelijke drie en zeshoekige wortels?*

Opgelost *door* M. G. Snoer, J. Acquoy, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, J. S. Speijer, A. Vos, J. Bassan, W. G. van Delden, M. L. Goede, L. van de Kasteele, H. Kloos, G. Koster *en* F. C. Radijs.

Oplossing *van* M. G. Snoer.

Laat de gelijke wortel van de in het voorstel genoemde trigonaal- en hexagonaal-getallen x zijn, dan zijn deze getallen

zelve $\frac{x^2+x}{2}$ en $\frac{4x^2-2x}{2}$, en daar deze getallen de beide uiterste termen der gestelde reeks zijn, zoo wordt het gemeen verschil van die reeks gevonden, door die getallen van elkander af te trekken en het derde gedeelte van de rest te nemen; dit gemeen verschil is dus $\frac{x^2-x}{2}$, en de reeks is bij gevolg

$$\frac{x^2+x}{2},\quad \frac{2x^2}{2},\quad \frac{3x^2-x}{2} \quad \text{en} \quad \frac{4x^2-2x}{2}.$$

De som van deze reeks van het getal 1834 aftrekkende, vindt men voor het laatste of vijfde deel

$$1834-5x^2+x.$$

Volgens de laatste bepaling van het voorstel, heeft men nu de vergelijking

$$1834=4\left\{\left(\frac{x^2+x}{2}\right)+(1834-5x^2+x)\right\}+\left\{(x-3)^2-3\right\},$$

of ontwikkeld

$$1834=2x^2+2x+7336-20x^2+4x+x^2-6x+9-3;$$

door vereeniging en overbrenging der termen, verandert deze vergelijking in

$$17x^2=5503,$$

dus is $x^2=324$

en $x=\pm 18.$

Nemende $x=+18$ zoo zijn de gevraagde deelen

171, 324, 477, 630 en 232;

nemende echter $x=-18$, zoo vindt men voor die deelen

153, 324, 495, 666 en 196.

CCXLII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een driehoekig- en een pronik-getal, beide in geheelen, te vinden, zoodat de som van het driehoekige getal en den wortel van het pronikgetal gelijk zij aan de som van het pronikgetal en den wortel van het driehoekige getal?

Opgelost *door* J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, M. L. Goede, L. van de Kasteele, H. Kloos, G. Koster, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, C. van Schaick, M. G. Snoer, J. S. Speijer *en* A. Vos.

OPLOSSING van J. ACQUOY.

Stelt men voor den wortel van het driehoekige getal x en voor dien van het pronikgetal y, dan heeft men de vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + x) + y = y^2 + y + x$$

of $$\tfrac{1}{2}(x^2 - x) = y^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1);$$

om nu al de waarden voor x en y in geheele getallen te vinden, kan men den volgenden weg inslaan.

Men vermenigvuldige de vergelijking (1) met 2, dan heeft men

$$x^2 - x = 2y^2,$$

waaruit volgt $$x = \frac{1 \pm \sqrt{(8y^2 + 1)}}{2} \quad \ldots\ldots (2);$$

y moet dus in geheele getallen zoodanig bepaald worden, dat de uitdrukking $8y^2 + 1$ een volkomen vierkant zij.

Volgt men hiertoe de leerwijze, opgegeven bij EULER, *Algebra*, 2 Deel, bl. 328 en verv., dan vindt men voor de waarden van y, de volgende reeks van getallen:

$$y = 0,\ \pm 1,\ \pm 6,\ \pm 35,\ \pm 204,\ \textit{enz.}$$

van welke reeks elke volgende term gevonden wordt, door het zesvoud van den voorgaanden, met den tweeden voorgaanden, te verminderen.

Door de vergelijking (2) vindt men verder, voor de waarden van x, die met deze waarden van y respectievelijk overeenkomen:

$x = 1$ of 0, 2 of -1, 9 of -8, 50 of -49, 289 of -288, *enz.* zijnde het voorts duidelijk, dat elke term uit de waardenreeks voor y, in verband met den overeenkomstigen term uit de waardenreeks voor x, vier verschillende antwoorden op het voorstel zal doen kennen.

Neemt men bijvoorb. $y = \pm 6$, waarmede overeenkomt $x = 9$ of -8, dan vindt men:

$y = +6$ en $x = 9$ stellende,

het pronikgetal 42 en het driehoekig getal 45;

$y = +6$ en $x = -8$ stellende,

het pronikgetal 42 en het driehoekig getal 28;

$y = -6$ en $x = 9$ stellende,

het pronikgetal 30 en het driehoekig getal 45;

en $y = -6$ en $x = -8$ stellende,

het pronikgetal 30 en het driehoekig getal 28.

Aanmerking. Uit de vergelijking (1) volgt, omdat $\frac{1}{2}(x^2 - x)$ een driehoekig getal voorstelt, welks wortel $x - 1$ of $-x$ is, dat de gevondene waarden voor x, met 1 verminderd of negatief genomen wordende, de wortels zullen doen kennen der driehoekige getallen, die tevens vierkante getallen zijn; alsmede, dat de wortels dezer vierkanten tevens de wortels van de, in het behandelde voorstel gevraagde, pronikgetallen zijn zullen.

CCXLIII. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een driehoekig en een pronikgetal, beide in geheelen te vinden, zoo dat de beide producten, van een dezer getallen met den wortel van het andere, onderling gelijk zijn?

Opgelost *door* J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, M. L. Goede, L. van de Kasteele, H. Kloos, G. Koster, D. van Lankeren Matthes, B. Lubbers, F. C. Radijs, M. G. Snoek, J. S. Speijer, A. Vos *en* C. van Schaick.

Oplossing *van* J. Acquoy.

Stelt men voor den wortel van het driehoekige getal x en voor dien van het pronikgetal y, dan heeft men de vergelijking:

$$\frac{x^2 + x}{2} \times y = (y^2 + y)x.$$

Deze vergelijking met 2 vermenigvuldigende en door xy deelende, vindt men:

$$x + 1 = 2y + 2,$$

waaruit volgt $\qquad x = 2y + 1.$

Men behoeft dus slechts den wortel van het driehoekige getal 1 meerder te nemen, dan de dubbele wortel van het pronikgetal, om aan het gevraagde te voldoen.

Neemt men bijv. voor den wortel van het pronikgetal 1, dan zal men voor dien van het driehoekige getal 3 moeten nemen; het pronikgetal zelf is dan 2 en het driehoekige getal 6.

CCXLIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

Een driehoekig en een pronikgetal te vinden, zoodat, elk met zijn' eigen' wortel vermenigvuldigd wordende, de producten gelijk zijn?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, M. L. Goede, G. Koster, D. van Lankeren

Matthes, F. C. Radijs, M. G. Snoer, J. S. Speijer en A. Vos.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Men stelle voor het driehoekige getal $\frac{1}{2}(x^2 + x)$ en voor het pronikgetal $y^2 + y$, dan moet volgens het voorstel

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + x)x = (y^2 + y)y$$

of

$$x^3 + x^2 = 2y^3 + 2y^2$$

zijn; stellende nu $x = ay$, dan komt er

$$a^3y^3 + a^2y^2 = 2y^3 + 2y^2$$

of

$$a^3y + a^2 = 2y + 2,$$

waaruit volgt

$$y = \frac{2 - a^2}{a^3 - 2}.$$

Hierin kan men voor a eene willekeurige waarde nemen; bijv. $a = 2$ nemende, komt er $y = -\frac{1}{3}$, $x = ay = -\frac{2}{3}$, dus is dan het driehoekige getal $-\frac{1}{9}$ en het pronikgetal $-\frac{2}{9}$.

Voor $a = \frac{4}{3}$, zou men hebben $y = \frac{3}{5}$, $x = \frac{4}{5}$, $\frac{1}{2}(x^2 + x) = \frac{18}{25}$ en $y^2 + y = \frac{24}{25}$.

CCXLV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

In eenen bol een regelmatig tetraëdrum, en in dat tetraëdrum wederom een bol beschreven zijnde, vraagt men de betrekking tusschen de inhouden dezer drie ligchamen te vinden?

Opgelost *door* B. Lubbers, J. Acquoy, J. Bassan, C. J. Bolten, D. van Lankeren Matthes, F. C. Radijs, J. S. Speijer *en* A. Vos.

Oplossing *van* B. Lubbers.

Wanneer men elk der gelijke ribben van het regelmatig tetraëdrum door a en de stralen der om- en ingeschrevene bollen door R en r voorstelt, heeft men (volgens J. de Gelder, *Beg. der Meetk.* derde druk, § 839.)

$$R = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6}, \quad r = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6},$$

en

$$\textit{Inh. Tetraedr.} = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2};$$

derhalve heeft men voor de inhouden der bollen:

$$\textit{Inh. Omg. Bol} = \tfrac{4}{3}R^3\pi = \tfrac{1}{8}a^3\pi\sqrt{6}$$

en

$$\textit{Inh. Ing. Bol} = \tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{216}a^3\pi\sqrt{6};$$

bij gevolg is de betrekking der inhouden

$$\textit{Omg. Bol} : \textit{Tetr.} : \textit{Ing. Bol} = \tfrac{1}{8}a^3\pi\sqrt{6} : \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2} : \tfrac{1}{216}a^3\pi\sqrt{6}$$

of, met 216 vermenigvuldigende en door $a^3\sqrt{6}$ deelende,

Omg. Bol. : *Tetr.* : *Ing. Bol.* $= 27\pi : 6\sqrt{3} : \pi$.

Hieruit volgt nog

$$Omg.\ Bol : Tetr. = \pi : \tfrac{8}{9}\sqrt{3},$$
$$Tetr. : Ing.\ Bol = 6\sqrt{3} : \pi$$
en
$$Omg.\ Bol : Ing.\ Bol = 27 : 1.$$

CCXLVI. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

In eenen bol een regelmatig octaëdrum, en in dat octaëdrum wederom een bol beschreven zijnde, vraagt men almede de betrekking tusschen derzelver inhouden te bepalen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. ACQUOY, J. BASSAN, C. J. BOLTEN, D. VAN LANKEREN MATTHES, F. C. RADIJS, J. S. SPEIJER *en* A. VOS.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Wanneer men elk der gelijke ribben van het regelmatig octaëdrum door a en de stralen der om- en ingeschrevene bollen door R en r voorstelt, heeft men (volgens J. DE GELDER, *Beg. der Meetk.* derde druk, § 839.)

$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \quad , \quad r = \tfrac{1}{6}a\sqrt{6},$$
en
$$Inh.\ Octaëdr. = \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2};$$

derhalve heeft men voor de inhouden der bollen,

$$Inh.\ Omg.\ Bol = \tfrac{4}{3}R^3\pi = \tfrac{1}{3}a^3\pi\sqrt{2}$$
$$Inh.\ Ing.\ Bol = \tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{1}{27}a^3\pi\sqrt{6};$$

bij gevolg is de betrekking der inhouden

$$Omg.\ Bol : Oct. : Ing.\ Bol = \tfrac{1}{3}a^3\pi\sqrt{2} : \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2} : \tfrac{1}{27}a^3\pi\sqrt{6}$$

of, met 27 vermenigvuldigende en door $a^3\sqrt{6}$ deelende,

$$Omg.\ Bol : Oct. : Ing.\ Bol = 3\pi\sqrt{3} : 3\sqrt{3} : \pi.$$

Hieruit volgt nog:

$$Omg.\ Bol : Oct. = \pi : 1,$$
$$Oct. : Ing.\ Bol = 3\sqrt{3} : \pi$$
en
$$Omg.\ Bol : Ing.\ Bol = 3\sqrt{3} : 1.$$

CCXLVII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

Men vraagt vijf derdemagtsgetallen te vinden, zoodanig, dat als men bij dezelve respectievelijk de getallen 1, 2, 3, 4 *en* 5 *optelt, er eene rekenkunstige reeks van de derde orde ontstaat?*

OPGELOST *door* J. ACQUOY, G. KOSTER, D. VAN LANKE-

REN MATTHES, J. S. SPEIJER, A. VOS, J. BASSAN, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER en M. G. SNOER.

OPLOSSING van J. ACQUOY.

Als men den algemeenen of n^{den} term eener rekenkunstige reeks van de derde orde, dat is:

$$a + \frac{n-1}{1} b + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} d$$

vermeerdert of vermindert met den algemeenen of n^{den} term eener rekenkunstige reeks van de eerste orde, dat is: met

$$a' + \frac{n-1}{1} b',$$

dan stelt de som of het verschil

$$(a \pm a') + \frac{n-1}{1}(b \pm b') + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\ \ 2} c + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ \ 2.\ \ 3} d$$

weder den n^{den} term eener rekenkunstige reeks van de derde orde voor.

Hieruit volgt, dat als men de termen eener rekenkunstige reeks van de derde orde vermeerdert of vermindert, met de overeenkomstige termen eener rekenkunstige reeks van de eerste orde, de komende getallen weder eene rekenkunstige reeks van de derde orde zullen uitmaken (*).

Daar nu de getallen 1, 2, 3, 4 en 5 eene reeks van de eerste orde uitmaken, behoeft men de vijf in het voorstel gevraagde derdemagts getallen slechts zoodanig te bepalen, dat zij eene reeks van de derde orde daarstellen. Hieraan nu wordt terstond voldaan, als men de wortels met gelijke verschillen laat aangroeijen en dus, voor de gevraagde derdemagtsgetallen, de vormen.

$(r)^3$, $(r+s)^3$, $(r+2s)^3$, $(r+3s)^3$ en $(r+4s)^3$ aanneemt; want deze vormen stellen eene reeks daar, waarvan de derde verschillen elk $6s^3$ zijn.

Neemt men in de aangenomen vormen $r = 1$ en $s = 1$, dan zijn de verlangde vijf derdemagtsgetallen

(*) Deze zelfde stelling kan algemeener dus voorgesteld worden: *Als men de termen eener rekenkunstige reeks van de p^{de} orde vermeerdert of vermindert, met de overeenkomstige termen eener rekenkunstige reeks van de q^{de} orde (zijnde $q <$ of $= p$), dan zullen de komende getallen weder eene rekenkunstige reeks van de p^{de} orde uitmaken.*

1 , 8 , 27 , 64 en 125,
die met 1 , 2 , 3 , 4 en 5,
vermeerderd of verminderd wordende, getallen opleveren, welke eene rekenkunstige reeks van de derde orde daarstellen.

CCXLVIII. VOORSTEL.

Door W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER.

De zijden eens driehoeks te vinden als gegeven zijn: de tophoek; de straal des omgeschreven cirkels; en de straal van den cirkel beschreven in den kleineren driehoek, die ontstaat, als men uit het middelpunt van den ingeschreven cirkel des oorspronkelijken driehoeks, lijnen naar de uiteinden der bazis trekt?

OPGELOST *door* J. S. SPEIJER, A. VOS, J. ACQUOY, W. J. C. RAMMELMAN ELSEVIER, D. VAN LANKEREN MATTHES *en* J. BASSAN.

I. OPLOSSING, *door berekening*, *van* J. S. SPEIJER.

Laat ABC (Fig. 134) den bedoelden driehoek voorstellen, waarin wij, ter vermijding van gebrokens, den gegeven tophoek C $= 8\alpha$ stellen; laat de straal des omgeschreven cirkels R zijn, dan is volgens eene bekende formule AB $= 2R\ Sin.\ 8\alpha$; deelen wij verder de hoeken BAC en ABC midden door, dan is het snijpunt M der deellijnen het middelpunt van den cirkel in den driehoek ABC beschreven; deelen wij de hoeken BAM en ABM wederom door midden, dan is het snijpunt N dezer nieuwe deellijnen het middelpunt van den cirkel in den driehoek ABM beschreven, en van dezen laatsten cirkel is de straal ND $= r$ gegeven.

Stellen wij eindelijk, weder ter vermijding van gebrokens,

$$hoek\ BAC - hoek\ ABC = 8\phi$$

dan is, omdat $hoek\ BAC + hoek\ ABC = 180° - 8\alpha$ is,

$hoek\ BAC = (90° - 4\alpha) + 4\phi,\ hoek\ ABC = (90° - 4\alpha) - 4\phi,$
$hoek\ BAM = (45° - 2\alpha) + 2\phi,\ hoek\ ABM = (45° - 2\alpha) - 2\phi,$
$hoek\ BAN = (22°30' - \alpha) + \phi,\ hoek\ ABN = (22°30' - \alpha) - \phi,$

of, zoo wij kortheidshalve $22°30' - \alpha = \beta$ stellen,

$$hoek\ BAN = \beta + \phi \quad \text{en} \quad hoek\ ABN = \beta - \phi.$$

Nu is uit de regthoekige driehoeken ADN en BDN:

$$AD = ND\ Cot.\ DAN = r\ Cot.\ (\beta + \phi)$$

en $$AD = ND\ Cot.\ DBN = r\ Cot.\ (\beta - \phi),$$

waaruit door optelling volgt:

$$AB = r\ (Cot.\ (\beta + \phi) + Cot.\ (\beta - \phi));$$

maar wij hadden reeds $AB = 2R\ Sin.\ 8\alpha$, en in het algemeen is $Cot.\ (\beta + \phi) + Cot.\ (\beta - \phi)$

$$= \frac{Sin.\ 2\beta}{Sin.(\beta+\phi) Sin.(\beta-\phi)} = \frac{Sin.\ 2\beta}{Cos.^2\phi - Cos.^2\beta} = \frac{2\ Sin.\ 2\beta}{Cos. 2\phi - Cos. 2\beta},$$

derhalve hebben wij:

$$2R\ Sin.\ 8\alpha = \frac{2r\ Sin.\ 2\beta}{Cos.\ 2\phi - Cos.\ 2\beta},$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt

$$Cos.\ 2\phi = \frac{r\ Sin.\ 2\beta}{R\ Sin.\ 8\alpha} + Cos.\ 2\beta.$$

Om deze formule voor de berekening door logarithmen geschikt te maken, stelle men

$$\frac{r}{R\ Sin.\ 8\alpha} = Cot.\ \mu = \frac{Cos.\ \mu}{Sin.\ \mu},$$

dan is

$$Cos.\ 2\phi = \frac{Sin.\ 2\beta\ Cos.\ \mu + Sin.\ \mu\ Cos.\ 2\beta}{Sin.\ \mu} = \frac{Sin.\ (\mu + 2\beta)}{Sin.\ \mu},$$

waardoor men ϕ berekenen kan; hierdoor worden de hoeken BAC en ABC bekend en, daar AB reeds bekend is, kan men de zijden AC en BC, door hunne evenredigheid met de sinussen der overstaande hoeken, vinden.

Hierdoor heeft men het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\beta = 22^\circ\ 30' - \alpha,$$

$$Cot.\ \mu = \frac{r}{R\ Sin.\ 8\alpha},$$

$$Cos.\ 2\phi = \frac{Sin.(\mu + 2\beta)}{Sin.\ \mu},$$

$$hoek\ A = 4(\beta + \phi),$$

$$hoek\ B = 4(\beta - \phi),$$

$$AB = 2R\ Sin.\ 8\alpha,$$

$$BC = \frac{AB\ Sin.\ A}{Sin.\ C} = 2R\ Sin.\ 4(\beta + \phi)$$

en $$AC = \frac{AB\ Sin.\ B}{Sin.\ C} = 2R\ Sin.\ 4(\beta - \phi).$$

II. Oplossing, *door Constructie, van* A. Vos.

Van eenen cirkel, met den gegeven straal R beschreven, snijde men een cirkelsegment ABC (Fig. 135) af, den gegeven tophoek 8α bevattende, dan zal de koorde AB de bazis van den begeerden driehoek zijn en deszelfs top zal op den omtrek van den cirkel moeten liggen. Op AB als koorde beschrijve men een ander cirkelsegment, dat eenen hoek van $135° + 2\alpha$ bevat, en trekke op eenen afstand, gelijk aan den gegeven straal r, eene lijn evenwijdig met AB; het snijpunt N, van deze lijn met den laatstbeschreven cirkelboog, zal dan het middelpunt zijn van den ingeschreven cirkel, die r tot straal heeft. Voorts trekke men de lijnen AC en BC zoodanig, dat de hoeken BAC en ABC het viervoud der hoeken BAN en ABN zijn, dan zullen deze lijnen elkander in een punt C van den cirkel ABC snijden en de driehoek ABC zal de begeerde zijn.

De juistheid dezer constructie blijkt genoegzaam, uit hetgeen in de vorige oplossing is aangetoond; zijnde het voorts klaar, dat men twee snijpunten N en N′ en dus ook twee driehoeken ABC en ABC′ verkrijgt, die echter alleen in stand verschillen.

CCXLIX. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

De formule $\delta y = \delta x \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{b} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$ *te integreren?*

Opgelost *door* D. van Lankeren Matthes, J. Acquoy, C. J. Bolten, A. Vos *en* J. Bassan.

Oplossing *van* D. van Lankeren Matthes.

Men stelle vooreerst

$$x = \frac{b}{z^2} \quad \text{en dus} \quad \delta x = -\frac{2b\,\delta z}{z^3},$$

dan gaat de opgegevene formule over in

$$\delta y = -\frac{2b\,\delta z}{z^3}\sqrt[3]{(1+z)};$$

verder stelle men

$$1 + z = u^3, \quad z = u^3 - 1 \quad \text{en} \quad \delta z = 3u^2\delta u,$$

dan verandert de te integreren formule andermaal en wel in

$$\delta y = -6b\,\frac{u^3\delta u}{(u^3-1)^3},$$

waarvoor men schrijven kan

$$\partial y = bu\,\partial\,\frac{1}{(u^3-1)^2};$$

door nu te integreren en terstond de algemeene herleidings-formule

$$\int X\partial Y = XY - \int Y\partial X$$

toe te passen, verkrijgt men

$$y = \frac{bu}{(u^3-1)^2} - b\int\frac{\partial u}{(u^3-1)^2}.$$

Voorts is:

$$\int\frac{\partial u}{(u^3-1)^2} = \int\frac{u^3\partial u-(u^3-1)\partial u}{(u^3-1)^2} = -\int\frac{\partial u}{u^3-1} + \int\frac{u^3\partial u}{(u^3-1)^2}$$

en $\int\frac{u^3\partial u}{(u^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\int u\partial\,\frac{1}{u^3-1} = -\frac{1}{3}\frac{u}{(u^3-1)} + \frac{1}{3}\int\frac{\partial u}{u^3-1}$,

door substitutie van welke integralen men verkrijgt

$$y = \frac{bu}{(u^3-1)^2} + \frac{bu}{3(u^3-1)} + \frac{2}{3}b\int\frac{\partial u}{u^3-1}.$$

Volgens de *Diff. en Int. Rek.* van I. R. Schmidt, bladz. 253, is,

$$\int\frac{\partial x}{1+x^3} = \frac{1}{3}Log.\frac{1+x}{\sqrt{(1-x+x^2)}} + \frac{1}{\sqrt{3}}BoogTang.\frac{x\sqrt{3}}{2-x};$$

hierin $-u$ in plaats van x schrijvende, komt er

$$\int\frac{\partial u}{u^3-1} = \frac{1}{3}Log.\frac{1-u}{\sqrt{(1+u+u^2)}} - \frac{1}{\sqrt{3}}BoogTang.\frac{u\sqrt{3}}{2+u},$$

en hierdoor verkrijgen wij eindelijk

$$y = \frac{bu}{(u^3-1)^2} + \frac{bu}{3(u^3-1)} + \frac{2b}{9}Log.\frac{1-u}{\sqrt{(1+u+u^2)}} - \frac{2b}{3\sqrt{3}}BoogTang.\frac{u\sqrt{3}}{2+u} + C.$$

Volgens de verrigte substitutiën is

$$z^2 = \frac{b}{x} \quad \text{en} \quad z = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}},$$

dus is $u = \sqrt[3]{(z+1)} = \sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{x}}+1\right)} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{b}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$,

en deze waarde voor u zal men nu nog, in de gevondene waarde voor y, moeten substitueren.

CCL. Voorstel.

Door W. J. C. Rammelman Elsevier.

Den loop en de voornaamste eigenschappen op te sporen der kromme lijn, die tot pool vergelijking heeft $z = a$ Log. Sin. ϕ?

Opgelost *door* J. Acquoy *en* W. J. C. Rammelman Elsevier.

Oplossing van J. Acquoy.

Om uit de opgegevene polaire vergelijking

$$z = a\ Log.\ Sin.\ \phi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

den loop der gevraagde kromme lijn in het algemeen af te leiden, trekke men de lijnen XX′ en YY′ (Fig. 136) snijdende elkander regthoekig in O, en merke het punt O als pool, en de lijn OX als den oorsprong der hoeken ϕ aan. Laat voorts OM eene onbepaalde regte lijn zijn, die door hare beweging om het punt O de hoeken ϕ bepaalt, en zij OA $= a$ de éénheid, waarin de grootte der lijnen wordt uitgedrukt.

Onderstellen wij nu dat OM in den stand OY gekomen en dat dus hoek $\phi = 90°$ zij, dan is *Sin.* ϕ = OA $= 1$ en *Log. Sin.* $\phi = 0$; O is dus een punt der kromme lijn.

Laat men verder OM van den stand OY tot den stand OX voortbewegen of ϕ van 90° tot 0° afnemen, dan wordt *Sin.* ϕ aanhoudend kleiner en dus zal de polaire ordinaat z eene telkens grooter wordende negatieve waarde verkrijgen, tot dat als de bewegende lijn OM in den stand OX gekomen of $\phi = 0°$ geworden is, $z = -\infty$ wordt. Men zal dus de waarden van z, die bij deze onderstelling steeds bestaanbaar blijven, altijd in de rigting ON van het verlengde der bebewegende lijn OM moeten afzetten en bijgevolg zal men, bij deze beweging van OM, den tak OPZ der kromme lijn verkrijgen, die beneden OX′ van het punt O af tot op eenen oneindigen afstand ter linkerzijde van OY′ bestendig voortgaat. Laat men daarentegen de lijn OM van OY naar OX′ voortbewegen, of ϕ van 90° tot 180° toenemen, dan zal men, omdat in het algemeen *Sin.* $(90° + x) =$ *Sin.* $(90° - x)$ is, dezelfde waarden voor z vinden, die men verkreeg toen ϕ van 90° tot 0° afnam en men zal dus, bij deze beweging van OM, den tak OZ′ der kromme lijn verkrijgen, die ter regterzijde van OY′ op dezelfde wijs gelegen zal zijn, als de tak OPZ ter linkerzijde.

Wordt verder de lijn OM van OX′ naar OY′ en van OY′ naar OX voortbewogen of laat men ϕ van 180° tot 270° en van 270° tot 360° toenemen, dan wordt *Sin.* ϕ negatief en dus deszelfs logarithmus onbestaanbaar, zoodat men bij deze onderstelling geene bestaanbare waarden voor z verkrijgt en er dus geene punten der kromme lijn boven XX′ gelegen zullen zijn.

Om de behandelde kromme lijn door punten te construëren, beschrijve men (de lijnen XX′ en YY′ als regthoekige coördinaatassen en de lijn OA $= a$ als éénheid aannemende) zoo naauwkeurig mogelijk de kromme lijn LL′, zoodanig, dat voor elk van derzelver punten $x =$ *Nep. Log.* y is (*), en trekke uit O als middelpunt met OA $= a$ als straal eenen cirkel ABCD. Onderstellende alsdan, dat hoek MOX eene gegevene waarde voor ϕ zij, trekke men uit M de lijn ME loodregt op OX en de lijn MFG evenwijdig aan XX′, dan is FG $=$ *Log.* OF $=$ *Log.* ME $=$ *Log. Sin.* ϕ en dus zal de negatieve lijn FG klaarblijkelijk de waarde van Z voorstellen. Neemt men dus op het verlengde van MO, den afstand OP $=$ FG, dan zal P een punt der gevraagde kromme lijn zijn. Door deze constructie op verschillende waarden van ϕ toe te passen, zal men alles bevestigd vinden, wat wij hierboven omtrent den loop der kromme lijn uit de vergelijking afgeleid hebben.

Alsnu overgaande om de meer bijzondere eigenschappen der kromme lijn op te sporen, merken wij vooreerst op, dat vermits dezelve door de as YY′ in twee gelijke en gelijkvormige takken OPZ en OZ′ verdeeld wordt, wij ons bij dit onderzoek slechts bij den tak OPZ zullen behoeven te bepalen.

Daar wij boven zagen dat bij $\phi = 0°$, $z = -\infty$ wordt, zoo blijkt, dat de kromme lijn OPZ, in derzelver oneindig afgelegene punten, hoe langs zoo méer neiging krijgt, om tot de as OX′ te naderen en dat dus OX′ of eene lijn evenwijdig aan OX′ eene asymptote der kromme lijn kan zijn. Om te onderzoeken, wat hiervan zij, zullen wij nagaan, wat de afstand der kromme lijn tot de as OX′ is, als $\phi = 0$ ondersteld wordt. Deze afstand nu wordt in het algemeen voorgesteld door

$$y = z\ Sin.\ \phi = a\ Sin.\ \phi\ Log.\ Sin.\ \phi\ .\ .\ (2),$$

Stellen wij hierin $\phi = 0$, dan wordt $y = 0$, waaruit

(*) De constructie dezer kromme lijn, bekend onder den naam van *Logarithmische kromme*, vindt men opgegeven onder anderen bij I. R. Schmidt, *Diff. en Int. Rek.* § 120.

blijkt, dat de lijn OX′ eene asymptote is van de kromme lijn OPZ.

Daar dus de kromme lijn zich van het punt O af, eerst van de as OX′ verwijdert en daarna in hare oneindig afgelegene punten weder tot dezelve nadert, zoo moet er ergens in dezelve een punt V aanwezig zijn, waarin zij zich het verst van OX′ verwijdert; terwijl er voorts tusschen V en Z een buigpunt W zal moeten bestaan.

Om deze punten te bepalen, maken wij vooraf de drie eerste differentiaal-quotienten, der functie $z = a \, Log. Sin. \phi$ op, waarvoor wij vinden

$$\frac{\delta z}{\delta \phi} = a \, Cot. \, \phi \, \ldots\ldots\ldots \, (3),$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta \phi^2} = -\frac{a}{Sin.^2 \phi} \, \ldots\ldots\ldots \, (4)$$

en

$$\frac{\delta^3 z}{\delta \phi^3} = \frac{2a Cos. \phi}{Sin.^3 \phi} \, \ldots\ldots\ldots\ldots \, (5).$$

Daar voorts de tangens van den hoek, dien de polaire ordinaat met de raaklijn van eenig punt der kromme maakt, in het algemeen wordt uitgedrukt door

$$Tang. \, \psi = z \times \frac{\delta \phi}{\delta z} = z : \frac{\delta z}{\delta \phi}$$

Zoo vinden wij, door hierin de waarden van z en $\frac{\delta z}{\delta \phi}$ uit (1) en (3) over te brengen, dat voor de behandelde kromme lijn

$$Tang. \, \psi = Tang. \, \phi \, Log. \, Sin. \, \phi \text{ is } \ldots \, (6).$$

Om nu het punt V te bepalen, waarin zich de kromme lijn het verst van OX′ verwijdert, zoo heeft men, omdat voor zulk een punt de raaklijn evenwijdig aan de as XX′ en dus in het algemeen

$$\psi = 180° - \phi$$

of $\quad Tang. \, \psi = Tang. \, (180° - \phi) = - Tang. \, \phi$

zijn moet, door hierin de waarde van $Tang. \, \psi$ uit (6) over te brengen, de vergelijking:

$$- Tang. \, \phi = Tang. \, \phi \, Log. \, Sin. \, \phi \, \ldots\ldots \, (7).$$

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan door $Tang. \, \phi = 0$ en dus $\phi = 0°$ of $= 180°$ te nemen, waardoor men de oneindig afgelegene punten Z en Z′ der kromme

verkrijgt, en dus brengt deze waarde voor *Tang.* ϕ ons wederom tot dezelfde opmerking, die wij boven reeds maakten, dat namelijk de raaklijn der oneindig afgelegene punten Z en Z′ der kromme lijn evenwijdig met de as XX′ of wel de as XX′ zelve zijn moet.

Aan de vergelijking (7) wordt ook voldaan door

$$Log.\ Sin.\ \phi = -1 \quad \text{of} \quad Sin.\ \phi = \frac{1}{e}$$

en dus zal voor het gezochte punt V

$$\phi = Boog\ Sin.\ \frac{1}{e}$$

en
$$z = a\ Log.\ Sin.\ \phi = -a$$

moeten zijn.

Om dus het punt V door constructie te bepalen volgt uit de gevondene waarde $z = -a$ dat hetzelve gelegen zal moeten zijn in den omtrek des cirkels ABCD. Daar voorts volgens (2) de afstand van elk punt der kromme lijn tot de as XX′ voorgesteld wordt door

$$y = a\ Sin.\ \phi\ Log.\ Sin.\ \phi$$

zoo zal voor het punt V (*a* als éénheid aannemende)

$$y = -\frac{1}{e}$$

en dus volgens de eigenschappen der Logarithmische kromme LL′,

$$y = -BH$$

moeten zijn. Trekt men dus de lijn IK evenwijdig aan XX′ en op eenen afstand gelijk aan BH beneden dezelve, dan zal het punt, waarin de lijn IK den omtrek des cirkels ABCD snijdt, de plaats van het punt V aanwijzen.

Om het buigpunt W te bepalen, zoo volgt, omdat in het algemeen voor eenig buigpunt

$$z\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} - 2\left(\frac{\partial z}{\partial\phi}\right)^2 - z^2 = 0$$

moet zijn, zonder dat

$$2z\frac{\partial z}{\partial\phi} + 3\frac{\partial z}{\partial\phi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2} - z\frac{\partial^3 z}{\partial\phi^3} = 0$$

wordt, door in deze vergelijkingen de waarden van z, $\frac{\partial z}{\partial\phi}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial\phi^2}$ en $\frac{\partial^3 z}{\partial\phi^3}$ uit (1), (3), (4) en (5) over te brengen, dat voor het buigpunt onzer kromme lijn

$$2+Log.Sin.\phi+Sin.^2\phi(Log.^2Sin.\phi-2)=0 \quad . \; . \; . \quad (8)$$

zal moeten zijn, zonder dat

$$-a^2\frac{Cos.\phi}{Sin.^3\phi}\left\{2Cos.^2\phi Log.Sin.\phi+3\right\}=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wordt.

Aan de vergelijking (8) wordt terstond voldaan door $Sin.\phi = 1$ en dus $\phi = 90°$ te nemen; maar dewijl hierdoor de vergelijking (9), omdat $Cos.\ 90° = 0$ is, gelijk 0 zou worden, zoo kan deze waarde voor ϕ geen buigpunt aanwijzen, zoo als het trouwens ook uit het boven aangevoerde omtrent den loop der kromme lijn reeds duidelijk genoeg bleek, dat het punt O, hetwelk met de waarde van $\phi = 90°$ overeenstemt, geen buigpunt der kromme lijn zijn kan.

Stelt men in de vergelijking (8) $Log.\ Sin.\ \phi = -2$ en dus $Sin.\ \phi = \frac{1}{e^2}$, dan wordt hierdoor het eerste lid dier vergelijking gelijk $\frac{2}{e^4} = 0.0366313$ nagenoeg en dus blijkt, dat deze waarde vrij nabij aan die vergelijking voldoet en slechts eene zeer kleine grootheid van de wezenlijke waarde verschilt. Stelt men dit kleine verschil gelijk p en onderstelt men alzoo dat de wezenlijke waarde van $Log.\ Sin.\ \phi = -(2+p)$ en dus die van $Sin.\ \phi = \frac{1}{e^{2+p}}$ is, dan volgt uit (8) dat

$$-p+\frac{2+4p+p^2}{e^{4+2p}}=0$$

zal moeten zijn. Daar nu voor eene zeer geringe waarde van p, $\frac{2+4p+p^2}{e^{4+2p}}$ nagenoeg $= \frac{2}{e^4}$ is, zoo volgt uit de laatste vergelijking, dat p vrij nabij $= \frac{2}{e^4}$, en dat dus de waarde van $Log.\ Sin.\ \phi$ nagenoeg $-\left(2+\frac{2}{e^4}\right) = -2.0366313$ zijn zal. Dezen Neperiaanschen Logarithmus van $Sin.\ \phi$ tot den gewonen tafel Logarithmus van $Sin.\ \phi$ herleidende, vindt men

$$Tafel\ Log.\ Sin.\ \phi = 9.1155024$$

en

$$\phi = 7°\ 20'\ 48'';$$

om den graad van naauwkeurigheid dezer waarde van $Log.\ Sin.\ \phi$ te beproeven substituere men dezelve in de vergelijking (8), men zal alsdan met behulp der tafels vinden, dat

het eerste lid dier vergelijking — 0.0000712 wordt. Stelt men $\phi = 7°29'49''$ dan vindt men dat 1e lid $= -$ 0.0000262 en $\phi = 7°29'50''$ nemende, wordt hetzelve $= +$ 0.0000108, waaruit dus volgt, dat de laatste waarde voor ϕ de naauwkeurigste is en minder dan éene seconde van de wezenlijke waarde verschilt. Daar nu bij deze waarde voor ϕ, aan de vergelijking (9) geenszins voldaan wordt, zoo zal als men de lijn M'OW zoodanig trekt, dat hoek M'OX $= 7°29'50''$ is, het hiermede overeenkomende punt W der kromme lijn, het begeerde buigpunt zijn.

Uit de gevondene waarde voor *Tang.* ψ uit (6) volgt, door dezelve met a te vermenigvuldigen,

$$a\,Tang.\psi = a\,Tang.\phi\,Log.Sin.\phi = z\,Tang.\phi \quad . \; . \; . \quad (10).$$

Om dus aan eenig punt P der kromme lijn, waarvan de coördinaten ϕ en z bekend zijn, eene raaklijn te trekken, heeft men de volgende constructie: uit de punten P en N trekke men de lijnen PQ en NR loodregt op ON en make NR $=$ PQ, dan zal als men na OR getrokken te hebben uit P de lijn PT evenwijdig aan OR trekt, PT de begeerde raaklijn zijn. Want uit den regthoekigen driehoek RNO heeft men alsdan

RN $= a$ *Tang.* RON $= a$ *Tang.* OPT $= a$ *Tang.* ψ

en uit den regthoekigen driehoek QPO

PQ $=$ OP *Tang.* QOP $=$ OP *Tang.* MOX $= z$ *Tang.* ϕ

uit het verband van welke twee laatste vergelijkingen, omdat NR $=$ PQ gemaakt is, blijkens de vergelijking (10) het gestelde volgt.

De formule voor den kromtestraal geene merkwaardige bijzonderheden leerende kennen, zoo gaan wij dezelve met stilzwijgen voorbij, om nog kortelijk aan te wijzen, hoe de inhoud der kromme lijn door middel eener oneindige reeks bepaald kan worden.

Deze inhoud wordt in het algemeen voorgesteld door

$$I = \tfrac{1}{2} \int z^2\, \delta\phi$$

of, voor z hare waarde a *Log. Sin.* ϕ in de plaats stellende, door

$$I = \tfrac{1}{2}\, a^2 \int Log.^2\, Sin.\, \phi\, \delta\phi$$

Stelt men hierin $\phi = \tfrac{1}{2}\pi - x$ en dus *Sin.* $\phi =$ *Cos.* x en $\delta\phi = -\,\delta x$ dan heeft men

$$I = -\tfrac{1}{2}\, a^2 \int Log.^2\, Cos.\, x\, \delta x$$

ontwikkelt men nu de uitdrukking *Log. Cos.* x in eene oneindige reeks, dan heeft men (zie I. R. SCHMIDT, *Diff. en Int. Rek.* § 58).

$$Log. Cos. x = -\left\{\frac{x}{2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.9}+\frac{17x^8}{5.7.8.9}+\frac{31x^{10}}{7.25.81}+enz.\right\}$$

Deze uitdrukking in het vierkant brengende, vindt men, als men zich tot de vier eerste termen der reeks bepaalt,

$$Log.^2\, Cos. x = \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{12}x^6 + \tfrac{7}{240}x^8 + \tfrac{79}{7560}x^{10} + enz.$$

en dus wordt

$$I = -\tfrac{1}{2}a^2\left\{\int\tfrac{1}{4}x^4\partial x + \int\tfrac{1}{12}x^6\partial x + \int\tfrac{7}{240}x^8\partial x + \int\tfrac{79}{7560}x^{10}\partial x + enz.\right\}$$

of
$$I = -\tfrac{1}{2}a^2x^5\left\{\frac{1}{20}+\frac{x^2}{84}+\frac{7x^4}{2160}+\frac{79x^6}{83160}+enz.\right\}\ldots(11),$$

in welke formule x gelijk is aan den boog ($\frac{1}{2}\pi - \phi$), uitgedrukt in den straal 1. Daar nu de inhoud voor $\phi = \frac{1}{2}\pi$ of voor $x = 0$, gelijk 0 moet worden en de gevondene formule (11) hieraan voldoet, zoo zal bij dezelve, als men den inhoud begeert, begrepen tusschen eenen boog OP der kromme en den voerstraal van het punt P, geene standvastige behoeven gevoegd te worden.

Ten slotte merken wij nog op, dat de gegevene oplossing tevens van toepassing is op de kromme lijn, waarvan de pool-vergelijking is

$$z = a\ Log.\ Cosec.\ \phi,$$

want vermits $Cosec.\,\phi = \frac{1}{Sin.\ \phi}$ en dus $Log. Cosec. \phi = -\,Log.\ Sin.\ \phi$ is, zoo zal men bij deze kromme lijn, bij gegevene waarden voor ϕ, dezelfde waarden voor z verkrijgen, als bij de behandelde kromme, uitgenomen, dat dezelve positief zijn, en dus op de bewegende lijn OM zelve en niet op haar verlengde afgezet zullen moeten worden; gevolgelijk zal deze kromme lijn alleen in stand, ten opzigte der assen XX′ en YY′, van de behandelde verschillen. —

EINDE VAN HET ZESDE EN LAATSTE DEEL.

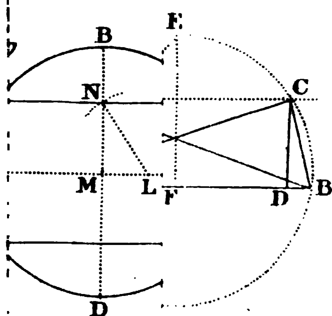
NDIG

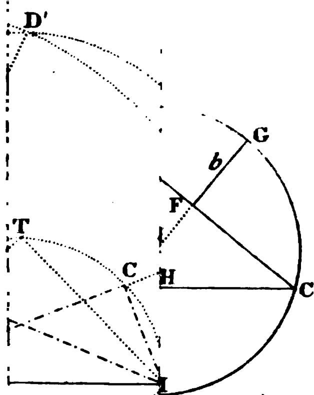
Pl. I.

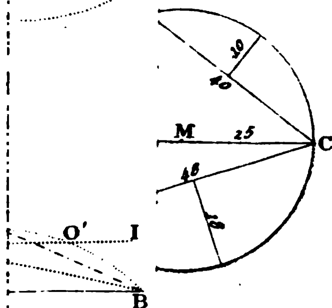
I
Y
E'
E'
E
M
E"
N
C
A
G B T X
Y'
N'
P'
N'
Y
P
E'
X'
R
C
P'
D
B
X
7.
N
E"
E
Q
Y'

IGE

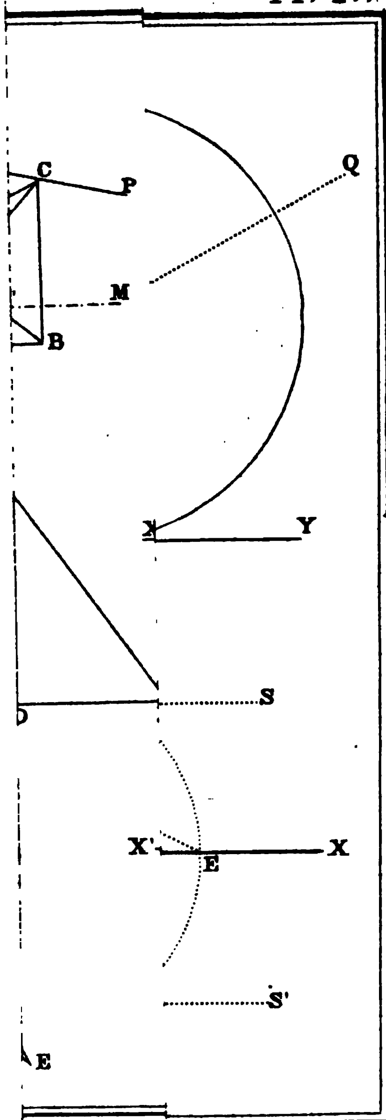
Pl. II.







"E VOC" and "Pl. IV." are fragments at the top of a cut-off plate.



IGE

Pl. V.

B

M

I

H

45.

A

D

K

C

L

C

E

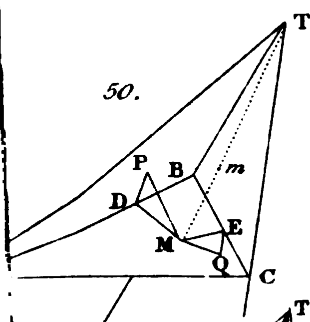
K

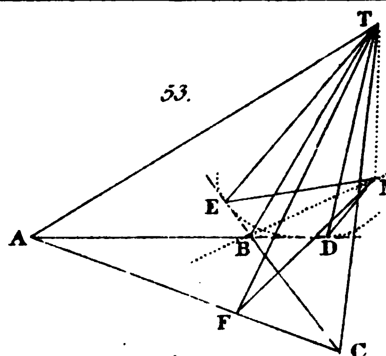
B

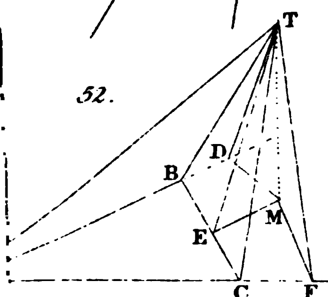
G

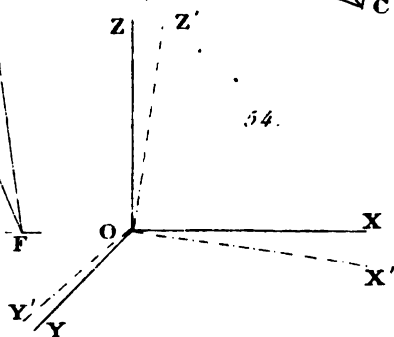
M

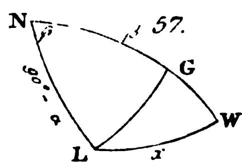
P

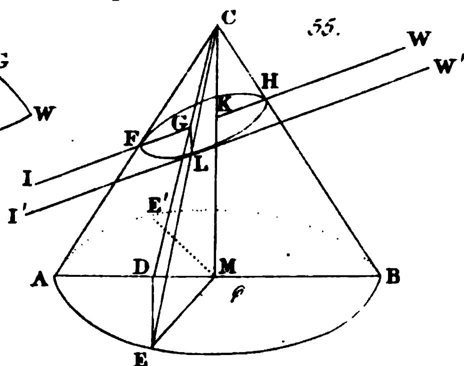

50.
T
P
B
m
D
E
M
Q
C

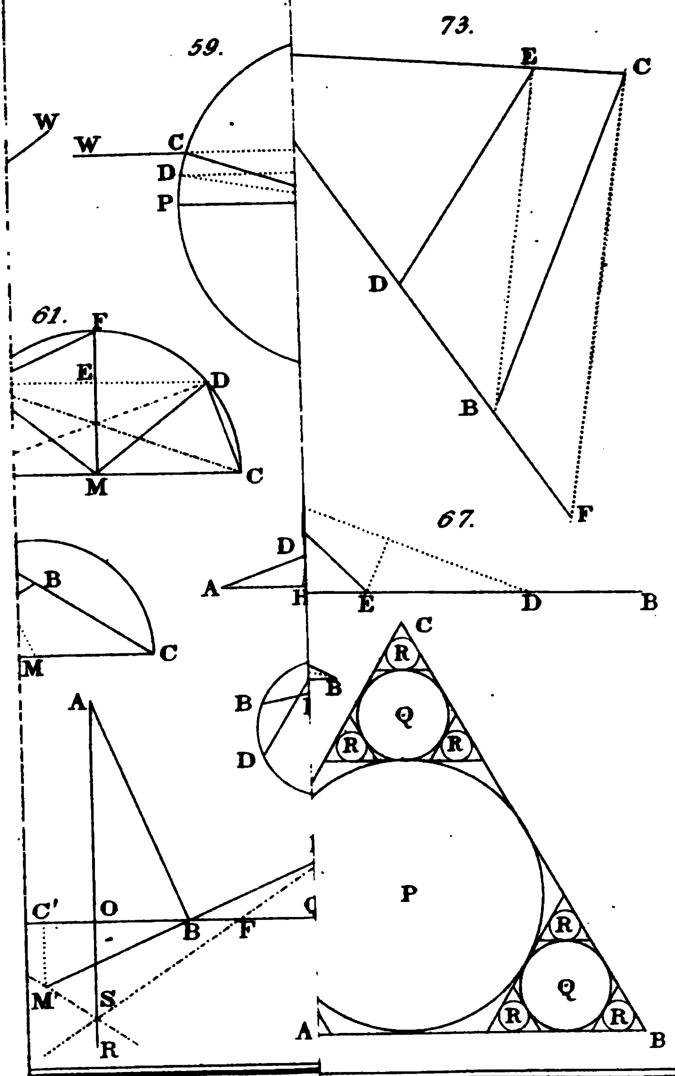

T
53.
E
A
B
D
F
C

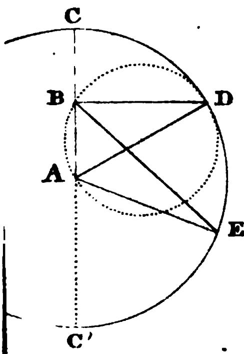

T
52.
D
B
M
E
C
F

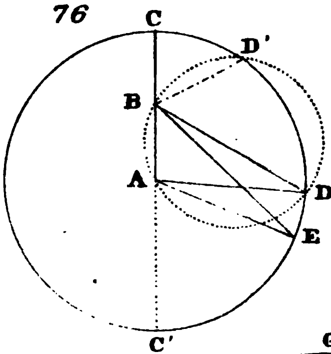

Z
Z'
54.
O
X
X'
Y'
Y

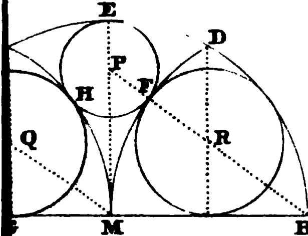

N
57.
G
W
L
x

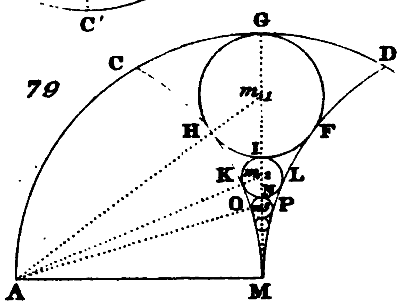

C
55.
W
W'
H
K
G
F
L
I
I'
E'
A
D
M
B
E

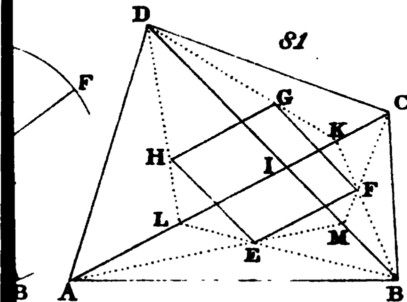

59.
73.
E
C
W
W
C
D
P
D
61.
F
E
D
B
C
M
F
67.
D
A
H
E
D
B
B
C
M
C
R
Q
R
R
A
B
B
D
P
C'
O
B
F
R
Q
M'
S
R
R
A
B
R

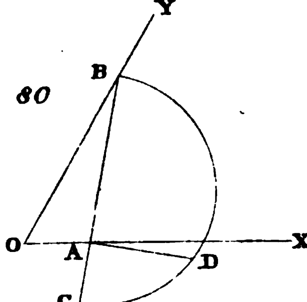

C
B
D
A
E
C'


76
C
D'
B
A
D
E
C'


E
D
P
H
F
Q
R
M
B

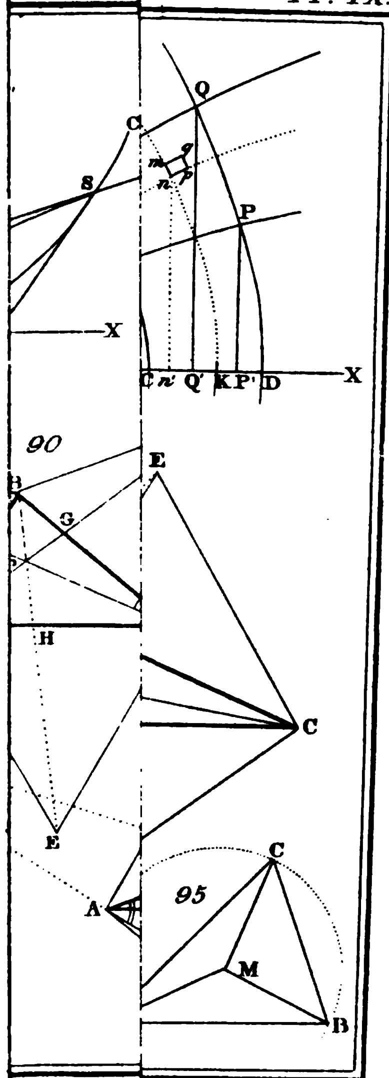

G
C
D
79
H
F
I
K
L
O
P
A
M


D
81
F
G
C
K
H
I
F
L
M
E
B
A
B


Y
B
80
O
A
X
D
C

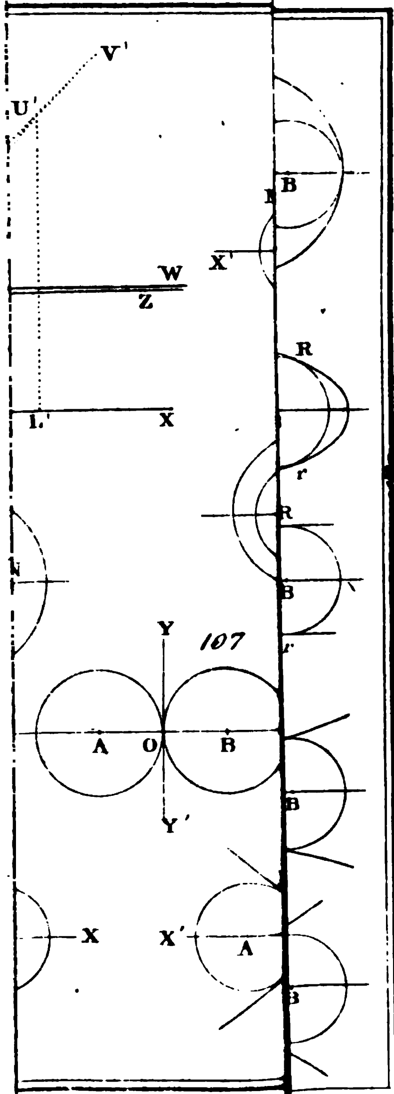
UND

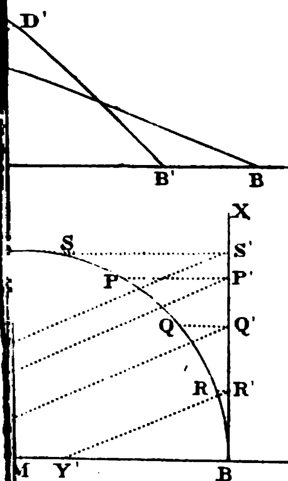
Pl. IX.

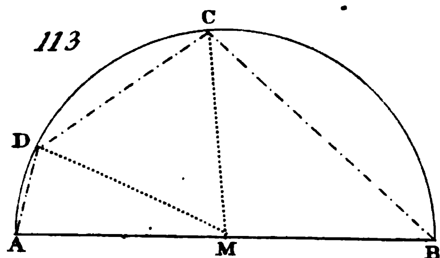


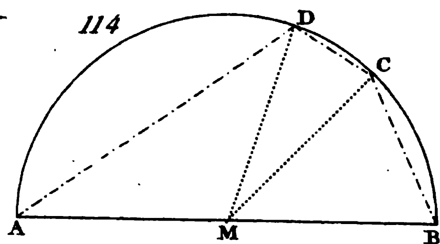
ĢE VOOR

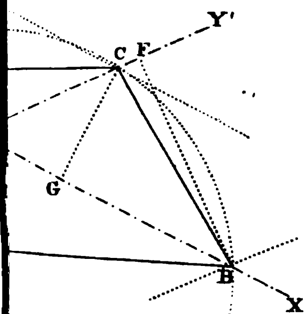
Pl. X.

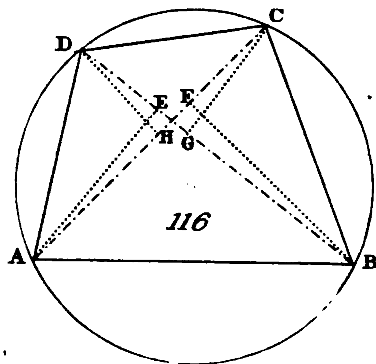


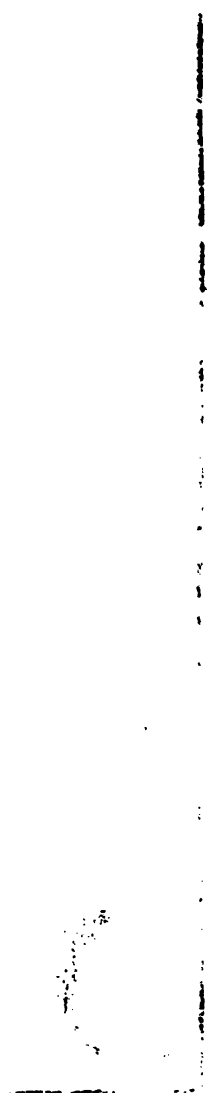

D'
B'
B
X
S
S'
P
P'
Q
Q'
R
R'
Y'
B
Z


113
C
D
A
M
B


114
D
C
A
M
B

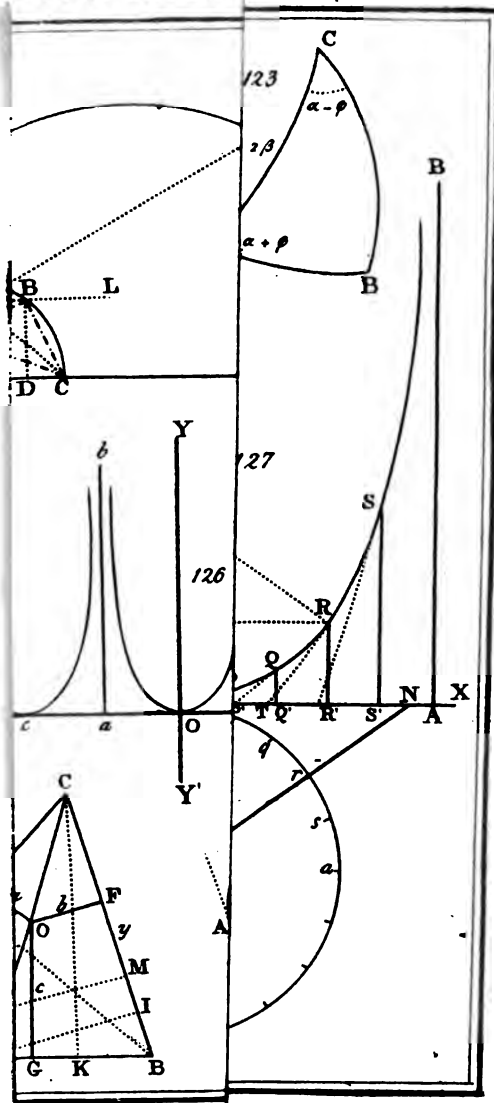

Y'
C
F
G
B
X'


D
C
E
F
H
G
116
A
B

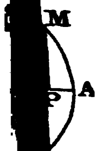


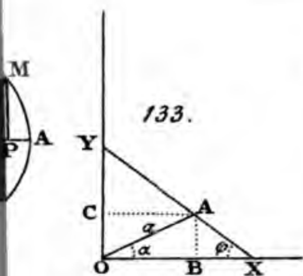
…UNDIGE

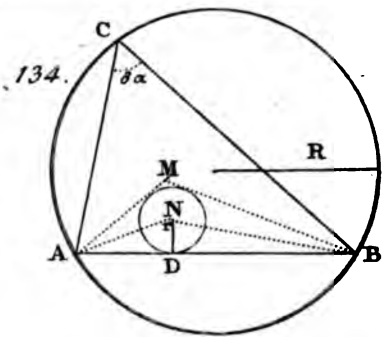
Pl. XII.

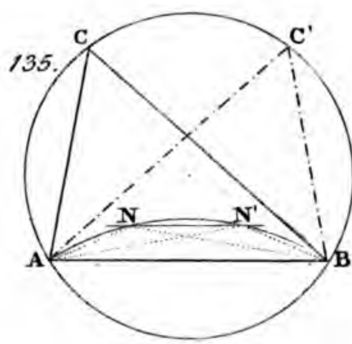


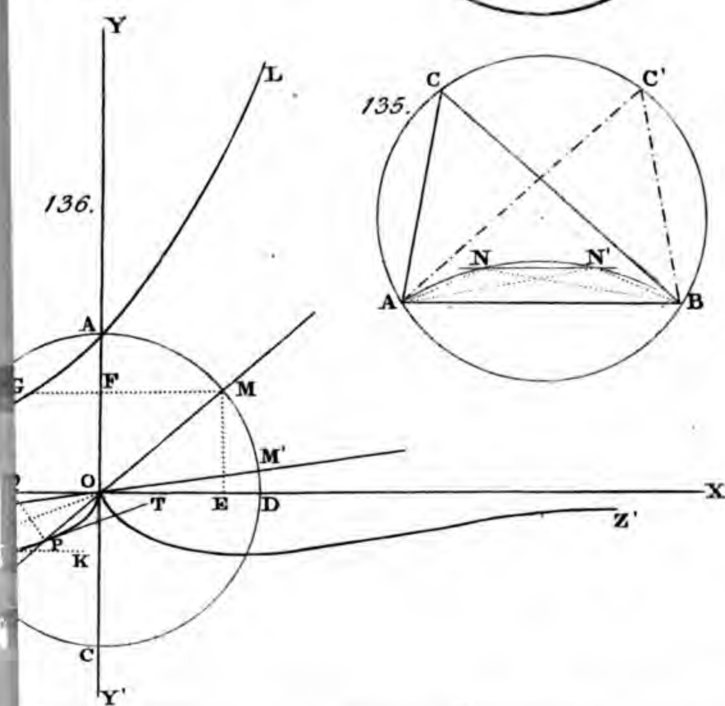
RS




M
A
P
133.
Y
C
A
α
α
φ
O
B
X


C
134.
R
M
N
r
A
D
B


C
C'
135.
N
N'
A
B


Y
L
136.
A
G
F
M
M'
O
T
E
D
X
Z'
P
K
C
Y'

